3. ボルト頭部に対する形状係数と切欠係数との関係

第 5 表		ボルト頭部における応力集中は
a/ρ	α	前節に述べたごとくであるが、これに基いて疲れ試験に使用したボルトの形状係数を求めた結果、第 5 表のごとくになった。この値とすでに求められている β との関係
45	20.0	
15	8.0	
2.65	2.0

第 14 図

係を図示すれば第 14 図のごとくであり、 α の増加するほど、 β も増加して疲れ強さが低下することを示している。形状係数と切欠係数との関係に関する実験によれば α の増加と共に β も増加するが、ある限界(切欠底における曲率半径が小さくなった場合)に達すると β は増加しないということが示されているが、

本実験における α は、その限界の α よりかなり小さいためにこの現象を認めることはできなかったが、大体 α の増加と共に β はある値に落着かうとする傾向が見られた。

結 論

ボルト継手の疲れ強さは応力集中によって大きな影響を受けるのであるが、特にボルト頭部付根における応力集中の影響を明らかにすることができた。

実験の結果はボルト頭付根における丸みの曲率半径の影響がきわめて大きいことを示した。したがってボルト継手の設計に当っては以上の結果から形状係数 α を曲率半径の増加によって低下せしめることが必要であり、これによって疲れに対する強度を向上せしめ得ることが明らかとなった。締付力の影響は更に今後の研究にまたねばならないが、本実験において採用した値は材料の引張強さの 39 % に相当する値であった。

注：一

- (1) 昭和 24 年 10 月 15 日 關西支部講演會において講演、原稿受付昭和 25 年 1 月 16 日。
- (2) 正員、京都大學。
- (3)、(4) 准員、京都大學。
- (5) M. Het'nyi, Journ. Appl. Mech., 6, 1939, p. 151.
- (6) 石橋、九大弾研報告、4 卷 1 號、昭 22—6。

531.252 : 539.4.013.3

引張りを受ける任意切欠(回転対称)を有する丸棒における応力分布について⁽¹⁾

西 原 利 夫⁽²⁾ 藤 井 太 一⁽³⁾

Stress Distribution in a Notched Round Bar under Uniform Tension

by Toshio NISHIHARA and Taichi FUJII

We investigated the method of finding the stress distribution in a notched round bar in the case of uniform tension. We dealt with the problem using the displacement function and stresses expressed by this function. The displacement function has always to satisfy the next condition interior of the body

$$\Delta' \Delta' \Phi = 0 \left(\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right)$$

and the stress expressed by this function must be in equilibrium with the outer force acting on the boundary. From this condition, we introduced the relation between the displacement function and the boundary condition. The calculation of the displacement function and the stresses is performed by the difference method. And then we calculated the stress in a round bar with semi-circular notch whose radius is equal to that of the smallest section of the bar.

1. 緒 言

立体的な応力分布に関する研究、特に切欠のある場

合の応力に関しては Neuber の双極回転面座標による理論的研究⁽⁴⁾、石橋氏の二次元応力状態と軸対称応力

状態との関連に関する研究⁽⁵⁾, 光弾性による実験的研究, X線による表面応力の測定等をあげることができる. しかしながら理論的研究はその形状に制限を受け実験的研究は今なお, 研究の途上にあるものようである.

本論文は立体的応力問題の一分野である, 回転対称切欠をもつ棒が引張りを受ける場合の応力について理論と実験を併用して, 境界条件を満足せしめ応力分布を求める方法について考察を行ったものである.

2. 回転体における

応力と変位⁽⁶⁾

第1図に示すごとき座標軸をとり, r, φ, z 方向の変位を u, v, w , とする. この変位によって応力を表わせば次式が得られる.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{2G}{m-2} \left[(m-1) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \sigma_\varphi &= \frac{2G}{m-2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + (m-1) \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \sigma_z &= \frac{2G}{m-2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + (m-1) \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \tau_{\varphi z} &= G \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \tau_{rz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \tau_{r\varphi} &= G \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

第1図

ただし m ; ポアソン逆比

G ; 横弾性係数

(1) によって表わされた応力は物体内部において次の平衡条件を満足しなければならない.

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + F_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{r} F_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z &= 0\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし, F_r, F_φ, F_z は物体力である.

