粘性流体による密封作用に関する研究

(第3報 ねじみぞ断面形状の影響について)⁽¹⁾浅 沼 強⁽²⁾

Study on the Sealing Action by Viscous Fluid

(3rd Report, On the Effects of the Shape of the Screw Groove)

by Tsuyoshi ASANUMA

In the last report, the sealing performance of a screw-type viscous pump with a screw groove of the rectangular cross-section was treated theoretically. For the purpose of determining the most suitable shape of the screw groove for the sealing performance, the author examine in this paper theoretically a rectangular, semi-circular, fan-shaped and triangular cross-sections respectively.

As the results it is seen that in order to obtain the greatest sealing action i.e. the maximum pump lift without delivery, we should select the following shape of the groove;

- The depth of each screw groove be as shallow as possible.
- The triangular section is the most suitable when the ratio of the depth to the width of the groove remains constant.
- Among the triangular sections it seems that the isosceles one is superior to the others.

1. 緒 言

前報⁽³⁾では ねじ型粘性ポンプの密封性能の一般につき、ねじみぞの形状を長方形断面の1種類に限定して報告した。本論文では、みぞ断面としてこの他に半円形、扇形および三角形を選び、これらの各形状が密封性能に及ぼす影響を層流理論の下に比較検討したものである。

その際、回転子と円筒面との間には すきま (δ) はないものとし、したがって すきま における漏れ (q_l) はないとの仮定を設けたが、本仮定は自明のように、ただ ねじみぞ形状の密封性能に及ぼす影響のみを比較吟味する限りにおいて、なんら本質的な影響を与えるものではない。

2. 長方形みぞの場合

第1報⁽⁴⁾の基礎式(7)において、前述の仮定すなわち $\delta = \beta = 0$, $q = q_0 + q_l = 0$ とおくと、そのときの揚程 h は次式で与えられる。

$$h = \frac{12\nu l}{(K_2)_{\beta=0}gab^3} \cdot \frac{1}{2}(K_1)_{\beta=0}ab \cdot V \dots\dots(1)$$

ここで l は ねじみぞの長さ、 ν は流体の動粘度、 a はみぞの垂直幅、 b はみぞの深さ(第1図参照)、 V は移動壁の みぞ方向の分速度、 g は重力定数であり、

$$\left. \begin{aligned} (K_1)_{\beta=0} &= 1 - \frac{16}{\pi^3} \cdot \frac{1}{\alpha} \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \tanh \frac{(2m+1)\pi\alpha}{2} \\ (K_2)_{\beta=0} &= 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{1}{\alpha} \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^5} \cdot \tanh \frac{(2m+1)\pi\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots(2)$$

第1図 長方形みぞ

ただし $\alpha = \frac{a}{b}$ である。

更に $C_0 \equiv \frac{gh}{\nu l}$ を用いて (1) 式を書かえると次のようになる。

$$C_0 = \frac{6V}{b^2} \left(\frac{K_1}{K_2} \right)_{\beta=0} \dots\dots(1)'$$

今各種断面の みぞ につきその密封性能、すなわち流量 $q=0$ のときの揚程を比較するために、

$$\frac{C_0 \times (\text{移動壁の有効幅})^2}{(\text{移動壁の速度})} = H$$

とおき、この H をかりに密封性能数と呼ぶことにする。なお移動壁の有効幅と速度は各断面につき同じ値をとることはもちろんである。

よつて長方形断面の場合の密封性能数 (H_1) は(1)'式から直ちに求められる。

$$H_1 = \frac{C_0 \cdot a^2}{V} = 6a^2 \left(\frac{K_1}{K_2} \right)_{\beta=0} \dots\dots\dots (I)$$

次に各断面形の比較を行う必要上、固定壁の有効長さ
と移動壁の有効長さの比をもとめると

$$\xi_1 = \frac{2b+a}{a} = 1 + \frac{2}{\alpha} \dots\dots\dots (I)'$$

である。

3. 半円形みぞの場合

第1報のねじみぞ内の流動の式(1)は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{gh}{\nu l} \equiv C_0 \dots\dots\dots (3)$$

である。ここで v は みぞ 中の任意の点 (x, z) に
おける流速である。極座標に変換し

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = C_0 \dots\dots\dots (3)'$$

境界条件(第2図参照)

$$\left. \begin{array}{l} \theta=0, \theta=\pi \text{ のとき } v=0 \\ r=\rho \text{ のとき } v=V \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

