今断面に働く軸方向の応力の平均値を q とすれば

$$q = \frac{1}{\pi ab} \int \int Z_z dx' dy' \\ = \frac{E}{3-p} \{ (3-p)\beta - 2(1-p)B_0 \\ - \frac{1}{2}(a^2 - b^2)[(1-p)B_1 + kC_0] \}, \dots\dots\dots (28)$$

ここに E はヤング係数である。上記の関係から β は q の一次の項で表わすことができる。

前例と同一のら線棒の場合について(27)および(28)の関係式を解いて未定の定数を求めると

$$C_0 = 2.3565 k\beta, \quad \alpha = 1.4139 k\beta, \\ A_0 = -1.8851 k^2\beta, \quad B_0 = 0, \quad A_1 = -4.8148 k^2\beta, \\ B_1 = 1.1783 k^2\beta,$$

$$\text{および } \beta = \frac{q}{E[1 - 1.7673 k^2]}.$$

以上の計算で明らかなようにこの場合には α は 0 とはならない。したがってら線棒が引張りを受ける場合

にはねじりを伴うものであることがわかる。垂直応力 X'_x , Y'_y はいずれもだ円の中心で最大となるが、その値は $1.5 k^2 E\beta$ に過ぎないから、 Z_z に比較してはなほ小さい量である。 Z_z は断面上にほぼ一様に分布するが、だ円の短軸および長軸の両端でそれぞれ $(1 + 2.356 k^2) E\beta$ および $(1 - 9.425 k^2) E\beta$ となり、最大または最小値を取る。この場合にせん断応力の中で重要なのは X'_z で、短軸の両端で最大となり、その値は $1.5 k E\beta$ である。

終りに臨んでこの研究に熱心に助力した板垣研究補助に対し感謝の意を表する。

注：一

(1) 昭和26年4月3日 第28期定時總會講演會において講演，原稿受付 昭和26年4月10日。

(2) 正員，東北大學高速力学研究所。

(3) H. Love : The Mathematical Theory of Elasticity, 4th edition (1927) p. 133.

539.384.2 : 624.073.121

周辺に荷重を受ける正多角形板内の応力分布について⁽¹⁾

斎藤 秀雄⁽²⁾

On the Stress Distribution in a Regular Polygon

Plate under Forces on their Sides

by Hideo SAITO

In this paper, an attempt is made to clarify the stress distribution in a regular polygon plate subjected to the action of forces in its plane on each side. To get a solution of the problem, we used the Schwarz-Christoffel's conformal transformation.

This method of solution was applied to the case of a regular polygon plates under a concentrated force P on the middle of their each side and as the numerical examples, the following three cases were treated.

(2) The equilateral triangular and square plates loaded by a concentrated pressure $-P$ on the middle of each side.

(2) The square plate loaded by a concentrated pressure $-P$ and tension P on the middle of each side alternately.

(3) The square plate loaded by a concentrated pressure $-P$ on the two opposite sides.

1. 緒 言

周辺に外力を受ける多角形板内の二次元的応力分布を求める問題については Love⁽³⁾, Kohl⁽⁴⁾ 等により等角写像を用いた解法が発表され、Love は四辺埋込の四角形板、Kohl は角に外力を受ける正三角形板にこれを適用しているが具体的な問題に応用することはなかなか面倒なようである。一方等角写像を用いない解法として、久野⁽⁵⁾、大久保⁽⁶⁾各氏の長方形板の研究があるがこれも数値計算を行う場合は相当の手数をする。最近樋口教授はこの数値計算の繁雑さを避ける

目的で長方形板の近似解法を発表された⁽⁷⁾。以上のようにより多角形板内の応力解析はなかなか面倒な問題であり長方形板以外のものにはいまだ見るべきものがないように思われる。本研究はこの問題の一つとして各周辺に同形の荷重を受ける正多角形板内の応力分布を求める一方法を考え、これを用いて各辺中央に集中荷重を受ける正三角形板および正四角形板内の応力分布を求めたものである。

