回転する球面かくの応力⁽¹⁾

中原 一郎⁽²⁾

Stresses in a Rotating Spherical Shell

by Ichirō NAKAHARA

Stress distributions in a rotating spherical shell is strikingly effected by the curvature and the thickness of the shell. A membrane theory which is useful in shell analyses, is not adapted for the shells with small curvature, and in the authors problem not comparable with the general theory of rotating disk. For this reason, the author studied the problem according to the Reissner-Meissner's method, which has led to the hypergeometric equation, and carried out numerical evaluations as to the shells with the free edge and showed that the results approach to the solutions of rotating disk as the curvature decrease and to the solutions in membrane theory as increase.

1. 緒 言

円板は球面かく(殻)の曲率が0になったものと考えうる。この球面かくがその対称軸のまわりに回転するときには垂直応力のみならず曲げ応力も生じ、回転円板とは著しく異なる応力状態を呈する。本文ではかかる応力成分の表示式を導き、一例として周辺自由な状態で回転する球面かくについて計算を行って、曲率が増すにつれて応力分布は円板状態から薄膜状態に移行することを示した。

2. 記 号

- φ かくの法線が対称軸とはさむ角度
- θ 子午面の位置を表わす角度
- r_0 かく上の点から対称軸までの距離
- r_1 子午線の曲率半径
- r_2 法線の長さ
- r 球面かくの半径
- R 対称軸から周辺までの距離、または円板の半径
- h かくの肉厚(肉厚は一様)
- t かくの高さ(第2図参照)
- Y, Z 子午線および法線方向の外力成分
- ω 回転角速度
- γ 単位体積の重量
- 超幾何級数に含まれるときのみは超幾何係数を意味する。
- $N_\varphi, N_\theta, M_\varphi, M_\theta, Q_\varphi$ 第1図に示される応力成分
- w, v 第1図に示される変位成分
- g 重力加速度

$1/m$ ポアソン比

E ヤング係数

D 曲げ剛性率

3. 平衡式と応力表示

第1図

まず図のような軸対称の かく を子午面とこれに垂直な面で細分し、その一つの面素 $ABCD$ に作用する軸対称外力と応力との平衡を考えれば次の平衡式が成立する。

$$d(N_\varphi r_0)/d\varphi - N_\theta r_1 \cos \varphi - r_0 Q_\varphi + r_1 r_0 Y = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$N_{\varphi}r_0 + N_{\theta}r_1 \sin \varphi + d(Q_{\varphi}r_0)/d\varphi + r_1r_0Z = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$d(M_{\varphi}r_0)/d\varphi - M_{\theta}r_1 \cos \varphi - Q_{\varphi}r_1r_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

そこで H. Reissner の取り扱い方⁽³⁾ にならって、(1), (2)式および変位と曲げモーメントとの関係から、新変数 U, V を

$$U = \frac{Q_{\varphi}r_0}{\sin \varphi} + \frac{G}{\sin \varphi \cos \varphi}, \quad V = \frac{1}{r_1} \left(v + \frac{dw}{d\varphi} \right)$$

$$G = \int_0^{\varphi} r_1r_0(Y \sin \varphi + Z \cos \varphi) d\varphi$$

と決めれば、次のような形に応力を表示しうる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{\varphi} &= \frac{1}{r_0} \left(U \sin \varphi - \frac{G}{\cos \varphi} \right), \\ N_{\varphi} &= -U \cos \varphi / r_0, \\ N_{\theta} &= -\frac{1}{r_1} \left(\frac{dU}{d\varphi} - \frac{G}{\cos^2 \varphi} - \frac{r_1r_2Y}{\cot \varphi} \right), \\ M_{\varphi} &= -D \left(\frac{1}{r_1} \frac{dV}{d\varphi} + \frac{V}{m} \frac{\cot \varphi}{r_2} \right), \\ M_{\theta} &= -D \left(V \frac{\cot \varphi}{r_2} + \frac{1}{mr_1} \frac{dV}{d\varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