の下に解いて、

$$v = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \left\{ \frac{V r^n}{n \rho^n} + \frac{C_0}{n(4-n^2)} \left(r^2 - \frac{r^n}{\rho^{n-2}} \right) \right\} \dots\dots\dots (5)$$

を得る。ここで n は奇の整数である。

次に第2図における固定壁と移動壁を入れかえるた
めに境界条件を次のように変更する。

$$\left. \begin{array}{l} \theta=0, \theta=\pi \text{ のとき } v'=V, \\ r=\rho \text{ のとき } v'=0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4)'$$

そのためには(5)式の V の符号をかえ、全体に V
を加えてやればよい。

$$v' = V - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \left\{ \frac{V r^n}{n \rho^n} + \frac{C_0}{n(n^2-4)} \left(r^2 - \frac{r^n}{\rho^{n-2}} \right) \right\} \dots\dots\dots (5)'$$

流量 q は

$$q = \int_0^\pi \int_0^\rho v' r \cdot dr \cdot d\theta = \frac{\pi \rho^2}{2} V - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{V \rho^2}{n^2(n+2)} + \frac{C_0 \rho^4}{4n^2(n+2)^2} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

である。仮定に従い $q=0$ とおくと

$$C_0 = \frac{\pi^2 - 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+2)}}{4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+2)^2}} \cdot \frac{V}{\rho^2} \dots\dots\dots (7)$$

ゆえに半円形みぞの密封性能数(H_2)は

$$H_2 = \frac{C_0(2\rho)^2}{V} = \frac{\pi^2 - 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+2)}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+2)^2}} = 34.276 \dots\dots\dots (II)$$

$$\text{また } \xi_2 = \frac{\pi}{2} = 1.571 \dots\dots\dots (II)'$$

である。

4. 扇形みぞの場合

第3図のごとく移動壁が円弧状の場合を考える。し

第3図 扇形みぞ

たが平面の移動壁の場合と直接
比較はできないが、参考のために求
めて見る。半円形の場合と全く同様
に解くことができる。ただし境界条
件は

$$\left. \begin{array}{l} \theta=0, \theta=2\phi \text{ のとき } v=0 \\ r=\rho \text{ のとき } v=V \end{array} \right\}$$

$$\dots\dots\dots (8)$$

である。また奇の整数 n の代りに $m = \frac{n\pi}{2\phi}$ を用いる
と(5)式と同様な次式を得る。

$$v = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\theta \left\{ \frac{V r^m}{n \rho^m} + \frac{C_0}{n(4-m^2)} \left(r^2 - \frac{r^m}{\rho^{m-2}} \right) \right\} \dots\dots\dots (9)$$

前例と同様に流量 q を求め、かつ $q=0$ とおくと、

$$C_0 = \frac{4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(m+2)}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(m+2)^2}} \cdot \frac{V}{\rho^2} \dots\dots\dots (10)$$

よつて扇形みぞの密封性能数(H_3)として

$$H_3 = \frac{C_0(2\phi\rho)^2}{V} = \frac{16\phi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(m+2)}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(m+2)^2}} \dots\dots\dots (III)$$

また

$$\xi_3 = \frac{2\rho}{2\phi \cdot \rho} = \frac{1}{\phi} \dots\dots\dots (III)'$$

である。個々の頂角(2ϕ)について求めた値を第1表
に示す。

第1表 扇形みぞの密封性能数

頂角 (2ϕ)	$\frac{2}{3}\pi(120^\circ)$	$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$	$\frac{\pi}{3}(60^\circ)$	$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$
$m = \frac{n\pi}{2\phi}$	$\frac{3}{2}n$	$\frac{\pi}{2}n$	$2n$	$3n$
H_3	64.629	59.698	41.178	22.869
ξ_3	0.955	1.000	1.273	1.910

5. 三角形みぞの場合

長方形 ($\alpha=2$), 半円形 ($\alpha=2$) の場合と比較するために, 特に第4図のごとき直角二等辺三角形 ($\alpha=2$) を選び, その斜辺を移動壁とする. 同図のごとき境界条件の下に前述の(3)式を解析的に解くことは困難なので, Runge の階差法⁽⁶⁾を用いて階差方程式に直し数値的に解いて見た.

第4図 三角形みぞ

(3) 式から直ちに次の階差方程式を得る.

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v_0 = \Delta h^2 \cdot C_0 \quad \dots\dots(11)$$

ここで第5図のごときみぞ断面を一边 Δh なる小正方形

に区分し, そのうち一つの稜の流速を v_0 とするとき, これに最も近接した稜の値を v_1, v_2, v_3 および v_4 とする.