2. 計算の方法

二次元問題の応力分布は内部において、

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

を、かつ周辺においてはその境界条件を満たす χ を求めれば x, y 平面の応力として

$$\widehat{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \widehat{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \widehat{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

が与えられる。

今 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ とすれば (2.1) を満たす一般解は Muschelisvili⁽⁸⁾ の所論に従い

$$2\chi = \bar{z}\varphi_1(z) + z\bar{\varphi}_1(\bar{z}) + \psi_2(z) + \bar{\psi}_2(\bar{z}) \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} + \widehat{yy} &= 2[\Phi_1(z) + \bar{\Phi}_1(\bar{z})], \\ \widehat{yy} - \widehat{xx} + 2i\widehat{xy} &= 2[\bar{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)], \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.3')$$

ただし $\Phi_1(z) = \varphi_1'(z), \Psi_1(z) = \psi_1'(z),$

$$\psi_2(z) = \int \psi_1(z) dz, \quad \bar{\varphi}_1(\bar{z}), \bar{\psi}_2(\bar{z}) \text{ はそれぞれ}$$

れ $\varphi_1(z), \psi_2(z)$ の共役かん数。

さて z 平面の領域 B , 境界 C が $z = w(\zeta), \zeta = \rho e^{i\theta}$ により ζ 平面の単位円 $|\zeta| < 1$ および $|\zeta| = 1$ に 1 対 1 に写像されるものとし, ζ 平面での極座標 (ρ, θ) を考え, θ 一定, ρ 一定に対応する z 平面の曲線座標を ρ 線, θ 線, この接線方向を ρ 軸, θ 軸, 応力の成分を $\widehat{\rho\rho}, \widehat{\theta\theta}, \widehat{\rho\theta}$ とすると点 (ρ, θ) においては

$$\begin{aligned} \widehat{xx} + \widehat{yy} &= \widehat{\rho\rho} + \widehat{\theta\theta}, \\ \widehat{yy} - \widehat{xx} + 2i\widehat{xy} &= e^{-2i\gamma}(\widehat{\theta\theta} - \widehat{\rho\rho} + 2i\widehat{\rho\theta}) \quad \dots\dots\dots (2.4) \end{aligned}$$

γ は x 軸と ρ 軸とのなす角で

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dw}{d\zeta} e^{i(\gamma - \theta)} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

したがって $\widehat{\rho\rho} + \widehat{\theta\theta} = 2[\Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta})], \quad \dots\dots\dots (2.6)$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta\theta} - \widehat{\rho\rho} + 2i\widehat{\rho\theta} &= -\frac{2\zeta^2}{\rho^2 \bar{w}'(\bar{\zeta})} [\bar{w}(\bar{\zeta}) \Phi'(\zeta) + w'(\zeta) \Psi(\zeta)]. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

(2.6), (2.7) から

$$\begin{aligned} \widehat{\rho\rho} - i\widehat{\rho\theta} &= \Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) \\ &- \frac{\zeta^2}{\rho^2 \bar{w}'(\bar{\zeta})} [\bar{w}(\bar{\zeta}) \Phi'(\zeta) + w'(\zeta) \Psi(\zeta)]. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } \Phi(\zeta) &= \Phi_1(w(\zeta)) = \frac{\varphi_1'(\zeta)}{w'(\zeta)}, \\ \Psi(\zeta) &= \Psi_1(w(\zeta)) = \frac{\psi_1'(\zeta)}{w'(\zeta)}. \end{aligned}$$

正 n 多角形を単位円に写像する式 $w(\zeta)$ は Schwarz-Christoffel の変換を用いて

$$z = w(\zeta) = l \int_0^\zeta \frac{dz}{(1 - \zeta^n)^{2/n}}.$$

これを級数に展開すると

$$\begin{aligned} w(\zeta) &= l \sum_{q=0}^{\infty} \frac{c_q}{q n + 1} \zeta^{q n + 1}, \\ c_0 &= 1, \quad c_q = \frac{2(n+2)(2n+2) \cdots \{(q-1)n+2\}}{n^q q!} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots (2.9)$$