(1) を (2) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned}G \left(\Delta' u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + F_r &= 0 \\ G \left(\Delta' v - \frac{v}{r^2} \right) + F_\varphi &= 0 \\ G \left(\Delta' w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} \right) + F_z &= 0\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし $\Delta' = \partial^2 / \partial z^2 + (1/r) \partial / \partial r + \partial^2 / \partial r^2$

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

(3) は変位 u, v, w が物体内部において満足すべき条件を示すものである. さて, 今問題とするのは軸対称応力の場合であるから $v=0$ であって, $F_r=F_z=0$ とすると, (3) は次式となる.

$$\Delta' u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{u}{r^2} = 0, \quad \Delta' w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

次に u, w を

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2 \frac{m-1}{m-2} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - 2 \frac{m-1}{m-2} \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi)}{\partial r} \dots\dots\dots (5)$$

と置けば (4) は

$$\left(\Delta' - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0, \quad \Delta' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi)}{\partial r} \right) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

となる. そこで

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \psi = - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \dots\dots\dots (7)$$

とおけば (6) は $\Delta' \Delta' \Phi = 0$ (8)

となる. Φ は変位かん数と云われるものであって, これによって応力を表わせば

$$\left. \begin{aligned}\sigma_r &= \frac{2G}{m-2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta' \Phi - m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{2G}{m-2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta' \Phi - \frac{m}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \\ \sigma_z &= \frac{2(2m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta' \Phi - \frac{m}{2m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{rz} &= \frac{2(m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta' \Phi - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

3. 境界条件

前節において述べた変位かん数は (8) の条件を満足すると同時に, 変位かん数によって表わされた応力は

境界において外力と平衡していなければならない. 第2図において p を外力, λ, μ をその作用する方向の方向余弦とする. s は面に沿う方向, n は法線方向を示し, α, β をその方向余弦とすると

第2図

境界において次の関係が成立しなければならない.

$$p\lambda = \sigma_r \alpha + \tau_{rz} \beta, \quad p\mu = \sigma_z \beta + \tau_{rz} \alpha \dots\dots\dots (10)$$

ただし $\alpha = \frac{dz}{ds}, \beta = - \frac{dr}{ds}$

(9) を (10) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} p\lambda &= \frac{2G}{m-2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta' \Phi - m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \frac{dz}{ds} + \frac{2(m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta' \Phi - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \left(-\frac{dr}{ds} \right) \\ p\mu &= \frac{2(m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta' \Phi - \frac{m}{2m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \left(-\frac{dr}{ds} \right) + \frac{2(m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta' \Phi - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \frac{dz}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(a) 自由境界における条件 自由境界においては外力が作用しないのであるから,

$$p\lambda = 0, \quad p\mu = 0 \quad (12)$$

である。(11) の第 1 式を少し書きかえて

$$\begin{aligned} p\lambda &= \frac{2G}{m-2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta' \Phi - m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \frac{dz}{ds} \\ &+ \frac{2(m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta' \Phi - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \left(-\frac{dr}{ds} \right) \\ &+ \frac{2(m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta' \Phi - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \left(-\frac{dz}{ds} \right) \\ &+ \frac{2(m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta' \Phi - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \frac{dz}{ds} \\ &= \frac{2m}{m-2} G \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Delta' \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} \frac{dz}{ds} \\ &- \frac{2(m-1)}{m-2} G \frac{d}{ds} \left(\Delta' \Phi - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{2m}{m-2} G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{dz}{ds} \\ &- \frac{2(m-1)}{m-2} G \frac{d}{ds} \left(\Delta' \Phi - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \dots \quad (13) \end{aligned}$$

(12) より境界では $p\lambda = 0$ であることを考慮して,

(13) を境界に沿うて (s に関して) $0 \rightarrow s$ まで積分すれば

$$\begin{aligned} [\text{const}]_1 &= \frac{2m}{m-2} G \int_0^s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \alpha ds \\ &- \frac{2(m-1)}{m-2} G \left[\Delta' \Phi - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]_0^s \end{aligned} \quad (14)$$

(14) の第 1 項は

$$\frac{2m}{m-2} G \left\{ \int_0^s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \alpha ds + \int_0^s \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} \alpha ds \right\} \quad (15)$$

しかるに (5) より

$$u = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} - 2 \frac{m-1}{m-2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} = -\frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \quad (16)$$

$$\text{したがって} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{m-2}{m} \int_0^{(z)s} u dz \quad (17)$$