4. 基礎方程式とその解

このようにすべての応力成分は二つの未知かん数 U, V で表わしうるから、これらを(3)式および変位と応力との関係に代入すれば次の二式を導くことができる。これらは平衡式を変位と応力との関係が満足されるように解く代りに用いられる。

$$\left. \begin{aligned} L(V) - \frac{V}{mr_1} - \frac{F_1}{D} &= -\frac{U}{D}, \\ L(U) - \frac{U}{mr_1} - \frac{F_2}{r_1} &= EhV, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで

$$\begin{aligned} L(U) &= \frac{1}{r_1^2} \left\{ r_2 \frac{d^2}{d\varphi^2} + \left(\frac{dr_2}{d\varphi} + r_2 \cot \varphi \right) \right. \\ &\quad \times \frac{d}{d\varphi} - \frac{r_1^2}{r_2} \cot^2 \varphi \left. \right\} U, \\ F_2 &= \left\{ \frac{1}{r_1} \frac{dr_2}{d\varphi} + \left(\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{m} \right) \cot \varphi \right\} \\ &\quad \times \left(\frac{G}{\cos^2 \varphi} + \frac{r_1r_2Y}{\cot \varphi} \right), \\ F_1 &= G / \cos \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

ただし上式は一定の h および r_1 をもつ かく に対しで導かれた式である。両式から U あるいは V を消去すれば

$$\left. \begin{aligned} LL(V) + \mu^4 V &= \frac{1}{D} L(F_1) + \frac{1}{mr_1} \cdot \frac{F_1}{D} - \frac{1}{D} \frac{F_2}{r_1}, \\ LL(U) + \mu^4 U &= \frac{1}{r_1} L(F_2) + Eh \frac{F_1}{D} - \frac{1}{mr_1} \frac{F_2}{r_1}, \\ \mu^4 &= Eh / D - (1/mr_1)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

右辺は荷重の種類によって決まる φ の かん数であるから、(6)式は左辺が全く同形の 4 階微分方程式を意味する。

球面かく では $r_1 = r_2 = r$ で、遠心力が作用するとき

$$Y = kr \sin \varphi \cos \varphi, \quad Z = -kr \sin^2 \varphi,$$

$$k = \gamma h \omega^2 / g,$$

とすることができから、(6)式は

$$\left. \begin{aligned} LL(V) + \mu^4 V &= -\frac{(3m+1)}{2m} \frac{kr^2}{D} \sin 2\varphi, \\ LL(U) + \mu^4 U &= -\frac{(3m+1)(5m+1)}{2m^2} kr \sin 2\varphi, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

と書き直される。

(7)式の解は右辺を 0 とおいた式の解と特別解とからなり、その中特別解 U^*, V^* は容易に求めえて、

$$U^* = d_1 kr^3 \sin 2\varphi, \quad V^* = d_2 kr^4 / D \sin 2\varphi,$$

$$d_1 = -\frac{(3m+1)(5m+1)}{2m^2(25+4\rho^4)}, \quad d_2 = -\frac{(3m+1)}{2m(25+4\rho^4)}.$$

また右辺を 0 とおいた式は互に共役な二つの微分方程式に分離され、そのおのおのは適当な変数およびかん数の変換によって超幾何微分方程式に導きうる。これが E. Meissner によって示されている⁽³⁾。そしてこの場合の超幾何係数 α, β, γ および変数 x は次式で与えられる。

$$\alpha, \beta = \frac{3 \pm \sqrt{(5+8i\rho^2)}}{4}, \quad \gamma = 2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$x = \sin^2 \varphi, \quad \rho^2 = r\mu^2/2.$$

