双曲線型切込みのある直交異方性板の応力⁽¹⁾

林 卓夫⁽²⁾ 太田 友彌⁽³⁾

Stresses in an Orthogonal Aerotropic Plate with Hyperbolic Reentrances

by Takuo HAYASI and Tomoya ŌTA

The problem of determining the stresses in an orthogonal aerotropic plate have been investigated by many authors, but they are chiefly in the cases, either of a plate having straight boundaries or of an infinite plate with a circular or an elliptic hole.

In the present paper the aerotropic plate is supposed to be bound by two hyperbolic edges, and solutions are sought in three cases, namely under pure tension, pure shear and pure bending. The process used is similar to the Neuber's method, and in each case the coefficient of stress concentration is obtained in a simple form.

1. 緒 言

直交異方性板の二次元応力問題は、今まで多くの人々によって研究されてはいるが、その多くは直線境界あるいは無限平板中に丸孔または円孔がある場合についてであって、その他の形状の穴、切欠きなどを持った板についてはいまだ取り扱われていないように思われる。したがって本論文においては、双曲線型切込みのある場合について計算し、各場合の簡単な応力集中係数を求めると共に、等方性板に対するノイバーの計算結果⁽⁴⁾と比較してみた。

2. 引張りを受ける場合

1. 応力かん数と写像かん数 今、板の平面を xy 平面とし(第 1 図)直交異方性板の弾性主軸の方向に x 軸, y 軸を取るとき、応力かん数 F は

$$F = R[F_1(x + ip_1y) + F_2(x + ip_2y)]$$

で与えられる。ここに R は実部を取ることを意味し、 p_1, p_2 は直交異方性板の特性を表わす定数で次の式

第 1 図

で与えられる。

$$p_1 = \sqrt{e + \frac{eg}{4}} \quad p_2 = \sqrt{\frac{eg}{4}}$$

ただし

$$e = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \quad g = \frac{\sqrt{F_x E_y}}{G} - 2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})$$

E_x, E_y : xy 方向のヤング係数

ν_x, ν_y : xy 方向のポアソン比

G : せん断弾性係数。

さて

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy = shw & w &= \alpha + i\beta \\ z_j &= x + ip_j y = a_j shw_j & w_j &= \alpha_j + i\beta_j \quad j=1,2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

によって xy 平面を $\alpha\beta$ 平面に写像すると

$$\left. \begin{aligned} x &= sh\alpha \cos\beta = a_j sh\alpha_j \cos\beta_j \\ y &= ch\alpha \sin\beta = \frac{a_j}{p_j} ch\alpha_j \sin\beta_j \quad j=1,2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となるから、 $\beta = \pm\theta, \beta_j = \pm\theta_j$ は xy 平面においてそれぞれ双曲線をあらわし、 $a_j \sin\theta_j = p_j \sin\theta, a_j \cos\theta_j = \cos\theta$ を満足するように a_j, θ_j を定めると、 xy 平面上で三つの双曲線は一致して、 $\alpha = \alpha_j$ となる。なお、応力かん数は

$$F = R[\varphi_1(w_1) + \varphi_2(w_2)] \quad (3)$$

と書くことができる。

2. 境界条件 xy 平面に垂直方向に単位長さを取って考えることにする。切込みの部分が自由縁であるためには、線素 ds に働く xy 方向の力 dX, dY が $\beta = \theta, \beta_j = \theta_j$ の線に沿って常に 0 でなければならぬ。 dX, dY を応力かん数を使って書き直すと

$$dX = -\sigma_x dy + \tau_{xy} dx = -d(\partial F / \partial y)$$

$$dY = \sigma_y dx + \tau_{xy} dy = d(\partial F / \partial x)$$

となるから、自由縁の条件は

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \pm \theta \quad \beta_j = \pm \theta_j \quad \text{において} \\ \partial F / \partial x = \text{定数} \quad \partial F / \partial y = \text{定数} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

である。次に引張りだけを受けていると言う条件は、任意の断面 C (第1図) に沿って $\beta = -\theta$ から $\beta = +\theta$ までの dX の積分が一定値 T となり、 y 方向の力の積分および曲げモーメントの積分は0となることである。すなわち

$$\int_{-\theta}^{+\theta} dX = T \quad \int_{-\theta}^{+\theta} dY = \int_{-\theta}^{+\theta} (x dY - y dX) = 0$$

