621-226: 532.52.032

与えられた圧力分布を持つ翼型の計算法⁽¹⁾藤 本 武 助⁽²⁾ 窪 田 滋 夫⁽³⁾A Method of Calculating Airfoil Section Form
with Given Pressure Distribution

by BUSUKE HUDIMOTO and SHIGEO KUBOTA

In this paper, a method of calculating airfoil section form with given pressure distribution is treated considering the effect of viscosity.

The velocity on the airfoil surface and the magnitude of circulation around airfoil differ between perfect and viscous fluids and these differences arise from the formation of boundary layer on the airfoil surface. In this method, the boundary layer thickness is calculated theoretically at first, then the above-mentioned differences are estimated assuming the thin layer covering airfoil with height of displacement thickness of the boundary layer is filled with streaming fluid issued from the imaginary source distribution on the airfoil surface, and hence corresponding pressure distribution of the perfect fluid is obtained. Then airfoil form is calculated for this corrected pressure distribution by the method already obtained by the senior author in the case of perfect fluid. Both cases of isolated airfoil and wing lattice are treated.

An example of isolated airfoil (N.A.C.A. 4412, $\alpha=12^\circ$, $R=3 \cdot 10^6$) is shown in the original paper.

1. 計 算 理 論

粘性流体の場合には翼面上に境界層が生成する。したがって粘性流体の場合の翼のまわりの流れは翼表面に垂直に境界層の排除厚をとつてできる仮想翼型のまわりの完全流体の流れと同じと考えることができる。

上の考えを計算にうつすため翼面上に境界層の排除厚の部分を満たすだけの吹出しを分布させる。そしてこの吹出し分布による翼面上の速度の変化量と循環の減少とそれに伴う翼面上の速度の変化量を求め、これによつて与えられた速度分布に修正を加え、この修正された速度分布に対して既に知られている完全流体の計算法を利用して翼型を求める方法をとつた。

与えられた圧力分布より翼面上の速度 u_0 を求め、 u_0 を用いて境界層の計算を行つて排除厚 δ^* を推定する。翼面に沿うて x を測り x で δ^* とすると $x+dx$ では $\delta^*+(d\delta^*/dx)dx$ となる。この排除厚の増大した部分を埋めるため dx の部分に吹出し dq をおくこととする

$$dq = u_0(d\delta^*/dx)dx.$$

よつて翼面上に分布する吹出しの強さ q_z は単位長さについて

$$q_z = dq/dx \\ = u_0(d\delta^*/dx).$$

あるいは翼への流れの速度を V , 翼弦長を c

第1図

とすると

$$q_z = V(u_0/V)d(\delta^*/c)/d(x/c). \dots\dots\dots(1)$$

この吹出し分布によつて翼面上に導き出される速度を u_1 とする。同時に翼後縁の速度は無限大となるからこれを打ち消すために翼のまわりに加えるべき循環を $\Delta\Gamma$, $\Delta\Gamma$ によつて翼面上に起される速度を u_1 とすると完全流体の場合の翼面上の速度 U_0 に u_1 と u_2 を加えたものが粘性流体の u_0 を与える。よつて $U_0 = u_0 - u_1 - u_2$. この U_0 に対し翼型を定める。

2. 単独翼の計算法

あらかじめ翼型がわかつていないから

$$\zeta = z + 1/z \dots\dots\dots(2)$$

の関係によつて ζ 面の翼弦長 4 の翼が z 面の単位円に写像されるものとする。翼面上の吹出し分布の強さ q_z は z 面では

$$q_z = q_\zeta(d\zeta/dz),$$

となる。

次に翼面上の吹出し分布の総和を q とし z 面において複素ポテンシャル

$$F(z) = (q/2\pi)\log z + \sum\{(A_n + iB_n)/z^n\}, \dots\dots(3)$$

なる流れを考えると、この流れの単位円上の半径分速度 v_{r1} , 反とけい方向を正とする切線分速度 $v_{\theta 1}$ は

$$v_{r1} = q/2\pi - \sum n A_n \cos n\theta - \sum n B_n \sin n\theta,$$

$$v_{\theta 1} = -\sum n A_n \sin n\theta + \sum n B_n \cos n\theta,$$

となる。この v_{r1} と q_z を等しくおく。 q_z をフーリエ級数に展開し

$$q_z = b_0 + \sum a_n \sin n\theta + \sum b_n \cos n\theta,$$

とおくと

$$q/2\pi = b_0, \quad nA_n = -b_n, \quad nB_n = -a_n, \quad \dots\dots\dots(4)$$

によつて A_n, B_n が定まる. この A_n, B_n を用いて $v_{\theta 1}$ を求めるとこれが吹出し分布により単位円上に導き出される速度を与え

$$v_{\theta 1} = \sum b_n \sin n\theta - \sum a_n \cos n\theta, \quad \dots\dots\dots(5)$$

