532.542.2

圧力こう配が非定常の円管内層流の理論⁽¹⁾伊 藤 英 覚⁽²⁾

Theory of Laminar Flow through a Pipe with Non-Steady Pressure Gradients

by Hidesato Ito

In this report next three cases were solved under the assumptions that the flow is laminar and the compressibility effects of the fluid can be neglected.

(1) When the pressure gradient given to the pipe begins to increase or decrease in proportion to the time.

(2) When the pressure gradient changes instantaneously.

(3) When the pressure gradient begins damped oscillations. (including exponential damping and harmonic oscillations as special cases).

For each case the velocity distribution in the pipe and the discharge per unit time were found, and the transient state of the flow was also explained.

From these three examples mentioned above, it was shown that the flow differs widely from that of Poiseuille when non-steady pressure gradients were given along the axis of the pipe.

1. 緒 言

ここで取り扱っているのは円管内の流れであるが、その圧力こう配が時間的に変化するような場合についてである。具体的に例をあげるならば、水そうの水位が時間と共に上昇もしくは降下しつつある場合における水そうの下端に取り付けた管内の流れとか、もしくは管の両端に加えられた圧力差が時間の経過とともに脈動するような場合などこれである。かくのごとく圧力こう配が時間的に変化する管内の流れはわれわれがしばしば経験するところであるが、これらの流れに関し粘性を考慮に入れた理論的研究は比較的少いように考えられる。

ここで取り扱う二三の例に示されるように、圧力こう配が時間的に急激に変化するような過渡的な現象を取り扱うには演算子法が適当しているので、ここではもつぱらこの方法により、いずれも比較的簡単に解を求めることに成功した。

2. 基礎方程式

円管の中心軸の流れの方向に x 軸をとり、半径方向に動径 r をとる。円管の半径を a とする。もし流入口よりの距離がその直径に比べて十分に大なる位置を考えれば管軸方向の速度成分は一定となり、 r 方向には速度成分は持たぬとしてよい。なお圧力変動に伴う流体の圧縮性は無視できる場合を取り扱うことにする。運動の方程式は、 x 軸方向の速度を u とすれば、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \dots (2.1)$$

演算子 $p \int_0^\infty e^{-pt} [\dots] dt$ を施したものを横棒を付し

てたとえば $\bar{u}$ のごとく表わせば、(2.1) は

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{p}{\nu} \bar{u} = -\frac{1}{\nu} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \dots (2.2)$$

$\partial p / \partial x$ は半径 r に無関係と考えられるから、この方程式の解は A, B を常数として

$$\bar{u} = A J_0(i\sqrt{p/\nu} r) + B Y_0(i\sqrt{p/\nu} r) + \frac{1}{p} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \dots (2.3)$$

境界条件を満足するように係数をきめると、 $\bar{u}$ は

$$\bar{u} = -\frac{1}{p} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot \frac{J_0(i\sqrt{p/\nu} r)}{J_0(i\sqrt{p/\nu} a)} + \frac{1}{p} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \dots (2.4)$$

与えられた圧力変動 $\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$ に対応して、管内の速度分布 u は (2.4) に Mellin の逆変換を行うことによつて求められる。

3. 圧力こう配が時間に比例して増加または減少するとき

時間 $t < 0$ において管に加えられた圧力こう配は一定であつたとする。

第1図

一定であつたとする。 $t=0$ の瞬間から圧力こう配が時間に比例して増加または減少し始めたとする。このときの管内の流れの状態をしらべることにしよう。具体的には、水そうの下部に取り付けた円管から水が流出しており

このとき円管からの流出による水そうの水位の変化は無視しうるものとする。・ $t=0$ の瞬間から毎秒一定量の水を水そうに供給し（または水そうからくみ出し）はじめ、その結果水そうの水位が時間に比例して上昇もしくは降下しはじめたとする。このとき水そうの下部に取り付けた円管内の流れはどのように変化するであろうか？ 圧力こう配は

$$\left. \begin{array}{l} t < 0 \text{ において } -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta \\ t \geq 0 \text{ において } -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha t + \beta \end{array} \right\} \dots (3.1)$$

ここに $\alpha > 0$ は水位の上昇する場合であり、 $\alpha < 0$ は水位の降下する場合である。この条件を満足する解を求めるには最初圧力こう配が

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha t, (t \geq 0) \dots (3.2)$$

に対する解 u_1 を求めておき、これに $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta$ なる定常状態の解 u_2 を加えればよい。(3.2) の演算子形は $\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\alpha}{p}$ であるから、(2.4) に Mellin の逆変換を施すと

$$u_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z \left[-\frac{\alpha}{z^2} \times \frac{J_0(i\sqrt{z/\nu} r)}{J_0(i\sqrt{z/\nu} a)} + \frac{\alpha}{z^2} \right] dz$$