(2.9) において $\rho = 1$ とおけば正 n 多角形の周辺が θ のかん数として与えられる。第 1 図, 第 2 図は正三角形, 正四角形の場合を図示したものである。

第 1 図

第 2 図

さて荷重の種類により場合を分けて考察しよう。

(i) 各边上同一の荷重を受ける場合 $\Phi(\zeta), \Psi(\zeta)$

を

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} A_q \zeta^{qn}, \\ \Psi(\zeta) &= \frac{1}{\zeta^2 w'(\zeta)} \sum_{q=1}^{\infty} B_q \zeta^{qn} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

とおき (2.9) と共に (2.8) に代入し

$$\zeta = \rho e^{i\theta} = \rho \sigma, \quad \bar{\zeta} = \rho e^{-i\theta} = \rho \sigma^{-1}$$

を利用すれば

$$\begin{aligned} \bar{w}'(\bar{\zeta}) [\widehat{\rho\rho} - i\widehat{\rho\theta}] &= l \sum_{r=0}^{\infty} \sigma^{-rn} [\rho^{rn} \alpha_r^{(1)} \\ &+ (rn+1) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_{q+r} A_q}{(r+q)n+1} \rho^{(2q+r)n}] \\ &- l \sum_{r=1}^{\infty} \sigma^{rn} [B_r \rho^{rn-2} \\ &+ (rn-1) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{c_q A_{q+r}}{qn+1} \rho^{(2q+r)n}], \quad \dots\dots\dots (2.11) \end{aligned}$$

$$\text{ここに } \alpha_r^{(1)} = \sum_{q=0}^r c_q A_{r-q}.$$

正 n 多角形板の周辺上に作用する外力は一般に

$$\left. \begin{aligned} [\widehat{\rho\rho}]_{\rho=1} &= \frac{R_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} R_q \cos qn\theta, \\ [\widehat{\rho\theta}]_{\rho=1} &= \sum_{q=1}^{\infty} S_q \sin qn\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.12)$$

の Fourier 級数に書き表わされるからこれを用いて

$$\left. \begin{aligned} [\widehat{\rho\rho} - i\widehat{\rho\theta}]_{\rho=1} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} b_r \sigma^{rn}, \\ b_0 &= \frac{R_0}{2}, \quad b_{\pm r} = \frac{R_r \pm S_r}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.13) *$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{c_q A_q}{qn+1} &= \sum_{q=0}^{\infty} c_q b_q, \\ c_r A_0 + \sum_{q=1}^r \left\{ c_{r-q} + \frac{(rn+1)c_{q+r}}{(r+q)n+1} \right\} A_q + (rn+1) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_{2r+q} A_{q+r}}{(2r+q)n+1} &= \sum_{q=0}^{\infty} b_{q-r} c_q, \\ -B_r &= \sum_{q=0}^{\infty} b_{r+q} c_q + (rn-1) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{c_q A_{r+q}}{qn+1}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.15)$$

ここに $r=1, 2, 3, \dots\dots\dots$

更に

$$\left. \begin{aligned} R^{(1)} + iI^{(1)} &= \bar{w}'(\bar{\zeta}) [\Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta})] - \frac{\xi^2}{\rho^2} [\bar{w}(\bar{\zeta}) \Phi'(\zeta) + w'(\zeta) \Psi(\zeta)], \\ \beta_r^{(1)} / l &= \alpha_r^{(1)} \rho^{rn} + (rn+1) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_{q+r} A_q}{(r+q)n+1} \cdot \rho^{(r+2q)n}, \\ \delta_r^{(1)} / l &= \sum_{q=0}^{\infty} \left[c_q b_{q+r} \rho^{rn-2} + \frac{(rn-1)}{qn+1} c_q A_{r+q} (\rho^{rn-2} - \rho^{(r+2q)n}) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.16)$$