後縁 $\theta=0$ においては

$$(v_{\theta 1})_{\theta=0} = -\sum a_n,$$

この速度を打ち消すために加えるべき循環の大きさをとけい方向を正にとり $\Delta\Gamma$ とすると, $\Delta\Gamma$ による切線分速度は $-\Delta\Gamma/2\pi$ であるから

$$\Delta\Gamma = -2\pi \sum a_n, \quad \dots\dots\dots(6)$$

となり, 単位円上の切線分速度 $v_{\theta 2}$ は

$$v_{\theta 2} = \sum a_n \quad \dots\dots\dots(7)$$

よつて修正すべき切線分速度は $\Delta v_{\theta} = v_{\theta 1} + v_{\theta 2}$ である. 翼面上に与えられた速度 u_0 は, 単位円上では $-2u_0 \sin \theta$ であるから結局単位円上では

$$U_0 = -2u_0 \sin \theta - \sum a_n - \sum b_n \sin n\theta + \sum a_n \cos n\theta. \quad \dots\dots\dots(8)$$

また ζ 面の翼面上では

$$U_0 = u_0 + (1/2 \sin \theta) (\sum a_n + \sum b_n \sin n\theta - \sum a_n \cos n\theta). \quad \dots\dots\dots(9)$$

の速度に対して完全流体として, 翼型を計算すればよい⁽⁴⁾.

3. 翼列の翼の計算法

単独翼の場合と同様に ζ 面の翼列を

$$\zeta = \frac{d}{2\pi} \left\{ e^{-i\beta} \log \frac{\kappa z + 1}{\kappa z - 1} + e^{i\beta} \log \frac{z + \kappa}{z - \kappa} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

によつて z 面の単位円に写像する. d はピッチ, β は食い違い角で翼弦長は

$$c = \frac{2d}{\pi} \left\{ \cos \beta \tanh^{-1} \frac{2\kappa \cos \beta}{\sqrt{(\kappa^4 + 2\kappa^2 \cos 2\beta + 1)}} + \sin \beta \tanh^{-1} \frac{2\kappa \sin \beta}{\sqrt{(\kappa^4 + 2\kappa^2 \cos 2\beta + 1)}} \right\}, \quad \dots\dots\dots(11)$$

で与えられ z 面の単位円上 $z = e^{i\theta T}$ が後縁に対応するものとする

$$\tan \theta_T = \{(1 - \kappa^2)/(1 + \kappa^2)\} \tan \beta. \quad \dots\dots\dots(12)$$

そして $z = 1/\kappa$ は $\zeta = \infty$ に, $z = -1/\kappa$ は $\zeta = -\infty$ に対応する.

次に $z = \kappa$ に q の吹出し, $z = 1/\kappa$ に q の吸込みをおくと単位円上 $z = e^{i\theta}$ の速度の大きさは

$$(q/2\pi)(1 - \kappa^2)/(\kappa^2 - 2\kappa \cos \theta + 1)$$

で円周に垂直である. 更にこれをフーリエ級数に展開すると

$$q/2\pi + \sum (q\kappa^n/\pi) \cos n\theta$$

となる.

翼面上の吹出し分布の総和を q とし, この流体が後流の部分埋めて $\zeta = \infty$ に流れ去ることを考えて

$$F(z) = (q/2\pi) \{ \log(z - \kappa) - \log(z - 1/\kappa) \} + \sum (A_n + iB_n)/z^n, \quad \dots\dots\dots(13)$$

なる流れをとるとこの流れの単位円上の半径, 切線分速度は

$$v_{r1} = q/2\pi + \sum (q\kappa^n/\pi) \cos n\theta - \sum nA_n \cos n\theta - \sum nB_n \sin n\theta, \\ v_{\theta 1} = -\sum nA_n \sin n\theta + \sum nB_n \cos n\theta.$$

境界層の計算から求めた q_z を前節と同様にフーリエ級数に展開し, $q_z = v_{r1}$ より係数 A_n, B_n を定めると

$$b_0 = q/2\pi, \quad nA_n = 2b_0\kappa^n - b_n, \quad nB_n = -a_n, \quad \dots\dots\dots(14)$$

となる. よつて吹出し分布により単位円上に導き出される切線分速度は

$$v_{\theta 1} = -\sum (2b_0\kappa^n - b_n) \sin n\theta - \sum a_n \cos n\theta. \quad \dots\dots\dots(15)$$

後縁では

$$(v_{\theta 1})_{\theta=0 T} = -\sum (2b_0\kappa^n - b_n) \sin n\theta_T - \sum a_n \cos n\theta_T.$$