積分路を適当にえらんで積分すると

$$u_1 = \frac{\alpha t}{4\nu} (a^2 - r^2) - \frac{\alpha}{64\nu^2} (a^2 - r^2)(3a^2 - r^2) + \frac{2a^4\alpha}{\nu^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t/a^2) J_0(\alpha_n r/a)}{\alpha_n^5 J_1(\alpha_n)} \quad (3.3)$$

となる。ここに α_n は $J_0(x)=0$ の根で、小さい方から順に $n=1, 2, \dots$ とする。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta$$

なる定常状態の解 u_2 は

$$u_2 = \frac{\beta}{4\nu} (a^2 - r^2) \dots (3.4)$$

したがって (3.1) で与えられる圧力変化に対しては、管内の速度分布は $u = u_1 + u_2$ として

$$u = \frac{1}{4\nu} (\alpha t + \beta)(a^2 - r^2) - \frac{\alpha}{64\nu^2} (a^2 - r^2)(3a^2 - r^2) + \frac{2a^4\alpha}{\nu^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t/a^2) J_0(\alpha_n r/a)}{\alpha_n^5 J_1(\alpha_n)}, (t \geq 0) \dots (3.5)$$

(3.5) は $t=0$ のとき

$$u = \frac{\beta}{4\nu} (a^2 - r^2)$$

となり、初期条件を満足している。(3.5) の第 3 項は圧力こう配が突然に変化しはじめたことによる過渡的な状態の変化を示す項で、時間がたつと急激に 0 に近づく。したがって適当な時間を経過した後は速度 u

は

$$u \cong \frac{1}{4\nu} (\alpha t + \beta)(a^2 - r^2) - \frac{\alpha}{64\nu^2} (3a^2 - r^2)(a^2 - r^2) \dots (3.6)$$

で表わされるようになる (第 2 図参照)。

ここで注目すべきは、圧力差が時間に比例して増加または減少しているような場合には、たとえ時間が十分に経過した後でも流れは Poiseuille の流れとは異なっていることである。すなわち、もしも Poiseuille の流れがそのまま成立しているとするならば管内の速度は

$$u = \frac{1}{4\nu} (\alpha t + \beta)(a^2 - r^2)$$

であるべきであるにもかかわらず、本当の流れは (3.6) で与えられている。すなわち (3.6) の第 2 項だけ Poiseuille の流れとは異なっている。次に流量 Q は (3.5) から

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\nu} (\alpha t + \beta) - \frac{\alpha \pi a^6}{48\nu^2} + \frac{4\alpha \pi a^6}{\nu^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^6} \cdot \exp(-\alpha_n^2 \nu t/a^2) \dots (3.7)$$

最初の流量 (すなわち $-\partial p/\partial x = \beta$ のときの) を Q_s とすれば、

$$Q_s = \beta \pi a^4 / 8\nu \dots (3.8)$$

、第 2 図に $|a^2/\nu\beta| = 1.5$ の場合に、流量比 Q/Q_s が時

第 2 図 流量比 Q/Q_s と時間 t との関係

間と共にどのように変化するかを時間 t を横軸にとつて示す。流量は図の曲線 ABC もしくは ADE であらわされる。もしも各瞬間で Poiseuille の流れが成立しているとするならば、流量は直線 $AB'C'$ または $AD'E'$ であらわされるはずである。つまり水位の上昇しつつあるときには流量はより少く、水位の降下しつつあるときにはより多いのである。

4. 圧力こう配が突然に変化するとき

(1) 時間 $t < 0$ において圧力こう配が

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta_0$$

であつたものが、時間 $t \geq 0$ において突然に

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta_1$$

に変化したとする。このときの $t \geq 0$ における流れの変化をしらべることにしよう。具体的には管の一端に加えられた圧力が突然に増加または減少したことを意味する。実際に計算を行うには

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta_1 - \beta_0$$

なる圧力こう配が突然に与えられたときに静止から動きはじめる流れ u_1 を求め、これに

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta_0$$

なる Poiseuille の流れを加えておけばよい。求める解は結局

$$u = \frac{\beta_1}{4\nu} (a^2 - r^2) - \frac{2a^2(\beta_1 - \beta_0)}{\nu} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) J_0(\alpha_n r / a)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \quad (4.1)$$

となる。ここに α_n は $J_0(x) = 0$ の根を小さい方から順に $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ とする。(4.1) は $t=0$ のとき

$$(u)_{t=0} = \frac{\beta_0}{4\nu} (a^2 - r^2)$$

となり、初期条件を満足していることがわかる。(4.1) から流量 Q を求めると、

$$Q = \frac{\beta_1 \pi a^4}{8\nu} - \frac{4\pi a^4(\beta_1 - \beta_0)}{\nu} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4} \exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) \quad (4.2)$$

