れども、翼車の外周附近が利用されるために水頭としてはかえつて上昇することが示されている。

7. 結 言

軸流ポンプにおける流体の運動方程式を簡単な仮定によつて積分し翼車出口の速度成分の分布を求めた。速度の軸方向成分は正規の運転状態では半径に関して一様であるが、一般には一様とはならない。回転数を一定とすると正規流量以上では翼車ボス附近の速度がチップ附近の速度より大で、正規流量以下ではこの逆の速度分布を示す。このことは正規流量以上では流体は翼車内で中心軸に向つてまげられ、正規流量以下では外側にまげられることを示すもので、半径方向の分速度が一般に存在することを示している。これは従来の理論、特に翼理論を用いた軸流送風機等の解析にはあまり注意せられなかつたところで、このような二次元的な考え方が一般の流量ではそのままは用いられない

ことを示している。

特に低流量の領域では一定流量以下ではボスの附近において逆流を生じ、翼車を通り抜ける流体は翼車によつてなされる仕事および損失に著しい影響をうける。臨界流量、すなわち始めて逆流が発生する流量を境として、特性曲線は不連続となり、この点から 0 流量に向つて有効なる水頭が増加の傾向を示すのは全くこの逆流発生の影響であるということが出来る。

本研究は宮津純先生の御懇篤なる御指導によるもので衷心より感謝の意を表する次第である。

なお、本研究費の一部は文部省科学研究費の補助による。

注：一

- (1) 昭和 24 年 11 月 13 日 応用力学講演会において講演、原稿受付 昭和 25 年 2 月 17 日。
- (2) 正員、東京大学生産技術研究所。
- (3) 正員、東京大学生産技術研究所。
- (4) 鬼頭史城、機械学会論文集、14 卷 48 号 (昭 23)。

621-66-01: 532-517

摩 擦 ポ ン プ の 乱 流 特 性 (第 1, 2 報)⁽¹⁾

宮 津 純⁽²⁾

Researches on Turbulent Flow Characteristics of Friction Pump

(1st and 2nd Report)

by Atsushi MIYADZU

The theoretical characteristics of the friction pump was already studied by the author, considering the flow in the pump as laminar. The case of turbulent flow was taken up, in the present paper, to contrast the characteristics in two modes of the flow, and to inquire into the effect of turbulence on the characteristics of the pump of improved type, already given by the author. It has been concluded that:

(1) The turbulence improves, in general, the characteristics of friction pump, whatever it may be, the improved type or otherwise.

(2) As to the usual type, the maximum efficiency is found to be 2/5 for turbulent, compared with 1/3 for laminar.

(3) The turbulence does not change the fundamental principle for improving the friction pump, already pointed out by the author in regard to the laminar flow.

1. 緒 言

これまでに発表してきた、ウェスコポンプおよび摩擦ポンプの理論と本論文とは、つぎのように関連している。

最初のウェスコ式回転ポンプの理論⁽³⁾では、層流および乱流のそれぞれの特性を解析し、4 個の補正係数を入れて実用式を作つた。その過程として、層流については、原形ともいふべき補正されない特性をまずしらべ、最大効率が $1/3$ となるべきことを示した。乱流

については、解析困難のため、補正式のみを導き、原形となるべき特性に触れ得なかつたので、効率に及ぼす乱れの効果を知ることができなかつた。本論文にはそれを解明している (第 1 報として講演)。

続いて、さきには⁽⁴⁾摩擦ポンプを高効率高性能とする原理として、流路壁に関する表面積比、(作動面積)/(抵抗面積)をなるべく大きくすべきことと、各作動面に最適の速度を与えねばならないこと、とを明らかにした。また最適の速度に関することがらを、とくにはつきりさせるために速度比を変えて一連の層流特性

を比較検討したことがある⁽⁵⁾。本論文は、乱流に関して、これらの結論が基本において変らないことと、一般特性に及ぼす、乱れの効果とを明らかにしている (第 2 報として講演)。