あるいは応力かん数を使って

$$\left. \begin{array}{l} [\partial F / \partial y]_{\beta=-\theta}^{\beta=+\theta} = T \\ -[\partial F / \partial x]_{\beta=-\theta}^{\beta=+\theta} = 0 \\ \left[x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F \right]_{\beta=-\theta}^{\beta=+\theta} = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

となることである。

3. 応力かん数と応力

$$F = R \left[\sum_{j=1,2} \{ B_j a_j \operatorname{ch} w_j - A_j z_j w_j \} \right] \dots\dots\dots (6)$$

と置く。ここに A_j, B_j は境界条件から決定される定数である。

境界条件 (4) より

$$A_1 = B_1 = -A_1 = -B_1$$

境界条件 (5) より

$$A_1 = -A_1 = \frac{T}{2(p_1 \theta_1 - p_2 \theta_2)}$$

ゆえに応力かん数は

$$\begin{aligned} F = & \frac{T}{2(p_1 \theta_1 - p_2 \theta_2)} \{ a_1 \{ (\beta_1 \sin \beta_1 + \cos \beta_1) \operatorname{ch} \alpha_1 \\ & - a_1 \cos \beta_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \} \\ & - a_2 \{ \beta_2 \sin \beta_2 + \cos \beta_2 \} \operatorname{ch} \alpha_2 - a_2 \cos \beta_2 \operatorname{sh} \alpha_2 \} \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

となる。

$J = (\partial x / \partial \beta)^2 + (\partial y / \partial \beta)^2$ と置く時、 α 方向の直応力 σ_α は

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{J^2} \left\{ J \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial J}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) \right\} \dots\dots\dots (8)$$

で与えられるから、(7) を代入し $\beta = \theta$ における σ_α を求めると

$$\begin{aligned} [\sigma_\alpha]_{\beta=\theta} = & \frac{T}{\operatorname{ch}^2 \alpha \cos^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \theta} \\ & \times \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos \theta}{2(p_1 \theta_1 - p_2 \theta_2)} \\ & \times \left\{ \frac{p_1^2 \operatorname{ch}^2 \alpha \cos^2 \theta + (2p_1^2 - 1) \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \theta}{p_1^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \theta + \operatorname{ch}^2 \alpha \cos^2 \theta} \right. \\ & \left. - \frac{p_2^2 \operatorname{ch}^2 \alpha \cos^2 \theta + (2p_2^2 - 1) \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \theta}{p_2^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \theta + \operatorname{ch}^2 \alpha \cos^2 \theta} \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここで $p_1 = p_2 = 1$ とした極限の場合を考え

$$[\sigma_\alpha]_{\beta=\theta} = \frac{T}{\operatorname{ch}^2 \alpha \cos^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \theta} \times \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos \theta}{\theta + \sin \theta \cos \theta} \dots\dots\dots (10)$$

となり、等方性板に対しノイバーが与えた結果と一致する。

なお、応力は $\beta = \theta, \alpha = 0$ において最大となり、その応力と平均応力 T/b との比を応力集中係数 α_T とすると

$$\alpha_T = \frac{p_1^2 - p_2^2}{(p_1 \theta_1 - p_2 \theta_2)} \tan \theta \dots\dots\dots (11)$$

となる。ただし b は第1図において最小断面の幅である。

3. せん断を受ける場合

この場合の境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \pm \theta \quad \beta_j = \pm \theta_j \quad \text{において} \\ \partial F / \partial x = \text{定数} \quad \partial F / \partial y = \text{定数} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

および

$$\left. \begin{array}{l} -[\partial F / \partial x]_{\beta=-\theta}^{\beta=+\theta} = S \\ [\partial F / \partial y]_{\beta=-\theta}^{\beta=+\theta} = \left[x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F \right]_{\beta=-\theta}^{\beta=+\theta} = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

である。

応力かん数を

$$F = I \left[\sum_{j=1,2} \{ B_j a_j \operatorname{ch} w_j - A_j z_j w_j \} \right] \dots\dots\dots (14)$$

と置く。ただし I は虚部を取ることを意味する。

境界条件 (12) および (13) より

$$A_1 = -B_1 = \frac{p_2 S}{2(p_1 \theta_2 - p_2 \theta_1)},$$

$$A_2 = -B_2 = \frac{p_1 S}{2(p_2 \theta_1 - p_1 \theta_2)}$$

ゆえに、応力かん数は

$$\begin{aligned} F = & \frac{S}{2(p_1 \theta_2 - p_2 \theta_1)} \left[p_2 a_1 \{ (\beta_1 \cos \beta_1 - \sin \beta_1) \operatorname{sh} \alpha_1 \right. \\ & + a_1 \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \beta_1 \} - p_1 a_2 \{ (\beta_2 \cos \beta_2 \\ & \left. - \sin \beta_2) \operatorname{sh} \alpha_2 + a_2 \operatorname{ch} \alpha_2 \sin \beta_2 \} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