(16), (17) を (15) に代入すれば

$$\begin{aligned} [\text{第 1 項}] &= 2G \left[\int_0^s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \left\{ -\int_0^{(z)s} u dz \right\} \alpha ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^s \frac{1}{r} u \alpha ds \right] \quad (18) \end{aligned}$$

次に第 2 項は $\Delta' \Phi = \Theta$ (19)

$$\text{とおけば} \quad -\frac{2(m-1)}{m-2} G \left[\Theta - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]_0^s \quad (20)$$

すでに用いた関係より

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} - 2 \frac{m-1}{m-2} \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi)}{\partial r} \\ \Theta &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi)}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(21) より $\partial \Phi / \partial z$, すなわち $\partial \Phi^2 / \partial z^2$ を求めると

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{m-2}{m} \left\{ w - 2 \frac{m-1}{m-2} \Theta \right\} \quad (22)$$

$$\text{したがって} \quad [\text{第 2 項}] \rightarrow -G \left[\frac{2(m-1)}{m-2} \Theta - 2w \right]_0^s \quad (23)$$

(18), (23) により (14) は次のごとくなる.

$$\begin{aligned} [\text{const}]_1 &= -2G \left[\int_0^s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \left\{ \int_0^{(z)s} u dz \right\} \alpha ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s \frac{u}{r} \alpha ds \right] - 2G \left[\frac{m-1}{m-2} \Theta - w \right]_0^s \quad (24) \end{aligned}$$

第 2 項の $s=0$ における値を $[\text{const}]_1$ に等しからしむれば, 結局 Θ の境界値として次式が得られる.

$$\begin{aligned} \Theta_s &= \frac{m-2}{m-1} \left[w_s + \int_0^s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \left\{ \int_0^{(z)s} u dz \right\} \alpha ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s \frac{u}{r} \alpha ds \right] \quad (25) \end{aligned}$$

なお, 第 2, 3 項は第 1 項に比し小であるので近似的に $\Theta_s = (m-2)/(m-1) w_s$ (26) となる.

・(b) 一様引張りの作用する境界における条件 一様引張りの作用する位置, すなわち切欠から離れた所では $\sigma_r = \sigma_\varphi = \tau_{rz} = 0$, $\sigma_z = \text{const.}$ (27)

であり, この応力に対応する変位かん数は

$$\Phi = \left(z^3 + \frac{3}{m-2} z r^2 \right) \gamma_0 \quad (28)$$

$$\text{であり, } \gamma_0 = \frac{(m-2)^2}{6(m-4)(m-1)} \frac{w}{z} \quad (29)$$

$$\text{とすれば} \quad \Delta' \Phi = \frac{m-2}{m-1} w$$

となる.

4. 境界条件を満足する解について

すでに述べたごとく変位かん数 Φ によって変位および応力を表わすことができたが, この変位かん数 Φ が応力問題の解であるためには

$$\Delta' \Delta' \Phi = 0$$

および, Φ より導かれる応力が, 境界における外力との平衡条件を満足しなければならない. しかしこれ等の条件を満足する完全解を任意形状に関して数学的に導き応力を求めることは相当困難を伴うことであるので, ある境界条件, たとえば切欠棒がその対称軸方向に一様な引張りを受けた場合; その除件の下に生ず

る変形は、かかる応力問題の解であることよりこの変形と変位と変位かん数との関係を第3節に述べたとき方法によって結びつけ、 $\Delta'\Phi$ すなわち Θ の境界値を決定して Θ の分布を述べ、更にこれより Φ の分布を求めるという方法を採用した。

(a) $\Delta'\Phi (= \Theta)$ 分布の計算 Θ はすでに述べた所により

$$\Delta'\Phi = 0$$

なる条件を満たすと同時に、第3節に述べた所より境界上において変位によって与えられるごとき境界値を取らなければならない。すなわち与えられた境界値を持ち $\Delta'\Phi = 0$ を満足するかん数 Θ を求めればよい。境界の形状が任意形状である場合、 Θ 分布の計算は*