(4.1); (4.2) の第2項は時間の経過とともにすみやかに0に近ずき、圧力こう配

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta_1$$

に対する Poiseuille の流れと一致するようになる。この定常状態に達して後の平均流速を U , 流量を Q_s とすれば、

$$U = \beta_1 a^2 / 8\nu, \quad Q_s = \beta_1 \pi a^4 / 8\nu \quad (4.3)$$

第3図に水位が突然に2倍に増加したときの ($\beta_1 = 2\beta_0$), 円管内速度分布の変動状態を示す。

(2) 以上の解で特に $\beta_0 = 0$ とおけば、静止から突然に流れの始まる場合、すなわち水そうの水が円管をとほして流出し始めた場合に相当する。このときは(4.1)

(4.2) で $\beta_0 = 0$ とおけばよい。すなわち

$$u = \frac{\beta_1}{4\nu} (a^2 - r^2) - \frac{2a^2\beta_1}{\nu} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) J_0(\alpha_n r / a)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \quad (4.4)$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) J_0(\alpha_n r / a)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \quad (4.4)$$

第3図 圧力こう配が突然に増加したときの円管内速度分布の時間的経過 (図は $2\beta_0 = \beta_1$ のとき)

$$Q = \frac{\beta_1 \pi a^4}{8\nu} - \frac{4\pi a^4 \beta_1}{\nu} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4} \exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) \quad (4.5)$$

また定常状態に達して後の平均流速 U , 流量 Q_s を使つてあらわすと、

$$\frac{u}{U} = 2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) J_0(\alpha_n r / a)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \quad (4.4')$$

第4図 静止から流れが始まるときの流量 Q と時間 t の関係

$$\frac{Q}{Q_s} = 1 - 32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4} \exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) \dots (4.5')$$

(4.5') を第 4 図に示す。(4.4) は Szymanski も求めている⁽³⁾。次に流れが開始されてから定常状態に達するまでの時間を求めよう。流量比 Q/Q_s が 0.99 になったときをもつて定常状態に一応到達したものと考え、これまでに要する時間を t_s とすれば第 4 図から直ちに

$$t_s = 0.8 a^2 / \nu \dots (4.6)$$

であることがわかる。たとえば流体が水であるとすれば $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ で、このときの管の半径 $a = 0.5 \text{ cm}$ とすれば所要時間 $t_s = 20 \text{ 秒}$ となる。また半径 $a = 0.1 \text{ cm}$ ならば $t_s = 0.8 \text{ 秒}$ となる。ただし、これらの場合に圧力差は適当に小さくて層流が保たれているとした。

5. 圧力こう配が減衰振動をなすとき

これからさきと趣きをかえて、圧力こう配が時間の経過とともに減衰振動を始める場合を取り扱う。圧力こう配は時間 $t \geq 0$ において次式で与えられる。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = e^{-kt} (\alpha \cos \lambda t + \beta \sin \lambda t) \dots (5.1)$$

周期を T とすれば $T = 2\pi/\lambda$ 。流体は $t < 0$ において静止の状態にあり、 $t = 0$ の瞬間から流れが開始されるものとする。

(1) まず圧力こう配が

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha e^{-kt} \cos \lambda t \dots (5.2)$$

で与えられたときの管内の速度分布 u_1 を求めよう。

(2.4) から

$$\begin{aligned} u_1 = & -\alpha \frac{(p+k)J_0(i\sqrt{p/\nu}r)}{[(p+k)^2 + \lambda^2]J_0(i\sqrt{p/\nu}a)} \\ & + \alpha \frac{(p+k)}{[(p+k)^2 + \lambda^2]} \dots (5.3) \end{aligned}$$

であるから Mellin の逆変換を行えば、

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{\alpha e^{-kt}}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \cos(\lambda t - \theta_0) \\ & - \frac{\alpha e^{-kt} M_r}{\sqrt{k^2 + \lambda^2} M_a} \cos(\lambda t + \theta_r - \theta_a - \theta_0) \\ & + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) \cdot (k - \alpha_n^2 \nu / a^2) J_0(\alpha_n r / a)}{\alpha_n [(k - \alpha_n^2 \nu / a^2)^2 + \lambda^2] J_1(\alpha_n)} \dots (5.4) \end{aligned}$$

となる。ここに

$$\left. \begin{aligned} J_0(i\sqrt{z_1/\nu}a) &= M_a \exp(i\theta_a), \\ J_0(i\sqrt{z_2/\nu}a) &= M_a \exp(-i\theta_a), \\ J_0(i\sqrt{z_1/\nu}r) &= M_r \exp(i\theta_r), \\ J_0(i\sqrt{z_2/\nu}r) &= M_r \exp(-i\theta_r), \\ z_1 &= -k + i\lambda = r_0 \exp(i\theta_0), \\ z_2 &= -k - i\lambda = r_0 \exp(-i\theta_0) \end{aligned} \right\} \dots (5.5)$$