したがって (8) により

$$\begin{aligned} [\sigma_\alpha]_{\beta=\theta} = & \frac{S}{\operatorname{ch}^2 \alpha \cos^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \theta} \times \frac{p_1 p_2 \sin \theta \operatorname{sh} \alpha}{2(p_1 \theta_2 - p_2 \theta_1)} \\ & \times \left\{ \frac{(p_1^2 - 2) \operatorname{ch}^2 \alpha \cos^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \theta}{p_1^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \theta + \operatorname{ch}^2 \alpha \cos^2 \theta} \right. \\ & \left. - \frac{(p_2^2 - 2) \operatorname{ch}^2 \alpha \cos^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \theta}{p_2^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \theta + \operatorname{ch}^2 \alpha \cos^2 \theta} \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (16)$$

となる。

この場合にも、 $p_1 = p_2 = 1$ の極限を求めると

$$[\sigma_\alpha]_{\beta=\theta} = \frac{S}{\text{ch}^2\alpha \cos^2\theta + \text{sh}^2\alpha \sin^2\theta} \times \frac{\sin\theta \text{sh}\alpha}{\theta - \sin\theta \cos\theta} \quad (17)$$

となり, 等方性板に対するノイバーの結果と一致する。

4. 曲げモーメントを受ける場合

境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \pm\theta \quad \beta_j \pm \theta_j \text{ において} \\ \partial F / \partial x = \text{定数} \quad \partial F / \partial y = \text{定数} \end{array} \right\} \quad (18)$$

および

$$\left. \begin{array}{l} [\partial F / \partial x]_{\beta=-\theta}^{\beta=+\theta} = [\partial F / \partial y]_{\beta=-\theta}^{\beta=+\theta} = 0 \\ \left[x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F \right]_{\beta=-\theta}^{\beta=+\theta} = M \end{array} \right\} \quad (19)$$

である。

応力かん数を

$$F = I \left[\sum_{j=1,2} \{ a_j^2 (A_j \text{sh} 2w_j + 2B_j w_j) \} \right]$$

と置き, (18), (19) を満足するように A_j, B_j を決めると,

$$A_1 = B_1 = \frac{p_2 M}{4(p_1 a_2^2 \theta_2 - p_2 a_1^2 \theta_1)}$$

$$A_2 = B_2 = \frac{p_1 M}{4(p_2 a_1^2 \theta_1 - p_1 a_2^2 \theta_2)}$$

したがって

$$[\sigma_\alpha]_{\beta=\theta} = \frac{M}{\text{ch}^2\alpha \cos^2\theta + \text{sh}^2\alpha \sin^2\theta} \times \frac{p_1 p_2 \sin\theta \cos\theta}{p_1 a_2^2 \theta_2 - p_2 a_1^2 \theta_1} \times \left\{ \frac{(1 - 2p_1^2 \text{ch}^2\alpha) \text{sh}^2\alpha \sin^2\theta - (p_1^2 + 2\text{sh}^2\alpha) \text{ch}^2\alpha \cos^2\theta}{p_1^2 \text{sh}^2\alpha \sin^2\theta + \text{ch}^2\alpha \cos^2\theta} \right. \\ \left. - \frac{(1 - 2p_2^2 \text{ch}^2\alpha) \text{sh}^2\alpha \sin^2\theta - (p_2^2 + 2\text{sh}^2\alpha) \text{ch}^2\alpha \cos^2\theta}{p_2^2 \text{sh}^2\alpha \sin^2\theta + \text{ch}^2\alpha \cos^2\theta} \right\} \quad (20)$$

$p_1 = p_2 = 1$ の極限の場合は

$$[\sigma_\alpha]_{\beta=\theta} = \frac{M}{\text{ch}^2\alpha \cos^2\theta + \text{sh}^2\alpha \sin^2\theta} \times \frac{2 \sin^2\theta}{\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\theta} \quad (21)$$