第4図

$$\Theta(r_0, z_0)$$

$$= \frac{1}{h_1 + h_2} \left\{ \frac{\Theta(r_0 + h_1, z_0)}{h_1} + \frac{\Theta(r_0 - h_2, z_0)}{h_2} \right\} + \frac{1}{h_1' + h_2'} \left\{ \frac{\Theta(r_0, z_0 + h_1')}{h_1'} + \frac{\Theta(r_0, z_0 - h_2')}{h_2'} \right\} + \frac{1}{r_0} \frac{\Theta(r_0 + h_1, z_0)}{h_1} \\ = \frac{1}{\frac{1}{h_1 h_2} + \frac{1}{h_1' h_2'} + \frac{1}{r_0 h_1}} \left\{ \frac{\Theta(r_0 + h_1, z_0)}{h_1} + \frac{\Theta(r_0 - h_2, z_0)}{h_2} + \frac{\Theta(r_0, z_0 + h_1')}{h_1'} + \frac{\Theta(r_0, z_0 - h_2')}{h_2'} + \frac{\Theta(r_0 + h_1, z_0)}{r_0} \right\} \quad (31)$$

なお、一様引張りの作用する、切欠から離れた所では Θ は r に関して一定となる。

(b) Φ 分布の計算 物体内部における応力を計算するためには変位かん数 Φ の分布を知らなければならない。しかるに Φ の値は境界において与えられていない。そこで条件として対称軸 z 方向の力のつり合いを考え、これが各断面において満足されるように Φ *

$$\Phi(r_0, z_0) = \frac{\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) \Phi(r_0 + h, z_0) + \Phi(r_0 - h, z_0) + \Phi(r_0, z_0 + h) + \Phi(r_0, z_0 - h) - h^2 \Theta(r_0, z_0)}{4 + \frac{h}{r_0}} \quad (33)$$

曲線境界に対しては

$$\Phi(r_0, z_0) = \frac{1}{h_1 + h_2} \left(\frac{\Phi(r_0 + h_1, z_0)}{h_1} + \frac{\Phi(r_0 - h_2, z_0)}{h_2} \right) + \frac{1}{h_1' + h_2'} \left(\frac{\Phi(r_0, z_0 + h_1')}{h_1'} + \frac{\Phi(r_0, z_0 - h_2')}{h_2'} \right) + \frac{\Phi(r_0 + h_1, z_0)}{r_0 h_1} - \Theta(r_0, z_0) \\ = \frac{1}{\frac{1}{h_1 h_2} + \frac{1}{h_1' h_2'} + \frac{1}{r_0 h_1}} \left\{ \frac{\Phi(r_0 + h_1, z_0)}{h_1} + \frac{\Phi(r_0 - h_2, z_0)}{h_2} + \frac{\Phi(r_0, z_0 + h_1')}{h_1'} + \frac{\Phi(r_0, z_0 - h_2')}{h_2'} + \frac{\Phi(r_0 + h_1, z_0)}{r_0 h_1} - \Theta(r_0, z_0) \right\} \quad (34)$$

以上の計算は数回繰返してその値に変動がなくなるまで反復せねばならない。

5. 応力分布の計算

応力分布は Φ の分布が知られると直ちに計算することができる。すなわち Φ による応力計算式を再記

*階差法によって行うことができる。

$$\Delta'\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0$$

第3図

第3図に示すごとく区間を h として、上式を満足する Θ を階差式によって示せば

$$\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) \Theta(r_0 + h, z_0) + \Theta(r_0 - h, z_0) + \Theta(r_0, z_0 + h) + \Theta(r_0, z_0 - h) - \left(4 + \frac{h}{r_0}\right) \Theta(r_0, z_0) = 0 \quad (30)$$

したがって

$$\Theta(r_0, z_0) = \frac{\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) \Theta(r_0 + h, z_0) + \Theta(r_0 - h, z_0) + \Theta(r_0, z_0 + h) + \Theta(r_0, z_0 - h)}{4 + \frac{h}{r_0}} \quad (31)$$

特に曲線境界においては(第4図)、砂谷、根来氏の方法によって次の計算式が得られる。

* の分布を選ぶこととする。

したがって Φ の境界値として z 軸上に適当な Φ の分布を与え、これより σ_z を求めて、上記の条件を満足するまで Φ の分布 (z 軸上の) を逐次修正して行くようにする。 Φ の計算式を(a)の場合と同様に階差式によって示せば次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{m-2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Theta - m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{2G}{m-2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Theta - \frac{m}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{2(2m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial z} \left(\Theta - \frac{m}{2m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{rz} &= \frac{2(2m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial r} \left(\Theta - \frac{m}{2m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