であり、 α_n は $J_0(r) = 0$ の根で小さい方から順に $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ とする。(5.4) は $t = 0$ で $u_1 = 0$ となり、初期条件を満足する。(5.4) の右辺第 3 項は管内の流れが $t = 0$ から急に始まったことに対応する過渡的な状態を表わし、時間が経過すればすみやかに 0 に近づく。

(5.4) は方程式 (2.1) の厳密な解である。この流れの性質をこれから少し立ち入ってしらべよう。

a) 速度分布 まず $a^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2} / \nu$ が小さければベッセルかん数を級数に展開して最初の項だけにとどめれば、

$$\frac{M_r}{M_a} = 1 - \frac{1}{4} (a^2 - r^2) \frac{r_0}{\nu} \cos \theta_0$$

等々となるから、(5.4) は

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{\alpha}{4\nu} e^{-kt} (a^2 - r^2) \cos \lambda t - \frac{2\alpha a^2}{\nu} \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) \cdot J_0(\alpha_n r / a)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \dots (5.6) \end{aligned}$$

となる。(5.6) の第 2 項は時間がたてばすみやかに 0 となり、多少時間が経過した後には

$$u_1 \cong \frac{\alpha}{4\nu} e^{-kt} (a^2 - r^2) \cos \lambda t$$

となる。このことは λ が小さく、したがって振動の周期が長い場合には、速度分布は放物線状—すなわち、(5.2) の圧力こう配に対応する Poiseuille の流れが瞬間々々でそのまま成立していること、そして圧力変動と同一の周期で左右への流れを振動的に繰り返していることがわかる。

これと反対に $a^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2} / \nu$ が大きいときには、流れは大部分その趣きが変わってくる。ベッセルかん数をその漸近表示で置換えると、(5.4) は次のようになる。

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{\alpha e^{-kt}}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \cos(\lambda t - \theta_0) \\ & - \alpha \sqrt{\frac{a}{r(k^2 + \lambda^2)}} e^{-kt - (a-r)\sqrt{r_0/\nu} \cos \frac{\theta_0}{2}} \\ & \times \cos \left[\lambda t - (a-r) \sqrt{\frac{r_0}{\nu}} \sin \frac{\theta_0}{2} - \theta_0 \right] \\ & + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) (k - \alpha_n^2 \nu / a^2) J_0(\alpha_n r / a)}{\alpha_n [(k - \alpha_n^2 \nu / a^2)^2 + \lambda^2] J_1(\alpha_n)} \dots (5.7) \end{aligned}$$

いま λ が k に比し大でありかつ $a^2 k / \nu$ が α_1^2 に比して小ならば、(5.7) の第 3 項は比較的すみやかに 0 となり（このことは静止からはじまる過渡的な流れがすみやかに減衰することを示す）、流れは右辺の第 1 項、第 2 項だけで表わされるようになる。ところが第 2 項は管壁 $r = a$ の極く近くを除いては急激に 0 に近づいてしまう。したがって壁の極く附近では速度は急に 0 に落ち、それ以外の場所では流速は

$$u_1 = \frac{\alpha e^{-kt}}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \cos(\lambda t - \theta_0)$$

で表わされ、これは半径 r に無関係である。

このことは λ が大, すなわち振動の周期が短かければ管内はほぼ一様な速度分布となり, 管壁附近で急に 0 に落ちる (すなわち境界層の成立). そして, 全体として (5.2) の圧力変化と同一の周期で左右への流れを振動的に繰り返していることがわかる. ただしこのとき速度変動は圧力変動と θ_0 なる位相のずれがあることに注意しておこう.

b) 流量 次に流量 Q_1 の時間的変化をしらべよう. (5.3) から

$$Q_1 = -\frac{2\pi a \alpha \sqrt{\nu} (p+k) J_1(i\sqrt{p/\nu} a)}{i\sqrt{p} [(p+k)^2 + \lambda^2] J_0(i\sqrt{p/\nu} a)} + \frac{\alpha \pi a^2 (p+k)}{[(p+k)^2 + \lambda^2]} \quad (5.8)$$

Mellin の逆変換を施して Q_1 を求めると,

$$Q_1 = \frac{\pi a^2 \alpha}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} e^{-kt} \cos(\lambda t - \theta_0) - \frac{2\pi a \alpha \sqrt{\nu} M_{a1}}{(k^2 + \lambda^2)^{3/4} M_a} e^{-kt} \sin(\lambda t + \theta_{a1} - \theta_a - \frac{3}{2} \theta_0) + 4\pi a^2 \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) \cdot (k - \alpha_n^2 \nu / a^2)}{\alpha_n^2 [(k - \alpha_n^2 \nu / a^2)^2 + \lambda^2]} \quad (5.9)$$

ただし, ここで

$$\left. \begin{aligned} J_1(i\sqrt{z_1/\nu} \cdot a) &= M_{a1} \exp(i\theta_{a1}) \\ J_1(-i\sqrt{z_2/\nu} \cdot a) &= M_{a1} \exp(-i\theta_{a1}) \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

とし, M_a, θ_a は (5.5) の通りとする. (5.9) は (5.4) の速度分布に対応する厳密な解である.