2. 特 性 式

基本式 前論文⁽⁶⁾で示したようにポンプ流路をつくる壁面の一つに沿って、流れの方向に x 軸をとり、それと直角に流路の内部へ向けて y 軸をとる (第 1, 2 図)。圧力は x 方向のみに、速度は y 方向のみに変り、質量力は作用しないとする。 x, y 軸に平行に区切った微小部分に関する力のつり合式は次のようになる。

$$d\tau/dy = dp/dx$$

ここに τ は流れの内部のせん断応力、 p は圧力を表わす。出入口の間の圧力こう配を一樣とみれば

$$dp/dx = \gamma h/s$$

となる。ここに γ は流体の単位体積の重量、 h はポンプ揚程、 s は流路の長さを表わす。

よつてつり合式は

$$d\tau/dy = \gamma h/s$$

積分して

$$\tau = \frac{\gamma h}{s} y + \tau_0 \dots \dots \dots (1)$$

ここに τ_0 は $y=0$ なる層のせん断応力。

乱流のせん断応力 τ が、いかなる因子にどのように左右されるかは、現在はずきりしていない。ことに凹凸面の起す乱れの場合にそうである。ここでは、プラントルの混合距離の理論によるとし、混合距離が面に応じて変るものとする。本論文では、基本特性を求める意味で、一定の混合距離を有するものとする。すなわち

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \left| \frac{du}{dy} \right| \dots \dots \dots (2)$$

l は混合距離 ($\equiv a$, 一定), ρ は流体密度 (γ/g , g = 重力加速度), u は流速を表わす。

以上基本となる部分は前論文におけるものと変つていない。この基本式に対して前論文は乱流の場合の解析に成功していないので、改めてそれを取り上げるのである。方法論的に見れば、解析が成功した鍵は、壁面せん断応力 τ_0 を代表するものとして、媒介変数 δ_0 を導入した点にある。これによつて困難とみえた式の扱いが容易になり、整理方法が定まつたことにある。この方法は、その与え方において、他の流体機械の特性解析その他にも応用して有用なものと思われる。本文はその扱いを示す具体例にも該当するであろう。

(1) 流速に極小値をもたない状態 (第 1 図)

領域内 ($y=0 \sim \delta$) で $0 < du/dy$ となり、領域外 (y

の負の位置) で $du/dy=0$ となる。

そこを $y=-\delta_0$ とすれば、(1) より

$$\tau_0 = \frac{\gamma h}{s} \delta_0$$

したがつて (2) と

(1) より

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{gh}{s}} \sqrt{y+\delta_0}$$

$y=0, u=U_0$ を条件として解き

$$u = U_0 + \frac{2}{3a} \sqrt{\frac{gh}{s}} \left\{ (y+\delta_0)^{3/2} - \delta_0^{3/2} \right\}$$

更に $y=\delta, u=U_\delta$ として次の関係を得る。

$$U_\delta = U_0 + \frac{2}{3a} \sqrt{\frac{gh}{s}} \left\{ (\delta+\delta_0)^{3/2} - \delta_0^{3/2} \right\}$$

いま $\frac{U_0}{U_\delta} = m$, すなわち $U_0 = m U_\delta \dots \dots \dots (3)$

$$-1 \leq m \leq 1$$

と置いて (7) 次のように書き変え、したがつて特性式を得る。

$$u = m U_\delta + \frac{2}{3a} \sqrt{\frac{gh}{s}} \left\{ (y+\delta_0)^{3/2} - \delta_0^{3/2} \right\} \dots (4)$$

$$\frac{(1-m)U_\delta}{\frac{2}{3a} \sqrt{\frac{gh}{s}} \delta^{3/2}} = \left(1 + \frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2} \dots \dots (5)$$

$$\text{流量 } q = b \int_0^\delta u dy = \frac{2}{5} K_1 U_\delta b \delta$$

$$K_1 = 1 + \frac{3}{2} m + (1-m) \frac{\delta_0}{\delta} - \frac{3}{2} (1-m) \frac{\left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2}}{\left(1 + \frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2}}$$

b = 流路の幅 (軸に平行)

水動力 L_w

$$L_w = \gamma q h = \frac{2}{5} \gamma K_1 U_\delta b h \delta$$

抵抗応力 回転に抵抗する応力は、 $y=0$ で $-\tau_0$, $y=\delta$ で τ_{δ_0} 。しかるに次の関係

$$\tau_\delta = \frac{\gamma h}{s} \delta + \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{\gamma h}{s} \delta_0$$

より回転に要する動力 L_s は

$$L_s = \tau_\delta b s U_\delta + (-\tau_0) b s U_0 = \gamma K_3 U_\delta b h \delta$$

$$K_3 = 1 + (1-m) \frac{\delta_0}{\delta}$$

ポンプの流体効率 η

$$\eta = \frac{L_w}{L_s} = \frac{2}{5} \frac{K_1}{K_3}$$

(2) 流速に極小値をもつ状態 (第 2 図)