応力は Φ より計算すればすべて求められるのであるが、 $\Delta' \Phi$ すなわち Θ より計算することができれば、非常に便利であるが、これは次のものである。

(a) 主応力 直交三方向の応力の和は主応力に等しい。すなわち

$$\sigma_r + \sigma_\phi + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma$$

$$\text{とすれば } \sigma = \frac{2(m+1)}{m-2} G \frac{\partial \Theta}{\partial z} \dots\dots\dots (36)$$

(b) 最小断面上の応力分布 最小断面上の応力は最小断面に関して上下対称形の場合、すなわち最小断面上にて $\tau_{rz} = 0$ なる場合簡単に計算することができる。すなわち $\tau_{rz} = 0$ より

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\Theta - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0$$

これを r に関して積分し、 z について微分すれば

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\Theta - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (f(z))$$

$f(z)$ は r に無関係な z のみのかん数である。この式と σ_z の式より $\partial^2 \Phi / \partial z^2$ を消去すれば

$$\sigma_z = \frac{2m}{m-2} G \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{2(m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial z} \{ f(z) \} \dots\dots\dots (37)$$

6. 物体表面変位の測定について

第3節において述べたごとく、 Θ の境界値を得るためには表面における対称軸方向の変位 (w_s) を測定せねばならない。また変位の測定は切欠のごとき曲面について行わねばならないので普通使用されているひずみ計を用いることができない。そこで標点距離を任

第 5 図

第 6 図

意に変え、しかも曲面について測定を行うことができるような装置を試作した。第5図は装置の外観を示すものであり、第6図はその細部を示したものである。装置の主要部は第5図において示したA、B2個のリングと鏡E、これを支持するわくC、ばねD、およびBに固定されて、鏡Eの回転軸を一巻きしてばねに結びつけられている糸Fであって、荷重が作用して生ずるA、B間の相対的変位を鏡の回転にかえて、望遠鏡によって鏡の回転角を測定するものである。倍率は次式から求められる。

$$[\text{倍率}] = \frac{s}{\delta} = 2 \frac{l}{r}$$

ただし、 s は尺度の読み mm

δ は試験片の標点間の変位 mm

l は鏡の中心より標尺までの距離 mm

r は鏡の回転軸の糸を巻きつけた部分の半径である mm。

本装置においては $r = 0.6 \text{ mm}$ であるから $l = 1 \text{ m}$ とすれば倍率は標尺上の読みが $1/5 \text{ mm}$ まで正確に読まれるものとすれば大体 16 700 倍となり、非常に高い倍率が得られる。しかし実際には鏡回転軸の部分の摩擦、糸の延伸等がある、この値より低下したものとなる。

7. 半円切欠を有する丸棒に対する応用

前節までに述べた方法の実験的応用として、半円の軸対称切欠を有する軟鋼丸棒における応力分布を求めた。まず表面における軸方向の変位を測定するために第7図に示すごとく試験片を製作し、第6節において述べた装置によって表面変位の測定を行った。第8図は荷重 1 500 kg の下における表面変位の測定結果である。この測定値を Θ の境界値として与えれば、内部の Θ 分布を計算し得ることはすでに述べた所で

第7図

第8図

あり, 第9図は階差法によって θ 分布を計算した結果である. 更に円部の応力を計算するためには θ の分布を求めなければならない. そのために, $r=0$ すなわち z 軸上に応力集中が起っていないと考えた場合の θ の値を与えて, これに基づいて θ の分布の計算を行った. 第10図はその計算結果であり, これより σ_z を求めると第11図に示すごとくになる. またこの結果より求められた形状係数は 1.57 であった.

以上の計算は第1次近似であって, その中に含まれる誤差は, 自由境界にて r 方向の変位に関

する項を省略したためのものである. したがってこの方法の精度を向上せしめるために

第9図

第10図

は, 以上の三つの点を考慮して反復修正を行えばよい.