と記せば

$$\left. \begin{aligned} R^{(1)} &= \beta_0^{(1)} + \sum_{q=1}^{\infty} (\beta_q^{(1)} + \delta_q^{(1)}) \cos qn\theta, \\ I^{(1)} &= \sum_{q=1}^{\infty} (\delta_q^{(1)} - \beta_q^{(1)}) \sin qn\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.17)$$

となる。一方 $w'(\zeta) = \xi + i\eta$, $\bar{w}'(\bar{\zeta}) = \xi - i\eta$ (2.18)

であるから (2.18), (2.17) の関係を (2.8) に代入すれば

$\widehat{\rho\rho}$, $\widehat{\rho\theta}$ は

$$\widehat{\rho\rho} = \frac{\xi R^{(1)} + \eta I^{(1)}}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \widehat{\rho\theta} = \frac{\xi I^{(1)} - \eta R^{(1)}}{\xi^2 + \eta^2} \dots\dots\dots (2.19)$$

$\widehat{\theta\theta}$ は (2.6) を用いて求められる。

(ii) 各辺上交互に反対荷重を受ける場合 $\Phi(\zeta)$,

$\Psi(\zeta)$ の形は *

$$\left. \begin{aligned} \sum_{q=0}^r \left[-c_{r-q} + \frac{(2r+1)n+2}{2\{(r+q)n+1\}} c_{q+r} \right] C_q + \frac{(2r+1)n+2}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_{2r+q} C_{r+q}}{(2r+q)n+1} &= \sum_{q=0}^{\infty} e_{q-r} c_q, \\ -D_r &= \sum_{q=0}^{\infty} e_{r+q} c_q + \frac{(2r+1)n-2}{2} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{c_q C_{r+q}}{qn+1}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.22)$$

ここに $r=0, 1, 2, 3, \dots\dots\dots$

を得る。

次に応力を考えれば

$$\left. \begin{aligned} \beta_r^{(2)} / l &= -\rho^{\frac{(2r+1)n}{2}} - \sum_{q=0}^r c_q C_{r-q} + \frac{(2r+1)n+2}{2} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{c_{r+q} C_q}{(r+q)n+1} \cdot \rho^{\frac{2(2q+r)+1}{2}n}, \\ \delta_r^{(2)} / l &= \rho^{\frac{(2r+1)n}{2} - 2} \sum_{q=0}^{\infty} b_{q+r} c_q + \frac{(2r+1)n-2}{2} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{c_q C_{q+r}}{qn+1} \left(\rho^{\frac{(2r+1)n}{2} - 2} - \rho^{\frac{2(2q+r)+1}{2}n} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.23)$$

*と書くことができる。ゆえにこれと (2.9) とから

$$\bar{w}'(\bar{\sigma}) [\widehat{\rho\rho} - i\widehat{\rho\theta}]_{\rho=1} = l \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_q b_{q+r} \sigma^{rn} \dots\dots\dots (2.14)$$

を得る。

次に (2.11) において $\rho=1$ とおきこの左辺に (2.14)

を代入し σ^{rn} の項を左, 右両辺等置すれば未定係数

A_q , B_r を定める次の連立一次方程式群が得られる。

$$\left. \begin{aligned} * \quad \Phi(\zeta) &= -i \sum_{q=0}^{\infty} C_q \xi^{\frac{(2q+1)n}{2}}, \\ \xi^2 w'(\zeta) \Psi(\zeta) &= -i \sum_{q=0}^{\infty} D_q \xi^{\frac{(2q+1)n}{2}}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.20)$$