となりノイバーの結果と一致する。なお最大応力は $\beta = \theta, \alpha = 0$ で起り, この場合の応力と, 一様太さのはりでその断面が切欠きの最小断面 b に等しいようなはりか, 同じ曲げモーメントを受けた場合の最大応力との比を応力集中係数 α_M とすると

$$\alpha_M = \frac{2p_1 p_2 (p_2^2 - p_1^2) \sin^3\theta}{3(p_1 a_2^2 \theta_2 - p_2 a_1^2 \theta_1) \cos\theta} \quad (22)$$

で与えられる。

5. 実 例 計 算

双曲線の型を決定するパラメータ θ を $\pi/4$ とし, かつ直交異方性板の例として柏を取ると, その弾性係数は大約⁽⁵⁾

$$E_1 = 582 \text{ kg/cm}^2, \quad E_2 = 219 \text{ kg/cm}^2$$

$$G = 1.32 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu_1 = 0.33 \quad \nu_2 = 0.12^*$$

* で与えられる。これより $p_1 p_2$ を計算すると, せんい方向が x 軸と一致する場合に $p_1 = 1.67, p_2 = 0.97$ x 軸と直角になる場合には $p_1 = 0.599, p_2 = 1.031$ となり, 各場合について応力集中状況を第 2 図, 第 3 図, 第 4 図に示す。ただし応力を無次元化するために第 2 図, 第 3 図においては最小断面における平均応力に対する割合を, 第 4 図においては最小断面の幅に等し *

第 2 図 引張力を受ける場合

* 一様太さの はり が同じ曲げモーメントを受ける場合の最大曲げ応力との比をあらわしている。

- 1 各図の右半分はせんい方向が切欠きと直角をなす場合をあらわし, 左半分は平行な場合をあらわす
- 2 破線は等方性板の場合の応力分布, 実線は直交異方性板の場合の応力分布をあらわす。

第 3 図 せん断力を受ける場合

第 4 図 曲げモーメントを受ける場合

なお、応力集中係数 α_T , α_M の値はそれぞれ次のようになる。

第 1 表

	α_T	α_M
せんい方向が切欠きに直角の場合	1.895	1.564
せんい方向が切欠きに平行の場合	1.403	1.243
等方性板の場合	1.556	1.333

6. 結 言

以上の結果は、切欠きの場合においても、円孔のある無限平板の場合⁽⁶⁾と同じく直交異方性板では等方性板の場合より大きい応力集中の起る可能性のあることを物語っている。ことに直交異方性板はヤング係数の大きい方向に強度メンバーとして使用されることが多いのであるが、この場合切欠き効果も大きくなって来ることは注意しなければならない。

注：—

- (1) 昭和 23 年 10 月 17 日 近畿地区学協連合講演会において講演、原稿受付 昭和 25 年 3 月 3 日。
同じ問題に関し、著者等と前後して全く独立に、東北大学久保肇教授が研究し、その成果を Phil. Mag. に投稿された。(Phil. Mag. Ser. 7 Vol XI, Sept 1949) 同教授は同じ論文を、応用力学会誌に発表予定の所、著者等のためわざわざ取消して下さったことを附記し、同教授の御好意に感謝の意を表します。
- (2), (3) 正員、大阪大学。
- (4) Neuber. H., Kerbspannungslehre.
- (5) 池田健, 直交異方性板の平面応力について 航研報告, 259 號。
- (6) 池田健, 圓孔または圓孔を有する直交異方性板の平面応力について, 日本科学文化協会誌, 昭22年8月。

534.384.2 : 534.4.014.11

厚さの一樣でない円板に不均等横荷重が加えられた場合の応力

(軸対称の場合) (第2報)⁽¹⁾

鬼 頭 史 城⁽²⁾

Stress Distribution in a Plate of Non-uniform Thickness, subject to
Non-Uniformly Distributed Transverse Load
(Case of Axial Symmetry) II.

by Fumiki KITO

We take a circular plate of external radius R , its thickness being non-uniform and varying according to the law : $h=h_0(R_1-r)/R_1$, where $R_1>R$. The transverse load acting on this plate is distributed by a linear law : $p=p_0(1+kr/R_1)$. Stress distribution in such a plate of non-uniform thickness and subject to non-uniformly distributed transverse load, has been calculated and the result was shown as numerical tables and curves.

1. 緒 言

厚さ h が半径 r について直線的に変化しているような不均等厚さの弾性円板(中心軸について対称)にやはり半径 r について一次式で表わされるような不均

等分布をした横荷重が加えられた場合に板に生ずる応力を弾性理論によって計算した。その方法は第1報の場合と同じく、ポアソン比 $\nu=1/3$ と天狗的におくことによって特殊かん数を使うことなくして解を書表わすにある。