この超幾何微分方程式の二つの独立解 z_1, z_2 に(8)を代入すれば、それらはそれぞれ実部と虚部に分れ、

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= F(\alpha, \beta, \gamma, x) = S_1 + iS_2, \\ z_2 &= F(\alpha, \beta, \gamma, x) \log x \\ &\quad + F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = S_3 + iS_4, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。よって(7)式の一般解は次の形で示される。

$$\left. \begin{aligned} U &= (A_1 S_1 + A_2 S_2 + A_3 S_3 + A_4 S_4) r \sin \varphi + U^*, \\ V &= (B_1 S_1 + B_2 S_2 + B_3 S_3 + B_4 S_4) r \sin \varphi + V^*. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここには八つの積分定数が含まれる。これは U, V を独立に求めたため U, V を結合している(5)式を考慮すれば、これら積分定数間には次の関係が成立し未知定数は四つに減ずる。

$$\begin{aligned} A_1 &= D(B_1/mr + \mu^2 B_2), \quad A_3 = D(B_3/mr + \mu^2 B_4), \\ A_2 &= D(B_2/mr - \mu^2 B_1), \quad A_4 = D(B_4/mr - \mu^2 B_3). \end{aligned}$$

5. 応 力 成 分

(10)式で表わされた U, V を(4)式に代入すれば、応力成分は次の形をとる。すなわち

$$\xi = A_1 S_1 + A_2 S_2 + A_3 S_3 + A_4 S_4,$$

第 1 表

 S_1 の 値

ρ^2	x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
50	1.0	0.996 004	—	—	—	—	0.871 313	0.459 767	-0.235 619	-1.183 17	-2.406 88	-3.471 22
100	1.0	0.980 265	—	—	—	—	0.466 993	-1.014 275	-3.004 44	-4.584 30	-4.324 99	-0.557 739
150	1.0	0.954 089	—	—	—	—	-0.144 244	-2.884 92	-4.771 25	-1.922 52	9.666 08	33.049 0
200	1.0	0.917 557	0.813 578	0.680 137	0.258 332	0.281 887	-0.939 632	-4.355 85	-2.191 62	13.107 4	40.077 4	55.602 3
250	1.0	0.870 787	0.669 116	0.263 373	-0.088 887	-0.928 630	-1.854 04	-4.536 30	6.846 84	37.079 7	53.569 6	-30.604 7
300	1.0	0.813 923	0.486 569	-0.127 702	-0.921 234	-1.636 66	-2.755 34	-2.567 42	22.242 0	54.194 2	-10.220 1	-311.287
350	1.0	0.747 149	0.268 306	-0.581 234	-1.083 09	-2.369 85	-3.591 73	2.164 36	40.189 3	36.139 7	-205.996	-697.297
400	1.0	0.681 926	-0.017 189	-1.604 90	-3.082 30	-3.082 30	-4.243 16	9.835 89	52.779 2	-49.188 9	-528.591	-519.369

 S_2 の 値

ρ^2	x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
50	0	-0.125 519	—	—	—	—	-0.626 750	-1.195 14	-1.598 60	-1.714 24	-1.408 16	-0.545 356
100	0	-0.250 480	—	—	—	—	-1.168 15	-1.693 54	-0.875 515	1.778 04	6.246 63	11.615 5
150	0	-0.373 925	—	—	—	—	-1.544 12	-0.977 913	3.066 76	9.562 01	13.553 3	5.007 80
200	0	-0.495 499	-0.733 681	-0.953 595	-1.331 44	-1.587 09	-1.681 11	1.155 77	9.605 82	15.438 6	0.880 177	-53.758 7
250	0	-0.614 453	-0.953 595	-1.152 67	-1.532 91	-1.677 69	-1.522 74	4.783 66	14.736 1	3.495 60	-62.307 1	-177.625
300	0	-0.730 142	-1.326 01	-1.650 53	-1.671 28	-1.579 10	-1.020 54	9.020 05	13.305 5	-37.048 8	-156.804	-185.130
350	0	-0.841 927	-1.468 97	-1.671 28	-1.584 05	-1.271 97	-0.173 974	12.912 6	-0.411 344	-105.387	-204.259	189.954
400	0	-0.949 179	-1.577 16	-1.584 05	-1.584 05	-0.737 802	1.034 58	15.035 5	-30.354 5	-177.450	408.268	3.554.89