循環の修正量を $\Delta\Gamma$ とすると $\Delta\Gamma$ によつて後縁に生ずる速度は

$$(v_{\theta 2})_{\theta=0 T} = -(\Delta\Gamma/2\pi)(\kappa^4 + 2\kappa^2 \cos 2\beta + 1)/(1 - \kappa^4).$$

$(v_{\theta 1} + v_{\theta 2})_{\theta=0 T} = 0$ より循環の修正量が定まり

$$-\frac{\Delta\Gamma}{2\pi} = \frac{1 - \kappa^4}{\kappa^4 + 2\kappa^2 \cos 2\beta + 1} \{ \sum (2b_0\kappa^n - b_n) \sin n\theta_T + \sum a_n \cos n\theta_T \}. \quad \dots\dots\dots(16)$$

$\Delta\Gamma$ により単位円周上に生ずる速度は

$$v_{\theta 2} = -(\Delta\Gamma/2\pi)(1 - \kappa^4)/(\kappa^4 - 2\kappa^2 \cos 2\theta + 1). \quad \dots\dots\dots(17)$$

切線分速度の修正量は $\Delta v_{\theta} = v_{\theta 1} + v_{\theta 2}$ であつて与えられた翼面上の速度を単位円にうつしたものを $v_{\theta 0}$ とすると

$$U_0 = v_{\theta 0} - v_{\theta 1} - v_{\theta 2}, \quad \dots\dots\dots(18)$$

の速度分布を持つ翼を完全流体の理論⁽⁵⁾で計算すればよい.

4. 境界層の計算

ここでは翼の揚力係数は大きいけれども境界層のはく離を伴わないような場合に限ることとする. 境界層の運動量厚を $\theta, H = \delta^*/\epsilon$, 物体表面に作用する摩擦応力を τ_0 , 流体の密度を ρ , 動粘性係数を ν , 物体表面に沿うて岐点より距離 x を測ることとする. 境界層の運動量方程式は

$$d\theta/dx + (\theta/u_0)(du_0/dx)(2+H) = \tau_0/\rho u_0^2. \dots (19)$$

層流境界層に対しては上式を積分して近似的に⁽⁶⁾

$$\theta^2/\nu = 0.489 u_0^{-6} \int_0^x u_0^5 dx. \dots (20)$$

乱流境界層に対しては近似的に⁽⁷⁾

$$(u_0\theta/\nu)^{1/4} = u_0^{-1} \{0.017 \int_0^x u_0^4 dx + \text{const.}\} \dots (21)$$

H は層流の場合は 2.2~3.5 に変わる値で $(\theta^2/\nu)(du_0/dx)$ によつて定まる。乱流の場合はやはり $\gamma = (u_0\theta/\nu)^{1/4} \times (\theta/u_0)(du_0/dx)$ によつて異なるがいまだよくわかつ

第 2 図

ていない。それでここでは多くの実験から求めた H と γ の関係の平均値と思われる第 2 図を利用することとする。そして計算によつて求めた θ または $d\theta/dx$ から H の値を用いて $d\delta^*/dx$ を計算すると q_c が求まる。ただし境界層の計算を行わず粘性流体の場合の循環減少量を他の翼実験結果から推定して循環に対する修正のみを行つて計算するのも一つの方法かと思われる。

5. 計算例

計算例として単独の N. A. C. A. 4412 の迎え角 $\alpha = 12^\circ$, $R = Vc/\nu = 3 \times 10^6$ の場合⁽⁸⁾をとる。第 3 図の実線は実験によつて測定された圧力分布から求めた翼面上の速度 u_0 である。この速度から境界層の計算（下面前縁部の少しの部分以外は乱流）結果から修正して得られた完全流体の場合の速度 U_0 を破線で示してあ

第 3 図

第 4 図

る。

次に U_0 を用いて求めた翼型を第 4 図に描いてある。同じ図の鎖線は N. A. C. A. 4412 翼型であり、点線は u_0 をそのまま使つて計算した場合の翼型である。この例では偶然と思われるほどよく一致している。

なおあらかじめ翼型が求まつていないから境界層の計算、翼面上の点と単位円上の点の対応の関係等には平板を用いたが、もし必要であれば上に求まつた翼型をもとにして境界層の計算等を繰り返すことにすればよいと思う。

注：一

- (1) 原稿受付 昭和 25 年 10 月 26 日。
- (2) 正員, 京都大学。
- (3) 正員, 京都大学。
- (4), (5) 藤本, 機械学会講演会において発表, 未印刷。藤本, 神元, 広瀬, 機械学会講演会において発表, 未印刷。
- (6) 藤本, 航空学会誌, 8 巻 71 号, 279 頁, (昭16-3)。
- (7) 藤本, 機械学会論文集, 7 巻 29 号, III-1, (昭16-11)。
- (8) Pinkerton, R, N. A. C. A. Report No. 563.