上式を無次元化するため両辺を移動壁速度 V でわ

第6図 三角形みぞ

$$り, \frac{v}{V} = u, \quad \frac{\Delta h^2 \cdot C_0}{V} = K \quad \text{とおくと,}$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0 = K \quad \dots\dots(12)$$

であり, 境界条件は第6図に示すように,

$$\left. \begin{array}{l} OX \text{ 線上では } u=1 \\ XY \text{ 線上では } u=0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots(13)$$

第2表 三角みぞ

	a	b	c	d	e	f	定数	計算値
A	11 073	-17 504	8 642	-2 640	482	-95/2	(41K-11)/2	-0.700 336K+0.016 424
A'	2 084	-3 138	1 344	-322	40	-2	15K-5	-1.800 685K+0.067 600
a ₄	401	-560	194	-32	2	0	10K-4	-2.848 053K+0.152 246
a ₃	80	-98	24	-2	0	0	6K-3	-3.573 749K+0.269 905
a ₂	17	-16	2	0	0	0	3K-2	-3.789 019K+0.418 740
a ₁	4	-2	0	0	0	0	K-1	-3.346 045K+0.594 889
B	-1 569	2 756	-1 730	692	-162	79/4	(61K-21)/4	-1.327 175K+0.050 862
B'	-280	498	-296	98	-16	1	10K-4	-2.508 889K+0.135 744
b ₃	-49	92	-50	12	-1	0	6K-3	-3.328 961K+0.254 317
b ₂	-8	18	-8	1	0	0	3K-2	-3.618 141K+0.405 083
b ₁	-1	4	-1	0	0	0	K-1	-3.237 469K+0.584 519
C	97	-296	402	-280	97	-63/4	(39K-15)/4	-1.531 362K+0.085 548
C'	12	-50	80	-49	12	-1	6K-3	-2.615 073K+0.206 533
c ₂	1	-8	17	-8	1	0	3K-2	-3.117 109K+0.362 757
c ₁	0	-1	4	-1	0	0	K-1	-2.918 269K+0.551 989
D	-1	12	-49	80	-49	47/4	(25K-13)/4	-1.482 858K+0.123 511
D'	0	1	-8	17	-8	1	3K-2	-2.316 957K+0.287 423
d ₁	0	0	-1	4	-1	0	K-1	-2.406 495K+0.492 523
E	0	0	1	-8	17	-31/4	(11K-7)/4	-1.261 362K+0.170 899
E'	0	0	0	-1	4	-1	K-1	-1.728 444K+0.396 155
F	0	0	0	0	-1	15/4	(5K-5)/4	-0.915 170K+0.243 784
G	0	0	0	0	0	1/4	(1-K)/4	-0.483 061K+0.394 747

である。みぞは OY に対し対称なので、その半分 XOY のみについて考える。今 OX , OY をそれぞれ 8 等分し各稜の値 ($\mathfrak{U}$) を第 6 図のごとく定めるものとする。ここで a, b, c, d, e および f の 6 個を未知数として、(12) 式および境界条件 OX 線上で $\mathfrak{U}=1$ を用いて順次各点の値を決定すると第 2 表の通りである。

たとえば A および G の値を書いて見ると次の通りである。

$$A = 11\,073 \cdot a - 17\,504 \cdot b + 8\,642 \cdot c$$

$$-2\,640 \cdot d + 482 \cdot e - \frac{95}{2} \cdot f + \frac{41K-11}{2}$$

$$G = \frac{1}{4}(f+1-K)$$

第 2 表に示す各点の値は、 XY 線上で $\mathfrak{U}=0$ の境界条件を満足していない。この条件式を作ると次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} A' - 4A &= K \\ A' + B' - 4B &= K \\ B' + C' - 4C &= K \\ C' + D' - 4D &= K \\ D' + E' - 4E &= K \\ E' + f - 4F &= K \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

各式の左辺はいずれも 6 個の未知数 (a, b, c, d, e および f) の一次かん数である。よつて (14) 式の 6 個の方程式からこれら 6 個の未知数を決定することができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} a &= -2\cdot120\,222\,8K + 0\cdot791\,778\,9 \\ b &= -2\cdot067\,423\,2K + 0\cdot786\,113\,4 \\ c &= -1\cdot912\,000\,9K + 0\cdot768\,156\,4 \\ d &= -1\cdot662\,311\,7K + 0\cdot734\,523\,8 \\ e &= -1\cdot330\,750\,5K + 0\cdot677\,416\,4 \\ f &= -0\cdot932\,245\,6K + 0\cdot578\,986\,6 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