 dS_1/dx の 値

ρ^2	x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
50	0.125	-0.928 447	—	—	—	—	-5.354 98	-11.113 3	-16.600 4	-21.052 3	-22.999 4	-22.443 1
100	0.125	-4.085 62	—	—	—	—	-20.923 6	-37.320 9	-39.651 5	-18.424 6	34.532 7	121.532 7
150	0.125	-9.325 46	-18.749 1	-27.863 3	-36.371 2	-43.965 7	-70.267 2	-57.342 5	-4.966 48	126.631	299.793	392.562
200	0.125	-16.614 9	-32.929 0	-47.923 5	-60.677 8	-70.267 2	-94.338 6	-41.486 1	156.487	455.156	549.988	-107.639
250	0.125	-25.907 7	-50.520 7	-71.556 1	-86.853 1	-109.666	-109.666	38.850 7	446.761	665.731	-305.710	-3.449.95
300	0.125	-37.144 5	-71.051 7	-97.201 0	-111.347	-130.114	-109.164	203.482	751.382	172.366	-3.250.70	-8.605.45
350	0.125	-50.253 3	-98.954	-123.022	-130.114	-128.738	-54.657 5	451.990	843.900	-1.751.28	-8.243.58	-8.629.45
400	0.125	-65.149 1	-118.569	-146.943	-128.738	-128.738	-54.657 5	755.102	414.555	-5.461.87	-11.609.6	11.445.6

 dS_2/dx の 値

ρ^2	x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
50	-12.5	-12.593 1	—	—	—	—	-12.276 5	-10.103 3	-5.623 68	1.447 69	11.251 0	23.671 1
100	-25.0	-24.987 9	—	—	—	—	-19.373 0	0.765 080	33.697 7	72.505 1	103.331	104.131
150	-37.5	-36.986 9	-34.658 0	-30.480 4	-24.459 9	-16.643 6	-16.643 6	44.408 1	104.507	129.075	-1.139 72	-356.498
200	-50.0	-48.393 6	-42.509 1	-32.358 7	-18.111 0	-0.101 967	-0.101 967	126.033	186.221	-14.881 1	-640.747	-1.552.36
250	-62.5	-59.014 0	-47.258 7	-27.503 1	-0.495 462	32.516 5	32.516 5	209.539	102.520	-706.134	-1.873.39	-2.278.77
300	-75.0	-68.656 8	-48.213 2	-14.647 5	29.886 5	82.047 2	82.047 2	267.760	-290.262	-1.835.27	-2.466.16	2.834.05
350	-87.5	-77.135 0	-44.736 1	7.190 75	73.660 6	147.286	147.286	239.245	-1.058.24	-2.919.57	638.262	26.386.8
400	-100.0	-84.261 8	-36.256 4	38.668 5	130.486	224.855	224.855	64.288 1	-2.138.57	-2.475.84	10.752.2	37.696.8

$$\eta = B_1 S_1 + B_2 S_2 + B_3 S_3 + B_4 S_4$$

とおけば

$$Q_\varphi = \xi \sin \varphi + d_2 \sin 2\varphi \cdot kr^2,$$

$$N_\varphi = -\xi \cos \varphi - 2d_1 \cos^2 \varphi \cdot kr^2,$$

$$N_\theta = -\xi \cos \varphi - d\xi/dx \cdot 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi \\ - (2d_1 \cos 2\varphi - \sin^2 \varphi) kr^2,$$

$$M_\varphi = -D/m \cdot \{\gamma(1+m) \cos \varphi + d\gamma/dx \cdot 2m \\ \sin^2 \varphi \cos \varphi\} - 2d_2/m \cdot (m \cos 2\varphi + \cos^2 \varphi) kr^3, \\ M_\theta = -D/m \cdot \{\gamma(1+m) \cos \varphi + d\gamma/dx \cdot 2 \sin^2 \varphi \cdot \\ \cos \varphi\} - 2d_2/m \cdot (\cos 2\varphi + m \cos^2 \varphi) kr^3.$$