第 1 図 座標と流速分布

領域内 ($y=0 \sim \delta$) で $du/dy=0$ となる。そこを $y=\delta_0$ とすれば、(1)より

$$\tau_0 = -\frac{\gamma h}{s} \delta_0$$

第2図 座標と流速分布

$\delta_0 < y \leq \delta$ で

$$\frac{du}{dy} = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{g}{\gamma} \left(\frac{\gamma h}{s} y + \tau_0 \right)}$$

$$= -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{gh}{s}} \sqrt{y - \delta_0}$$

$y=\delta$, $u=U_\delta$ としして解き

$$u = U_\delta - \frac{2}{3a} \sqrt{\frac{gh}{s}} \left\{ (\delta - \delta_0)^{3/2} - (y - \delta_0)^{3/2} \right\} \dots (6)$$

$0 \leq y < \delta_0$ で

$$\frac{du}{ay} = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{-g}{\gamma} \left(\frac{\gamma h}{s} y + \tau_0 \right)}$$

$$= -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{gh}{s}} \sqrt{(\delta_0 - y)}$$

$y=0$, $u=U_0$ としして解き

$$u = U_0 - \frac{2}{3a} \sqrt{\frac{gh}{s}} \left\{ \delta_0^{3/2} - (\delta_0 - y)^{3/2} \right\} \dots (7)$$

(6), (7) に関して, $y=\delta_0$ における速度の一致すべきことと(3)から次の条件をうる。

$$\frac{(1-m)U_\delta}{\frac{2}{3a} \sqrt{\frac{gh}{s}} \delta^{3/2}} = \left(1 - \frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2} \dots (8)$$

したがって特性式は次のようになる。

流量 q

$$q = b \int_0^\delta (7 \text{ 式}) dy + b \int_{\delta_0}^\delta (6 \text{ 式}) dy$$

$$= \frac{2}{5} K_1 U_\delta b \delta$$

$$K_1 = 1 + \frac{3}{2} m - (1-m) \frac{\delta_0}{\delta}$$

$$- \frac{3}{2} (1-m) \frac{\left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2}}$$

$$\text{水動力 } L_w \quad L_w = \gamma q h = \frac{2}{5} \gamma K_1 U_\delta b h \delta$$

抵抗応力 $y=0$ では $-\tau_0$, $y=\delta$ では τ_δ

$$\tau_\delta = \frac{\gamma h}{s} \delta + \tau_0, \quad \tau_0 = -\frac{\gamma h}{s} \delta_0$$

回転に要する動力 L_s

$$L_s = \tau_\delta b s U_\delta - \tau_0 b s U_0 = \gamma K_3 U_\delta b h \delta$$

$$K_3 = 1 - (1-m) \frac{\delta_0}{\delta}$$

$$\text{ポンプの流体効率 } \eta = \frac{L_w}{L_s} = \frac{2}{5} \frac{K_1}{K_3}$$

3. 無次元特性式

前項に求めた特性式を, 図示の便宜で無次元形に変える。

(1) 流速に極小値をもたない状態 (第1図)

流量

$$Q = \frac{q}{\frac{1}{2} U_\delta b \delta} = \frac{4}{5} K_1$$

K_1 は前に与えてある。

揚程 (5) の条件式より

$$\frac{H}{50 M^2 L} = \left\{ \frac{3}{10} \frac{(1-m)}{\left(1 + \frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2}} \right\}^2$$

$$\text{ここに } H = \frac{h}{U_\delta^2 / 2g}, \quad M = \frac{a}{\delta}, \quad L = \frac{s}{\delta}$$

水動力

$$W = \frac{\gamma q h}{\gamma \left(\frac{1}{2} U_\delta b \delta \right) U_\delta^2 / 2g} = \frac{4}{5} H K_1 = Q H$$

$$\frac{W}{50 M^2 L} = Q \left(\frac{H}{50 M^2 L} \right)$$

運転に要する動力 $L_s = \gamma h \delta U_\delta K_3$

K_3 は前に与えてある。

$$S = \frac{\text{運転に要する動力}}{\gamma \left(\frac{1}{2} U_\delta b \delta \right) U_\delta^2 / 2g} = 2 H K_3$$