第 7 図 三角形みぞの速度分布 ($C_0=0$)

次にこれらの値を用いて計算した残りの各点の $\mathfrak{U}$ の値を第 2 表に示す。第 6 図において OY (A 線) に平行な (B 線), (C 線) 等の速度分布を図示すると

第 8 図 三角みぞの速度分布
($V=0, \Delta h^2 \cdot C_0 = -1$)

第 7 図, 第 8 図を得る。前者は移動壁速度 (V) のみによる速度分布を示し、後者は圧力こう配 (C_0) のみによる速度分布である。したがって圧力こう配 (C_0) と移動壁速度 (V) との比 (K) が与えられると、それぞれの K (流出量に左右される) の値に応じた実際の速度分布が求められるわけである。

次に各稜点の速度 $v = \mathfrak{U} \cdot V$ にその点を中心とする一辺の長さ Δh なる正方形を乗じ、みぞ内部の流量 q を求める。

$$\begin{aligned} q &= 64 \cdot \Delta h^2 \cdot \bar{v} \\ &= [7 \cdot 5 + \sum A + 2\{\sum B + \sum C \\ &\quad + \sum D + \sum E + \sum F + G\}] \times \Delta h^2 \cdot V \end{aligned} \dots\dots\dots(16)$$

ここで $\bar{v}$ は平均流速である。

$$\bar{v} = \frac{1}{64} \{26 \cdot 394\,8V - 103 \cdot 581\,2 \Delta h^2 C_0\} \dots\dots\dots(17)$$

仮定により $q=0$ すなわち $\bar{v}=0$ とおくと

$$(K)_{q=0} = \left(\frac{C_0 \cdot \Delta h^2}{V} \right)_{q=0} = 0 \cdot 254\,82 \dots\dots\dots(18)$$

よつて三角形みぞの密封性能数 (H_4) は

$$H_4 = \frac{C_0 (16 \Delta h)^2}{V} = 16^2 \cdot (K)_{q=0} = 65 \cdot 234 \dots\dots\dots(IV)$$

また

$$\xi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{2} = 1 \cdot 414\,2 \dots\dots\dots(IV)'$$

である。

なお $K=(K)_{q=0}=0.25482$ のときの みぞ内における合成速度分布を第9図に示してある。

第9図 三角形みぞの合成速度分布
($(K)_{q=0}=0.25482$)

6. 種々の断面形みぞの密封性能の比較

既述の長方形, 半円形, 扇形および三角形みぞの密封性能を次に比較検討しよう。

6.1 移動壁長さと最大みぞ深さとの関係 この場合長方形断面の移動壁長さ (a) と最大みぞ深さ (b) との比 $\alpha = \frac{a}{b}$ の値につき, 密封性能数を比較する。

第3表 長方形みぞの密封性能数

α	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	60
II_1	0.338	0.746	2.366	7.114	25.524	153.03	605.65	2410.9	21632
ξ_1	21	11	5	3	2	1.4	1.2	1.1	1.0333

第10図 長方形みぞにおける $\alpha=a/b$ の影響

第3表は各 α に対する II_1, ξ_1 の値を示し, また第10図にはこれらを図示してある。図によると α が大なるほどすなわち みぞ が浅ければ浅いほど II_1 は大きく, また当然のことながら ξ_1 は小さくなることがわかる。極限として $\alpha \rightarrow \infty$ すなわち みぞ が浅い場合が最も性能がよいようであるが, これはすぎまなし, すなわち $\delta = \beta = 0$ と仮定したためである。実際問題としては一般に $\beta \neq 0$ であり, しかもこのとき最大の H を与える α がある一定の有限値をとることは既に第2報において示しておいた通りである。

6.2 みぞ断面の形状について 移動壁の長さ, 最大みぞ深さとの比が常に 2:1 すなわち $\alpha=2$ の条件の下に, 長方形, 半円形, および三角形の密封性能数 H を ξ の値につき描いたものが第11図である。

第4表 各種みぞ断面の比較 ($\alpha=2$)

みぞ断面形	H	$H/H(\text{矩})$ %	ξ
長方形	25.524	100	2.000
半円形	34.460	135.01	1.571
三角形	65.234	255.58	1.414