また球面かくの場合には、変位成分も簡単に表わされる。

$$v/\sin \varphi = (1+m)/mEh \cdot \{\xi r \\ - kr^3(2d_1 \cos \varphi - \sin \varphi)\} + C, \\ w = v \cot \varphi - r/Eh \cdot (N_\theta - N_\varphi/m).$$

C: 積分定数

かくの中央に穴がない場合には通常の円板理論と同じ考え方をして、独立解 z_1 のみを用いればよい。

(11)式によって形式的な解は完全に表現されたけれども、実際にこれらの式を用いるためには級数(9)の実部 S_1, S_3 , 虚部 S_2, S_4 およびそれらの微係数の数値を知らねばならない。そこで本文では問題を中央に穴のない球面かくの場合に制限して、 $S_1, S_2, dS_1/dx, dS_2/dx$ の数値を計算して別表に示した⁽⁴⁾。

したがってこの表の範囲内では(8)式はあらゆる境界条件のもとで使用し得る。

6. 周辺自由な場合

一例として、周辺が何らの拘束もうけないで自由に対称軸のまわりに回転している球面かくに生ずる応力を計算して、回転円板の応力と比較してみよう。周辺が自由であるから、積分定数を決めるために次のような境界条件を用いることができる。

$$(N_\varphi)_\varphi = \varphi_0 = 0, \quad (M_\varphi)_\varphi = \varphi_0 = 0.$$

これらの条件のもとで計算した積分定数を用いて応力成分を表わし、球面かくの外周半径 R , すなわち $R = r \sin \varphi_0$ を一定にして $r \rightarrow \infty, \varphi_0 \rightarrow 0$ とすれば、 N_φ, N_θ は完全に回転円板の結果に一致し、 M_φ, M_θ は 0 になることを確かめうる。

また R が同一で曲率が異なる球面かくの垂直応力の分布を示したのが第 2 図である。一般に球面かくでは、円板に比べて中心応力は減少するが周辺の周方向応力は増加し、そして曲率が減少すればその応力分布は回転円板の応力分布に近づくが、曲率が増加すれば薄膜応力の分布⁽⁶⁾に近づいてくることがわかる。

最大曲げモーメントは中心に生じ、曲率が減少するにつれて次第に増加してくるがある形に達すると減少

第 2 図 回転する球面かくと回転円板との応力分布の比較

し始め円板に至って消失する。
次にこれらの分布を代表する応力として中心および周辺の値を選び、これらを異なる形の球面かくについて計算して第 3, 4 図に実線で示した。横軸にはかくの形状から決まる量 $(t/2R)$ をとり、縦軸には球面かくと円板との中心および周辺の応力比 $\lambda_\varphi, \lambda_\theta$ をとる。それゆえに、 $(t/2R) \rightarrow 0$ はその形が円板に近づくことで、この時それらの比は 1 に近づく円板の解に一致する。また $(t/2R)$ が増大するにつれて中心の応力比 λ_φ は 0 に近づく周辺の周方向応力比 λ_θ は 6 に近づく、いわゆる薄膜応力状態に近づいてくる。かくにはこれらの垂直応力以外に曲げ応力が生じているのでこれを附加すれば点線のごとく表わされる。

第 3 図

第 4 図

たとえば $r=240$ cm, $h=1$ cm, $R=40$ cm の球面 かく では $\rho^2=400$, $(t/2R)=0.05$ となるから, 第 3, 4 図より $\lambda_\varphi=0.72$, $\lambda_\theta=5.8$ が得られる. したがってこの球面 かく には中心では円板の中心応力の 0.72 倍, 周辺では円板の周方向応力の 5.8 倍の応力が生じていると考えられる.