$$\frac{S}{50 M^2 L} = 2 K_3 \left(\frac{H}{50 M^2 L} \right)$$

$$\text{ポンプの流体効率 } \eta = \frac{W}{S} = \frac{Q}{2 K_3}$$

(2) 流速に極小値をもつ状態 (第2図)

$$\text{流量 } Q = \frac{q}{\frac{1}{2} U_\delta b \delta} = \frac{4}{5} K_1$$

この K_1 も前に与えてある。

揚程 (8) の条件式より

$$\frac{H}{50 M^2 L} = \left\{ \frac{3}{10} \frac{(1-m)}{\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2}} \right\}^2$$

$$\text{水動力 } W = \frac{4}{5} H K_1 = Q H$$

$$\frac{W}{50 M^2 L} = Q \left(\frac{H}{50 M^2 L} \right)$$

運転に要する動力 $L_s = \gamma h \delta U_\delta K_3$

$$S = 2 H K_3$$

$$\frac{S}{50 M^2 L} = 2 K_3 \left(\frac{H}{50 M^2 L} \right)$$

この K_3 も前に与えてある。

$$\text{ポンプの流体効率 } \eta = \frac{W}{S} = \frac{Q}{2 K_3}$$

4. 流速分布

流速をあらわす式中の h を, δ_0/δ で置きかえて次式を得る.

(1) 流速に極小値をもたない状態 (第 1 図)

(4) に (5) を用いて

$$\frac{u}{U_\delta} = \frac{\left(\frac{y}{\delta} + \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2}}{\left(1 + \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2}} + m \frac{\left(1 + \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{y}{\delta} + \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2}}{\left(1 + \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2}} \dots (9)$$

(2) 流速に極小値をもつ状態 (第 2 図)

(6), (7) に (8) を用いて

$$\delta_0 \leq y \leq \delta$$

$$\frac{u}{U_\delta} = \frac{\left(\frac{y}{\delta} - \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2}} + m \frac{\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{y}{\delta} - \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2}}$$

$$0 \leq y \leq \delta_0$$

$$\frac{u}{U_\delta} = m \frac{\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta} - \frac{y}{\delta}\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2}} - \frac{\left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta} - \frac{y}{\delta}\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2}}$$

5. 特性曲線の求め方

揚程 (h), 水動力 (I_w), 運転動力 (I_s), 流体効率 (η) は流量 q に応じて定まる. すなわち, Q に応じて H, W, S, η が定まる. しかし求めた式は直接 Q

の かん数として示されないで, δ_0/δ を介して Q と結ばれている. δ は一定, δ_0 は運転状態 (すなわち流量) によつて変り, δ_0/δ のとり得る値は, 流速に極小値をもたない場合に, $\delta_0/\delta = 0 \sim \infty$, 流速に極小値をもつ場合に, $\delta_0/\delta = 0 \sim 1$ の範囲にある. したがつて δ_0/δ にその範囲の任意の値を与えれば, Q, H, W, S, η が算定できる. Q を横軸として結果を描くことにより, 特性曲線を求めることができる. ポンプとして作用するのは $0 < H$ の範囲である.

6. 特殊の場合

(1) 一面回転型 (第 5 図) 前項までの式に $m=0$ とおくことにより必要な式を得る.

(2) 両面等速型 (第 3 図) $m=1$ に該当するが, 特性式は, δ_0/δ をパラメータとする前項までの式ではあらわせない. なぜなら, この場合, 流速の極小値はつねに領域の中央にあるからである. このことは条件式 (5) にも示されている. すなわち (5) の右辺は正であつて 0 にならない, という事は, 一般に左辺で $m=1$ にはなりえないことである. $m=1$ でこの式が満足されるには, $h=0$ で $\delta_0=\infty$ の場合が考えられるに過ぎない. そのとき (9) 式は $u/U_\delta=1$ となり, 等速状態をあらわす. したがつて両面等速型は「流速の極小点が領域内に存在する場合」に含まれてしまう. しかも条件式 (8) に $m=1$ とおけば

$$\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{3/2} = 0$$

これからは, $\delta_0/\delta=1/2$ なる一つの値が定まるだけである. これは流速の極小点が, つねに領域の中央にあることを示す. よつて δ_0/δ は流量 (従つて特性) 変化のパラメータにはならないことがわかる. 所要の特性式は (6), (7) に $U_0=U_\delta$, $\delta_0/\delta=1/2$ とおいた式を基礎として改めて誘導しなければならない. その結果は Q の かん数として簡単に表わすことができる (7).