この場合の周辺の荷重は

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\rho\rho} &= \sum_{q=0}^{\infty} Q_q \sin \frac{(2q+1)n}{2} \theta, \\ \widehat{\rho\theta} &= \sum_{q=0}^{\infty} T_q \cos \frac{(2q+1)n}{2} \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.21)$$

で与えられるから

$$e_{\pm q} = \frac{\pm Q_q + T_q}{2}$$

と記して (2.15) に対応して C_q , D_q 間に成立する関係式

$$\left. \begin{aligned} R^{(2)} &= \sum_{q=0}^{\infty} (\delta_q^{(2)} - \beta_q^{(2)}) \sin \frac{(2q+1)n}{2} \theta, \\ I^{(2)} &= \sum_{q=0}^{\infty} (\delta_q^{(2)} + \beta_q^{(2)}) \cos \frac{(2q+1)n}{2} \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

を用いて $\widehat{\rho\rho}$, $\widehat{\rho\theta}$ を与える (2.19) と同形の式が得られる。

3. 応 用 例

(a) 各辺上の中央に圧縮力 P が作用する場合

各辺上 $\theta = (2m-1)\pi/n \pm \omega$, $m=1, 2, \dots, n$ の小範囲に分布する強さ p の圧縮荷重は (2.12) を用いて

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\rho\rho} &= -\frac{2p}{\pi} \left[\frac{n\omega}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q \sin qn\omega}{q} \cos qn\theta \right], \\ \widehat{\rho\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

となる。今 ω がはなはだ小さい集中荷重を考えれば $\sin qn\omega \doteq qn\omega$ において

$$\widehat{\rho\rho} = -\frac{pn\omega}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \cos qn\theta \right] \quad (3.1')$$

ゆえに (2.13) において

$$b_0 = -\frac{pn\omega}{\pi}, \quad b_{\pm r} = (-1)^r \left(-\frac{pn\omega}{\pi} \right)$$

となり $\sum_{q=0}^{\infty} b_{q-r} c_q = (-1)^r \left(-\frac{pn\omega}{\pi} \right) \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q c_q$

で与えられる。しかるに右辺の級数は

$$\sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q c_q = 1/2^{2/n}$$

と書き直せるから

$$\sum_{q=0}^{\infty} b_{q-r} c_q = \left(-\frac{pn\omega}{\pi} \right) \frac{(-1)^r}{2^{2/n}} \quad (3.2)$$

これを (2.15) に代入し係数を決定すれば板内の応力分布が求まることになる。

(b) 圧力、張力が交互に各辺上中央に作用する場合 (辺数が偶数の正多角形の場合)

辺上中央における荷重分布状態を (a) と同じと考えれば

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\rho\rho} &= -\frac{2pn\omega}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^{q+1} \sin \frac{(2q+1)n}{2} \theta, \\ \widehat{\rho\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

ゆえに $e_{\pm r} = \pm (-1)^r \left(-\frac{pn\omega}{\pi} \right)$,

$$\sum_{q=0}^{\infty} e_{q-r} c_q = \left(-\frac{pn\omega}{\pi} \right) \frac{(-1)^{r+1}}{2^{2/n}} \quad (3.4)$$

これを (2.22) に代入して係数が求められる。

さて正 n 多角形板の内接円の半径を a とすれば (2.9) より

$$a = l \left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q c_q}{qn+1} \right).$$

また荷重の作用する範囲 $\theta = (2m-1)\pi/n \pm \omega$, $m=1, 2, 3, \dots, n$ に相当する辺上の長さを $2h$ とすると ω と h の関係は

$$\omega = \frac{h}{a} \cdot 2^{2/n} \left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q c_q}{qn+1} \right)$$

ゆえに与えられるから集中荷重を $P (=2ph)$ とすれば

$$\frac{pn\omega}{\pi} = \frac{Pn}{2\pi a} \cdot 2^{2/n} \left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q c_q}{qn+1} \right)$$