特に $a^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2} / \nu$ が小さければ, (5.6) の速度分布に対応して

$$Q_1 = \frac{\pi a^4 \alpha}{8\nu} e^{-kt} \cos \lambda t - \frac{4\pi a^4 \alpha}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4} \exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) \quad (5.11)$$

また $a^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2} / \nu$ が大きければ, ベッセルかん数の漸近表示をつかつて

$$Q_1 = \frac{\pi a^2 \alpha e^{-kt}}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \cos(\lambda t - \theta_0) - \frac{2\pi a \alpha \sqrt{\nu}}{(k^2 + \lambda^2)^{3/4}} e^{-kt} \cos\left(\lambda t - \frac{3}{2} \theta_0\right) + 4\pi a^2 \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t / a^2) (k - \alpha_n^2 \nu / a^2)}{\alpha_n^2 [(k - \alpha_n^2 \nu / a^2)^2 + \lambda^2]} \quad (5.12)$$

となる. これは (5.7) の速度分布に対応する流量である.

c) 速度分布の特性 以下, このような振動性の圧力変動に伴う管内の流れの性質をもう少し詳しくしらべて見ることにする. $\lambda \gg k$ でかつ $a^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2} / \nu$ が大きければ, 多少時間が経過した後には流れは

$$u_1 = \frac{\alpha e^{-kt}}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \cos(\lambda t - \theta_0) - \alpha \sqrt{\frac{a}{r(k^2 + \lambda^2)}} e^{-kt - (a-r)\sqrt{r_0/\nu} \cos \frac{\theta_0}{2}} \cos \left[\lambda t \right.$$

$$\left. - (a-r) \sqrt{\frac{r_0}{\nu}} \sin \frac{\theta_0}{2} - \theta_0 \right] \quad (5.13)$$

で表わされることはさきに述べた. (5.13) の速度最大の位置を求めると, $a\eta = a-r$ として, 速度 u_1 の極大値 $u_{\max}$ は

$$u_{\max} = \frac{\alpha e^{-kt}}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \cos(\lambda t - \theta_0) + \frac{\alpha}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} e^{-kt - \eta_m \alpha \sqrt{r_0/\nu} \cos \frac{\theta_0}{2}} \sin \left(\frac{\theta_0}{2} - \varepsilon \right) \quad (5.14)$$

ここに

$$\varepsilon = -\sin \frac{\theta_0}{2} / (2\alpha \sqrt{r_0/\nu}) \quad (5.15)$$

u_1 の極大値を与える η の値 η_m は,

$$\eta_m = \frac{\lambda t - \left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - m\pi - \varepsilon}{a \sqrt{\frac{r_0}{\nu}} \sin \frac{\theta_0}{2}} \quad (5.16)$$

ここに m は $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ のうちで η_m が正の値

第5図 圧力こう配が減衰振動をするときの管内速度分布の時間的変化 (図は $k=0, a\sqrt{\lambda/\nu}=20$ とし, 半周期中の時間の経過を番号順に示す)

第6図 $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha e^{-kt} \cos \lambda t$ なる圧力変化に対して, 流れ始め ($t=0$) から定常状態に達するまでの速度分布の時間的経過の一例 (図は $k=0, \sqrt{\lambda/\nu} \cdot a=10$ の場合)

をとるように選ぶ。これから容易にわかるように速度分布曲線は振動性を帯び、周期的な変化を繰り返す。速度最大の位置は管壁から管の中央に向つて一様な速さで移動する。つまり速度最大の位置は管の中心にあるのではなくて管壁附近にあり、その大きさは(5.14)の第2項だけ管の中心における値より大きい。第5図および第6図に管内速度分布の時間的経過を示す。管に振動性の圧力こう配がある場合に最大速度の位置が管壁附近に生ずるという以上の理論的結果は、Richardsonと Tyler (4) がその実験から指摘しているところと一致する。

d) 速度分布の時間的平均値 このように振動する流れの性質を調べるには流れの時間的な平均値を求めてみるのが便利である。流れ始めの状態を除いて考えることにすれば、(5.4)の右辺第3項は考慮しなくてよい。また e^{-kt} を左辺にうつして ue^{kt} の時間的平均値を求めても流れの性質を知る上にはさしつかえないので、このようにして計算を簡単化してしまえば、 ue^{kt} の二乗平均は

$$\sqrt{(ue^{kt})^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{M_r}{M_a} \cos(\theta_r - \theta_a) + \frac{M_r^2}{2M_a^2}} \quad (5.17)$$