7. 結 語

ここで得られた結果が実際に使用されるためには, (8)式で与えられるような係数 α, β, γ に対する超幾何級数の数値が必要となる. しかしここでは曲率の小さい かく に対する数値を掲げたに過ぎない. けれどもこの範囲外に属する かく, たとえば更に大きい曲率をもつ かく に対しては薄膜理論で十分に近似できるし, また (r/h) が更に大きいものに対しても類似の傾

向をもつことが類推される.

終りにこの研究の着想ならびに終始御指導を賜った津村教授に厚く感謝の意を表わしたい.

注:—

(1) 昭和 25 年 10 月 26 日 東京臨時大会において講演, 原稿受付 昭和 26 年 1 月 11 日.

(2) 正員, 東京工業大学.

(3) S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells, Chap. XII. p. 450~460.

(4) 級数 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ の収束は非常に緩慢で, $\rho^2(r/h)$ および $x(\varphi)$ の増加するほどますますゆるやかになる.

(5) 平衡式 (1), (2), (3) で $Q_\varphi=M_\varphi=M_\theta=0$ とおけば薄膜平衡式が得られる. これより直ちに

$$M_\varphi=0, \quad N_\theta=kr^2 \sin^2 \varphi,$$

が結論され, 周辺 ($\varphi=\varphi_0$) では $N_\theta=kR^2$, すなわち回転円板の周辺応力の 6 倍になる.

539.384.6

回転面の形をした かく の薄膜理論について⁽¹⁾

中 鉢 龍 雄⁽²⁾

On the Membrane Theory of Shell in Form of a Surface of Revolution

by Tatsuo CHUBACHI

In the membrane theory of a shell in form of a surface of revolution, using a relation between the fundamental magnitudes of a surface and by the selection of some suitable variable, it is shown that in general the equ. of stress resultant, the equ. of deformation and the equ. of neutral surface will be reducible to a differential equ. of second order with an invariant R_2^3/R_1 . Particularly, when the invariant is equal to a constant, the form of shell is a quadrics of revolution, and by this result the general solution of stress and deformation of shell in the form of a quadrics of revtion under an arbitrary distributed load is obtained. Furthermore the dispersion of stress under olua concentrated load is analysed by the method of complex variable.

回転面の形をした かく の薄膜理論は かく 理論における一つの基本的分野であるが軸対称変形の場合を除いては今までに知られている解は少い. 本報告においては回転面を構成する基本量間の関係式を使い, かつ適当な変数を選ぶことにより, 一般に任意の回転面の形をした かく において応力の方程式, 変形の方程式および中性面の形の方程式が R_2^3/R_1 を不変量とする規準形の 2 次微分方程式にまとめられることを導きこれによって分布荷重をうける回転 2 次曲面 かく の応力と変形の一般解および集中荷重をうけた場合の応力の分散について複素変数を利用して解析を行った.

1. 基礎方程式

曲線座標として中性面の母線上の点に関する任意の座標 θ および中心軸のまわりの回転角 ϕ をとる. 中性面の母線の接線方向およびこれと垂直な断面の接線

第 1 図

および法線方向の外力の成分を X, Y, Z , 断面の引圧応力を T_1, T_2 , せん断応力を S_1, S_2 , 主曲率半径を R_1, R_2 , 曲線座標に関する中性面の第 1

次の規格量を A^2, B^2 とすれば応力の平衡方程式は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} (BT_1) - A \frac{\partial S_2}{\partial \phi} - \frac{dB}{d\theta} T_2 + ABX &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (BS_1) + A \frac{\partial T_2}{\partial \phi} - \frac{dB}{d\theta} S_2 + ABY &= 0 \\ (T_1/R_1) + (T_2/R_2) + Z &= 0 \\ S_1 + S_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$