となる。

第 3 図

数値計算は第 3 図 (a), (b) および第 4 図に示す正三角形, 正四角形について

行い逐次近似法を用いて係数を決定した。この級数にあらわれる級数は交番級数であるので

第 4 図

$$\sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q v_q \doteq \sum_{q=0}^{m-1} (-1)^q v_q + \frac{1}{2} v_m + \frac{1}{4} (v_m - v_{m+1})^{(9)}$$

を用い誤差の伴いを小さくするようにした。また (2.6) から周辺の $\widehat{\theta\theta}$ を計算するのには次の

式を用いた。すなわち

第 1 表 係数の値 (第 3 図の場合, 単位 $-\frac{pn\omega}{\pi}$)

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
$n=3$	0.7338	-0.9471	1.0261	-0.9858	1.0085	-0.9945	1.0036	-0.9974	1.0019	-0.9986	1.0018
$n=4$	0.7757	-0.9702	1.0213	-0.9859	1.0099	-0.9927	1.0056	-0.9955	1.0037	-0.9970	

第 2 表 係数の値 (第 4 図の場合, 単位 $-\frac{pn\omega}{\pi}$)

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
$n=4$	0.8962	-0.9942	1.0039	-0.9979	1.0013	-0.9992	1.0005	-0.9996	1.0002	-0.9998	1.0001

$\widehat{\rho\rho}/-\frac{P}{a}$ 第 3 表 応力の値(第3図(a)の場合)

θ	ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	0.491	0.198	0.012	0.017	0.066	0	
$\pi/24$	0.491	0.219	0.036	0.021	0.059	0	
$\pi/12$	0.491	0.281	0.113	0.046	0.052	0	
$\pi/8$	0.491	0.374	0.249	0.113	0.048	0	
$\pi/6$	0.491	0.487	0.436	0.269	0.084	0	
$5\pi/24$	0.491	0.604	0.671	0.570	0.177	0	
$\pi/4$	0.491	0.705	0.913	1.05	0.639	0	
$7\pi/24$	0.491	0.774	1.10	1.61	2.17	0	
$\pi/3$	0.491	0.799	1.17	1.87	4.00		

 $\widehat{\theta\theta}/-\frac{P}{a}$

θ	ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	0.491	0.765	0.819	0.524	0.108	0	
$\pi/24$	0.491	0.745	0.804	0.536	0.113	-0.189	
$\pi/12$	0.491	0.688	0.755	0.564	0.135	-0.304	
$\pi/8$	0.491	0.600	0.664	0.593	0.205	-0.375	
$\pi/6$	0.491	0.495	0.535	0.591	0.325	-0.408	
$5\pi/24$	0.491	0.386	0.365	0.508	0.564	-0.433	
$\pi/4$	0.491	0.292	0.185	0.291	0.793	-0.444	
$7\pi/24$	0.491	0.228	0.040	-0.017	0.544	-0.449	
$\pi/3$	0.491	0.205	-0.016	-0.181	-0.273		

 $\widehat{\rho\theta}/-\frac{P}{a}$

θ	ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	0	0	0	0	0	0	
$\pi/24$	0	0.107	0.143	0.077	0.015	0	
$\pi/12$	0	0.200	0.281	0.184	0.054	0	
$\pi/8$	0	0.264	0.401	0.306	0.095	0	
$\pi/6$	0	0.290	0.485	0.470	0.191	0	
$5\pi/24$	0	0.272	0.502	0.641	0.361	0	
$\pi/4$	0	0.211	0.425	0.715	0.823	0	
$7\pi/24$	0	0.115	0.247	0.517	1.560	0	
$\pi/3$	0	0	0	0	0	0	

 $\widehat{\rho\rho}/-\frac{P}{a}$ 第 4 表 応力の値(第3図(b)の場合)