8. 結論

軸対称切欠が, その対称軸方向に引張りを受けた場合の応力を求める方法について考察を行った. 従来この種の問題は境界条件を満足せしめることが困難であるために余り研究されていない. 本論文はこの難点を実験によって解決せんとしたもので, 計算例として半円切欠棒の

第11図

場合をとり、その応力分布を求めた。本方法はその精度に関してなお検討を要する点があるのであるが、その誤差は逐次小ならしめ得るものである。

注：—

(1) 昭和 25 年 4 月 8 日 第 27 期定時總會講演會において講演。

原稿受付 昭和 25 年 7 月 10 日。

(2) 正員、京都大學。

(3) 准員、京都大學。

(4) H. Neuber "Kerbspannungslehre"

(5) 石橋、九大弾性工學研究所報告、4 卷 1 號、昭 22—6。

(6) 本節における取り扱い は 倉西、弾性學、95~98 頁による。

539.385

軸のねじり問題の一般解法について (第 3 報)⁽¹⁾

大 久 保 肇⁽²⁾

On the General Solution of the Torsion Problem of a Cylinder (3rd Report)

by Hajimu OKUBO

The object of the paper is to find a solution for the torsion problem of a shaft with longitudinal notches. Formerly, Shepherd obtained a solution for a circular section with one notch and that with two, using elliptic functions. In the way employed by him, calculations become very troublesome. We find a solution for a shaft with m notches in a simple form, using elementary functions.

As an application of the solution, we introduced an approximate solution for a circular section with shallow notches of any form.

長手方向の切欠を有する円柱のねじり問題については今までに二、三の研究が発表されている。Weber は柱の横断面を表わす円周上に中心を有する半円弧状の切欠 1 個を有する円柱の解を簡単な初等かん数を用いて求めている⁽³⁾。また同種類の問題を取り扱った研究としては、切欠の数が 1 個および 2 個の場合を解いた Shepherd の論文がある⁽⁴⁾。切欠の形状は切欠の数が 1 個の場合には柱の横断面周辺を表わす円周と直交する円弧であり⁽⁵⁾、切欠の数が 2 個の場合には近似的な円弧である。Shepherd はこの問題を解くに当たってだ円かん数を用いているので、実際に計算を行う際には かん数を級数に展開して行うのであるから、その数値計算はすこぶる煩雑である。数個の半円弧状の切欠を有する軸は一種のスプライン軸として実用に供されているが、この種の軸のねじり問題に対する適当な解法はいまだ発見されていないようである。しかるに著者は任意の個数の半円弧状の切欠を有する円柱のねじり問題に適用できる解をきわめて簡単な初等かん数の形で求めることができたのでここに報告することにする。

第 1 図

今切欠の数を m とし、内周および外周の半径をそれぞれ r_0, r_1 とする。第 1 図に示す

ごとく外周上にては、等間隔に置かれた m 個の部分で かん数 ϕ が一様な値を取り、それ以外の点では 0 になるものとする。 ϕ が一様な値 p を取る部分の含む中心角を $2h$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} r=r_1 \text{ にて } \phi &= p, \quad \frac{2k\pi}{m} + h > \theta > \frac{2k\pi}{m} - h, \\ &= 0, \quad \frac{2(k+1)\pi}{m} - h > \theta > \frac{2k\pi}{m} + h, \end{aligned} \right\}$$

ここに $k=0, 1, 2, \dots, m-1$.

これを变形すれば

$$r=r_1 \text{ にて } \phi = \frac{mhp}{\pi} + \frac{2p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nmh}{n} \cos nm\theta,$$

次に $2hpr_1 = P$, と置いて h を 0 に近づければ

$$r=r_1 \text{ にて } \phi = \frac{Pm}{\pi r_1} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nm\theta \right) \dots (1)$$

また内周上にては $\phi - \frac{r^2}{2}$ は一定であるから、更に

$r=r_0$ にて $\phi = \text{一定}$,

なる関係を満足する必要がある。

かん数 ϕ は平面調和かん数であるから、(1) および (2) の臨界条件を同時に満足するためには

$$\phi = \frac{Pm}{\pi r_1} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r^{nm} - r_0^{2nm} r^{-nm})}{(r_1^{nm} - r_0^{2nm} r_1^{-nm})} \cos nm\theta \right\} \dots (3)$$

$r=r_0$ が内周、 $r=r_1$ が外周を表わす場合には $r_1 > r > r_0$, したがって今計算の便宜上 $r_1=1$ と置けば $1 > r > r_0$, なる関係が成立する。(3) において $r_1=1$ と置