第 3 図 乱流特性 ($m=1$)

第 4 図 乱流特性 ($m=0.5$)

第 5 図 乱流特性 ($m=0$)

第 6 図 乱流特性 ($m=-0.5$)

7. 特性 曲 線

特性曲線を第 3~6 図に、速度分布を第 7~10 図に示す。基本的な傾向としては、層流の場合と変ることなく、層流の場合に直線で示された関係が、曲線となる程度である。

第 7 図 流速分布 ($m=1$)

第 8 図 流速分布 ($m=0.5$)

第 9 図 流速分布 ($m=0$)

第 10 図 流速分布 ($m=-0.5$)

第 11 図 乱流の基本特性

第 12 図 層流の基本特性

第 11 図は、乱流特性の基本として $m=0$ の場合を示す。第 12 図は、比較のため層流の場合を示したものの ($R=U_δ\delta/\nu$, ν =流体の動粘性係数)。最大効率 は層流の場合 $1/3$ であるのにたいし、乱流の場合 $2/5$ となり、向上することが注目される。このことは効率の式から容易に導かれる。すなわち

$$\eta_{m=0} = -\frac{2}{5} \left[\frac{K_1}{K_3} \right]_{m=0}$$

$$= \frac{2}{5} \left[1 - \frac{\frac{3}{2} \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2}}{\left\{ \left(1 \pm \frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2} - \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^{3/2} \right\} \left(1 \pm \frac{\delta_0}{\delta} \right)} \right]$$

の最大値は $\delta_0/\delta=0$ において $2/5$ となるからである。
 ±は第 1, 2 図の場合をあらわす。

第 13 図 乱流特性値

第 13 図は第 3~6 図中の代表値をまとめ、層流の場合(破線)と比較したものである。 Q_M は Q の最大値, η_M は最大流体効率, $Q_{\eta M}$ は η_M に相当する Q 。層流の場合にくらべて最大効率はより高くなり、そのときの流量も大きくなることがわかる。

第 14 図は流量にたいする効率曲線をまとめたものである。比較のため層流の場合を第 15 図に示す。最大効率の点を結ぶ線は、層流の場合には第 14 図にも記入したように直線で示されるが、乱流の場合には右

第 14 図 乱流の効率曲線

第 15 図 層流の効率曲線

に曲つた曲線となる。

8. 総 括

摩擦ポンプの乱流特性を解析したもので、大きい結論は次のようになる。

(1) 一面回転の普通型ポンプでは、その最大効率は、層流の場合 $1/3$ であるのにたいし、乱流では $2/5$ となり、向上する。

(2) 両面回転型ポンプでは、効率も含めてポンプ性能は、乱れによつて一般に向上する。

(3) 摩擦ポンプを高性能とする原理として、層流の場合から得た結論は、乱流と考えても変ることはいない。

以上の結論のほか、本論文は流体機械の特性の解析法に、一つの方法あるいは前例を示した点にも意義があると思われる。

本論文では、壁面せん断応力 τ_0 を媒介変数 δ_0 で代表し、それによつて困難とみえた式の扱いを容易にし、整理方法を得た。このような扱い方は、他の流体機械の解析その他に対しても極めて有用であると思われるので、ここで特にそれを強調するもむだではないと思われる。もちろん何をどういう媒介変数で表わすかは式の形式によつて異なる。しかしその意図をもつて考えれば、場合に応じて適当な扱い方が自ら定まるはずである。(昭和 21 年に筆者が本論文を発表した以前には、同様の考え方による解析例は示されていないようである。)

本文は文部省科学研究費による研究の一部を報告したものである。計算と図作製は井上稔、山崎進、柴田佳子諸氏の助力による。

注：一

- (1) 昭和 21 年 11 月 30 日 第 485 回講演会において講演、原稿受付昭和 26 年 1 月 20 日。
- (2) 正員、東京大学第二工学部。
- (3) 機械学会論文集, 5 巻 18 号, 109 頁(昭 14-2)。
- (4) 機械学会論文集, 10 巻 40 号, 111-40~54 頁(昭 19-8, 11) 13 巻 43 号, 89~94 頁(昭 22-1)。
- (5) 機械学会論文集, 13 巻 43 号, 94~100 頁(昭 22-1)。
- (6) 注(3)に同じ。
- (7) 注(5)に同じ。