また第4表には計算値を比較してある。図ならびに表からわかるように, 長方形みぞにくらべ半円形みぞは 135 %, 三角形みぞの場合は約 255% であつて, 三角形が最もすぐれていることがわかる。これは第11図に示す長方形断面の移動壁から最も離れた C および D なる両隅部が揚程増加に少しも貢献することなく,

むしろ吐出し流量なしとする密封作用の条件下には, みぞ内部の逆流を助成し, かつ揚程の減少を招くためと思われる。すなわち密封性能の観点からは, かかる不要有害部分を除くべきであり, 他方このことは

みぞの深さをできるかぎり浅くすべきであるとの前項の結論に合致するものである。以上により みぞ深さが みぞ幅 に対し一定の場合 (すなわち α 一定), ねじみぞの形状としては, 三角みぞが最も有効であることがわかる。またそれは実際の工作上からも好都合であろう。

6.3 移動壁面の形状について また第11図に種々の頂角 (2ϕ) を有する 扇形みぞ の密封性能を示してある。扇形の場合移動壁面は凹面をしている。いま $\alpha=2$ に相当する頂角 $2\phi=2(114^\circ 40')$ の扇形を三角形 ($\alpha=2$) と比較して見よう。 ξ の値は扇形の場合, 三角形にくらべ 40% 以上低下しているにもかかわらず, 密封性能数 H は約 10% も低い値を示している。これは結局移動壁面の形状によるものと考えてさしつか

第 11 図 各種断面の密封性能の比較

えないだろう。この推論を逆に拡張するとみぞ内へ凸状に突出した移動壁面は単に平面の場合よりなお一層有効と思われるが、我々の取り扱うねじ型粘性ポンプの型式では残念ながら平面の移動壁をもつて満足しなければならない。

6.4 三角形みぞについて 次に三角形みぞのうち今まで考えた直角二等辺三角形 ($\alpha=2$, $\xi=1.4142$) と他の形の三角形 (たとえば、第 12 図に示す ABD , $\alpha=2$, $\xi=1.6180$) と比較するの、に、 ξ の値は後者が大きい。すなわち直角二等辺三角形における ξ の値が最小である。第 12 図 三角みぞ長方形みぞにおける H と ξ との関係 (第 10 図) から推察して α 一定の場合、三角形みぞとしては、直角二等辺三角形の密封性能が最大であるだろうことが当然予測される。

7. 結 言

以上を要約すると次の通りである。

1) 長方形、半円形および扇形断面をもつみぞの一壁面がみぞ方向に移動するとき、みぞの中の速度分布および揚程、すなわち密封性能数をそれぞれ解析的に求め、また直角二等辺三角形については Runge の階差法を用いて、それらを数値的に計算した。

2) ねじ型粘性ポンプを密封装置として利用する場合、最も重要なみぞ断面の形状につき次のような結論を得た。

(i) 移動壁の長さ (みぞ幅) に対しみぞの深さはできるだけ浅くする方がよい。ただしすきまを考慮するとき α すなわちみぞの深さは一定の最適値をもっている。

(ii) みぞ断面 (固定壁) の形状としては α 一定の場合、長方形よりも半円形がよく、更に三角形断面が最もすぐれた密封性能を示す。

(iii) 移動壁面の形状としては、みぞに対し凹面が最も悪く凸面が最もすぐれていると推測されるがねじ型粘性ポンプではその構造上平面をもつてよしとしなければならない。

(iv) 三角形みぞのうちでは二等辺三角形 (斜辺を移動壁とする) が最適である。

最後に本研究にあたり、数値計算に助力された本校の松下柏郎君に感謝したい。

なお本研究は昭和 23 年度文部省科学研究費によるものであることを附記する。

注：一

- (1) 昭和 24 年 11 月 13 日 応用力学講演会において講演、原稿受付昭和 25 年 3 月 3 日。
- (2) 正員、群馬大学。
- (3) 浅沼、粘流性体による密封作用に関する研究 (第 2 報、ねじ型粘性ポンプの密封性能について)、機械学会論文集、17 巻 60 号、126 ページ (昭 26)。
- (4) "、同上 (第 1 報、ねじ型粘性ポンプのポンプ性能について)、機械学会論文集、17 巻 60 号、119 ページ (昭 26)。
- (5) 本式は、H. Rowell & D. Finlayson; Engg., Vol. 114 (1922—11) p. 606 に既に求めている。
- (6) 日高、数値積分法 (F) p. 110。