平均流速 u_m は (5.9) から

$$u_m = -\frac{\alpha}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} e^{-kt} \cos(\lambda t - \theta_0) - \frac{2\alpha\sqrt{\nu} M_{a1}}{a(k^2 + \lambda^2)^{3/4} M_a} e^{-kt} \sin(\lambda t + \theta_{a1} - \theta_a - \frac{3}{2}\theta_0) \quad (5.18)$$

であるから、 $u_m e^{kt}$ の二乗平均は

$$\sqrt{(u_m e^{kt})^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2}{a} \sqrt{\frac{\nu}{r_0}} \frac{M_{a1}}{M_a} \sin(\theta_{a1} - \theta_a - \frac{\theta_0}{2}) + \frac{2}{a^2} \frac{\nu}{r_0} \left(\frac{M_{a1}}{M_a}\right)^2} \quad (5.19)$$

二乗平均で表わした速度分布曲線を第7図に示す。特に $(k^2 + \lambda^2)^{1/2} a^2 / \nu$ が小さいときには

$$\sqrt{(ue^{kt})^2} / \sqrt{(u_m e^{kt})^2} = 2(1 - r^2/a^2) \quad (5.20)$$

となり、Poiseuille の流れと同様な形となる。第7図において、管の半径 $a=1\text{ cm}$ の場合に、振動する流体が水であるならば $\nu=0.01\text{ cm}^2/\text{s}$ として、図中

$$\sqrt{\lambda/\nu} a = 5 \quad \text{のとき周期 } T = 25 \text{ 秒}$$

$$\sqrt{\lambda/\nu} a = 10 \quad \text{のとき } T = 6.3 \text{ 秒}$$

である。また流体が 20°C の空気とするならば $\nu=0.15\text{ cm}^2/\text{s}$ として、

$$\sqrt{\lambda/\nu} a = 5 \quad \text{のとき周期 } T = 1.7 \text{ 秒}$$

$$\sqrt{\lambda/\nu} a = 10 \quad \text{のとき周期 } T = 0.42 \text{ 秒}$$

の状態を表わす。

第7図 圧力こう配が減衰振動をするときの円管内の速度分布、二乗平均 $\sqrt{u^2/u_m^2}$ で表わす。(図は $k \neq 0$ の場合)

(2) 次に圧力こう配が

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta e^{-kt} \sin \lambda t \quad (5.21)$$

で表わされるとき管内速度分布 u_2 を求めよう。前と同様にして

$$u_2 = \frac{\beta e^{-kt}}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \sin(\lambda t - \theta_0) - \frac{\beta e^{-kt} M_r}{\sqrt{k^2 + \lambda^2} M_a} \sin(\lambda t + \theta_r - \theta_a - \theta_0) + 2\beta \lambda \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t/a^2) \cdot J_0(\alpha_n r/a)}{\alpha_n [(k - \nu \alpha_n^2/a^2)^2 + \lambda^2] J_1(\alpha_n)} \quad (5.22)$$

となる。 M_r , M_a 等の記号はさきと同一である。流量 Q_2 は

$$Q_2 = \frac{\pi a^2 \beta}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} e^{-kt} \sin(\lambda t - \theta_0) + \frac{2\pi a \sqrt{\nu} \beta M_{a1}}{(k^2 + \lambda^2)^{3/4} M_a} e^{-kt} \cos(\lambda t + \theta_{a1} - \theta_a - \frac{3}{2}\theta_0) + 4\pi \beta \lambda a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t/a^2)}{\alpha_n^2 [(k - \nu \alpha_n^2/a^2)^2 + \lambda^2]} \quad (5.23)$$

$(\lambda^2 + k^2)^{1/2} a^2 / \nu$ が小さければベッセルかん数をべき級数に展開して

$$u_2 = \frac{\beta}{4\nu} e^{-kt} (a^2 - r^2) \sin \lambda t \quad (5.24)$$

$$Q_2 = \frac{\pi a^4 \beta}{8\nu} e^{-kt} \sin \lambda t \quad (5.25)$$

$(\lambda^2 + k^2)^{1/2} a^2 / \nu$ が大きければベッセルかん数の漸近展開を用いて、

$$u_2 = \frac{\beta e^{-kt}}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \sin(\lambda t - \theta_0) - \beta \sqrt{\frac{a}{r(k^2 + \lambda^2)}} e^{-kt - (a-r)\sqrt{r_0/\nu} \cos \frac{\theta_0}{2}}$$

$$\times \sin \left[\lambda t - (a-r) \sqrt{\frac{r_0}{\nu}} \sin \frac{\theta_0}{2} - \theta_0 \right] \\ + 2\beta \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t/a^2) \cdot J_0(\alpha_n r/a)}{\alpha_n [(k - \nu \alpha_n^2/a^2)^2 + \lambda^2] J_1(\alpha_n)} \quad \dots\dots\dots (5.26)$$

$$Q_2 = \frac{\pi a^2 \beta}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} e^{-kt} \sin(\lambda t - \theta_0) \\ - \frac{2\pi a \nu \beta}{(k^2 + \lambda^2)^{3/4}} e^{-kt} \sin \left(\lambda t - \frac{3}{2} \theta_0 \right) \\ + 4\pi \beta \lambda a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t/a^2)}{\alpha_n^2 [(k - \alpha_n^2 \nu/a^2)^2 + \lambda^2]} \quad \dots\dots\dots (5.27)$$

となる。これらの流れの性質はさきと同様であるからここでは繰り返さない。

(3) (5.1) の一般的な圧力変化が与えられた場合には、以上に求めた二つの解を加えあわせればよい。管内の速度分布は

$$u = u_1 + u_2 \quad \dots\dots\dots (5.28)$$

流量 Q は

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad \dots\dots\dots (5.29)$$

で与えられる。

(4) (3) の特別な場合として $k=0$ とおくならば、振動性の圧力こう配

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha \cos \lambda t + \beta \sin \lambda t \quad \dots\dots\dots (5.30)$$

の場合の解が得られる。このような振動性の圧力こう配が与えられたとき、管内の流れが定常状態に達して後の状態については Sexl も求めているが⁽⁵⁾、この結果は筆者の以上に行つた計算で $k=0$ とおけば容易に導くことができる。しかも筆者の解は過渡的な状態を含めている点でより一般的である。定常状態に達して後の流れの状態に関しては、Richardson および Tyler の実験⁽⁴⁾および Sexl の理論⁽⁵⁾が既にあるからここでは研究の対象外であることを附言しておく。

(5) (1), (2) で求めた結果で特に $\lambda=0$ とおくならば指数かん数型の圧力こう配

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha e^{-kt} \quad \dots\dots\dots (5.31)$$

が突然にあたえられたときに、静止から流れはじめる場合の解が得られる。このときの管内の速度分布は (5.4) で $\lambda=0$ として

$$u = \frac{\alpha}{k} e^{-kt} \left[\frac{J_0(\sqrt{k/\nu} \cdot r)}{J_0(\sqrt{k/\nu} \cdot a)} - 1 \right] \\ + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t/a^2) \cdot J_0(\alpha_n r/a)}{\alpha_n (k - \alpha_n^2 \nu/a^2) J_1(\alpha_n)} \quad \dots\dots\dots (5.32)$$

(5.32) で特に ka^2/ν が小さいときは近似的に

$$u = \frac{\alpha}{4\nu} e^{-kt} (a^2 - r^2) - \frac{2\alpha a^2}{\nu} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t/a^2) \cdot J_0(\alpha_n r/a)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \quad \dots\dots (5.32')$$

特別な場合として、減衰の係数 k が $\alpha_n^2 \nu/a^2$ のいずれかと相等しいときには、たとえば $k = \alpha_p^2 \nu/a^2$ であつたとするならば (5.32) は次の式でおきかえられる。

$$u = \frac{\alpha}{k} e^{-kt} \left[\frac{r}{a} \frac{J_1(\alpha_p r/a)}{J_1(\alpha_p)} - 1 \right] \\ + \frac{2\alpha e^{-kt} J_0(\alpha_p r/a)}{\alpha_p J_1(\alpha_p)} \left(t + \frac{1}{2k} \right) \\ + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t/a^2) \cdot J_0(\alpha_n r/a)}{\alpha_n (k - \alpha_n^2 \nu/a^2) J_1(\alpha_n)} \quad \dots\dots (5.33)$$

ただし Σ' は総和を求めるとき $s=p$ なる項は除外することを示す。

(6) 以上に求めた結果は減衰振動 (5.1) で与えられる圧力こう配が突然に生じたとき、静止から動きはじめる管内の流れを論じたのであるが、これは次のような場合にも適用できる。いま時間 $t < 0$ において水そうの水位が一定に保たれ、時間 $t \geq 0$ において減衰振動 (5.1) で表わされる かく乱 が与えられたとする。水そうの下端に取り付けた円管は十分に長く、かつ管からの流出による水そうの水位の変化は無視できるものとする。このようなときに管に与えられる圧力こう配は、 β_1 を常数として

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta_1 + e^{-kt} (\alpha \cos \lambda t + \beta \sin \lambda t), \quad (t \geq 0) \quad \dots\dots\dots (5.34)$$

で与えられる。

管に取り付けたバルブが最初から開かれた状態にあり、したがつて $t < 0$ で $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta_1$ であつた場合には、さきに求めた u_1, u_2 に Poiseuille の流れを加えて、速度分布は

$$u = \frac{\beta_1}{4\nu} (a^2 - r^2) + u_1 + u_2 \quad \dots\dots\dots (5.35)$$

流量 Q は

$$Q = \frac{\beta_1 \pi a^4}{8\nu} + Q_1 + Q_2 \quad \dots\dots\dots (5.36)$$

また $t=0$ から急に流れが開始されるとすれば、(4.4) (4.5) を加えて

$$u = \frac{\beta_1}{4\nu} (a^2 - r^2) - \frac{2a^2 \beta_1}{\nu} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n^2 \nu t/a^2) \cdot J_0(\alpha_n r/a)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} + u_1 + u_2 \quad \dots\dots (5.37)$$

$$Q = \frac{\beta_1 \pi a^4}{8\nu} - \frac{4\pi a^4 \beta_1}{\nu} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4} \exp(-\alpha_n^2 \nu t/a^2) + Q_1 + Q_2 \quad \dots\dots (5.38)$$

で与えられる。

6. 結 論

圧力こう配が時間の経過とともに変動する場合の管内の流れは、圧力こう配が一定である Poiseuille の流れと比べて、流れの様子は非常に異なっている。

ここでは次の三つの場合について解を求めている。ただし、管内の流れは層流であるとし、流体の圧縮性は無視できるものとする。

(i) 圧力こう配が時間に比例して増加または減少するとき。すなわち

$$t < 0 \text{ で } -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta,$$

$$t \geq 0 \text{ で } -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha t + \beta,$$

(ii) 圧力こう配が突然に変化したとき。すなわち

$$t < 0 \text{ で } -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta_0$$

$$t \geq 0 \text{ で } -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \beta_1$$

(iii) 圧力こう配が減衰振動をするとき(特別な場合として調和振動および指数かん数形の減衰を含む)。すなわち

$$t < 0 \text{ で } -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$t \geq 0 \text{ で } -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = e^{-kt}(\alpha \cos \lambda t + \beta \sin \lambda t)$$

おのおの場合について速度分布、流量の時間的経過を明らかにし、また流れの過渡的な変化を求めた。特に(ii)では流れが突然に開始されてから定常状態に達するまでの所要時間を求め、(iii)では減衰振動の周期が長いときと短いときにわけて、周期の短いとき速度分布の最大値が管壁附近に生ずることも説明している。以上の結果、圧力こう配が時間と共に変動する流れの状態は、通常の Poiseuille の流れといかに異なるかも明瞭であろう。

注:—

(1) 昭和25年4月9日第27期定時総会講演会において講演。

原稿受付 昭和25年5月31日。

(2) 正員, 東北大学高速力学研究所。

(3) P. Szymanski; Comptes rendus du 3ème congrès international de mécanique appliquée, Vol.I. p. 249, (1930).

(4) E.G. Richardson, E. Tyler; Proc. Phys. Soc., Vol. 42, part I, No. 231, (1929), p.1.

(5) Von Theodor Sexl; Zeit. für Phys., 61 (1930), S.349.

Ritz の方法を用いた層流境界層の解法⁽¹⁾

植松時雄⁽²⁾, 八田圭爾⁽³⁾

A Treatise on the Laminar Boundary Layer by Ritz's Method

by Tokio UEMATU and Keiji HATTA

In this paper, the velocity distribution in the laminar boundary layer of the incompressible fluid is treated by the variational method. The functional $J(u)$ is obtained, which has stationary value under a certain additional condition, when the velocity distribution u satisfies Navier-Stokes' equation and the equation of continuity. To solve the problem of the calculus of variation thus constructed, Ritz's method is used. By the above mentioned method the difficulty of solving non-linear differential equation is avoided.

For the first time, this method is applied to the uniform flow along a flat plate. The velocity distribution is expressed by the polynomial of the distance from the wall, and the resistance of the plate of length l is obtained as

$$D = 1.386 \sqrt{\mu \rho u_0^3 l}.$$

1. 緒言

層流境界層内の速度分布は、既に種々の方法によって求められているが、ここに述べる方法は従来のものと異なり、Navier-Stokes の運動方程式を解くことを、変分学の問題に変換して、これに Ritz の方法を用いる解法である。

2. 問題の変換

流れの中に置かれた物体の前縁岐点に原点を定めて物体表面に沿い流れの方向に x 軸、これに直交して

流体の内部に向けて y 軸をとる(第1図)。以下においては二次元の問題として、 xy 軸に垂直な単位幅について考える。流体は非圧縮性とし、その密度を ρ 、粘性係数を μ 、動粘性係数を ν とする。点 (x, y) における流体の圧力を p 、速度の x 軸および y 軸方向の成分をそれぞれ u および v とし、

$$L = uv \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \dots (1)$$

なるかん数を作る。

L の右辺の第1項は、次に述べるごとく、単位質量