θ	ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	0.648	0.537	0.253	0.043	0.066	0	
$\pi/24$	0.648	0.552	0.307	0.081	0.044	0	
$\pi/12$	0.648	0.593	0.437	0.213	0.032	0	
$\pi/8$	0.648	0.648	0.631	0.495	0.139	0	
$\pi/6$	0.648	0.703	0.846	0.962	0.567	0	
$5\pi/24$	0.648	0.745	1.02	1.50	2.01	0	
$\pi/4$	0.648	0.761	1.09	1.76	3.80		

 $\widehat{\theta\theta}/-\frac{P}{a}$

θ	ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	0.648	0.754	0.962	0.884	0.316	0	
$\pi/24$	0.648	0.740	0.919	0.880	0.362	-0.330	
$\pi/12$	0.648	0.701	0.816	0.850	0.485	-0.403	
$\pi/8$	0.648	0.648	0.662	0.744	0.667	-0.419	
$\pi/6$	0.648	0.595	0.490	0.507	0.869	-0.426	
$5\pi/24$	0.648	0.556	0.353	0.188	0.616	-0.431	
$\pi/4$	0.648	0.541	0.295	0.021	-0.219		

 $\widehat{\rho\theta}/-\frac{P}{a}$

θ	ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	0	0	0	0	0	0	
$\pi/24$	0	0.054	0.204	0.184	0.057	0	
$\pi/12$	0	0.094	0.338	0.384	0.165	0	
$\pi/8$	0	0.109	0.370	0.581	0.373	0	
$\pi/6$	0	0.095	0.303	0.676	0.805	0	
$5\pi/24$	0	0.055	0.167	0.497	1.30	0	
$\pi/4$	0	0	0	0	0	0	

第 5 表 応力の値(第7図の場合)

 $\widehat{\rho\rho}/-\frac{P}{a}$

θ	ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$-\pi/4$	-0.316	-0.264	-0.156	-0.117	-0.015	0	
$-5\pi/24$	-0.294	-0.248	-0.151	-0.064	-0.010	0	
$-\pi/6$	-0.202	-0.203	-0.135	-0.062	-0.009	0	
$-\pi/8$	-0.118	-0.126	-0.105	-0.057	-0.007	0	
$-\pi/12$	0.004	-0.020	-0.056	-0.046	0.000	0	
$-\pi/24$	0.159	0.113	0.019	-0.022	0.020	0	
0	0.324	0.269	0.127	0.022	0.033	0	
$\pi/24$	0.490	0.439	0.288	0.103	0.024	0	
$\pi/12$	0.644	0.613	0.493	0.259	0.032	0	
$\pi/8$	0.776	0.774	0.736	0.502	0.146	0	
$\pi/6$	0.906	0.906	0.932	1.02	0.576	0	
$5\pi/24$	0.942	0.943	1.17	1.56	2.03	0	
$\pi/4$	0.964	1.02	1.24	1.77	3.82	...	

 $\widehat{\theta\theta}/-\frac{P}{a}$

θ	ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$-\pi/4$	0.964	0.854	0.600	0.328	0.111	-0.036	
$-5\pi/24$	0.942	0.841	0.599	0.331	0.110	-0.043	
$-\pi/6$	0.906	0.800	0.596	0.340	0.103	-0.060	
$-\pi/8$	0.776	0.732	0.587	0.357	0.105	-0.088	
$-\pi/12$	0.644	0.637	0.570	0.380	0.110	-0.123	
$-\pi/24$	0.490	0.424	0.536	0.409	0.123	-0.137	
0	0.324	0.377	0.481	0.442	0.158	0	
$\pi/24$	0.159	0.128	0.382	0.471	0.240	-0.193	
$\pi/12$	0.004	0.063	0.246	0.470	0.374	-0.280	
$\pi/8$	-0.118	-0.084	0.075	0.388	0.562	-0.331	
$\pi/6$	-0.202	-0.205	-0.106	0.167	0.766	-0.367	
$5\pi/24$	-0.294	-0.285	-0.247	-0.143	0.506	-0.388	
$\pi/4$	-0.316	-0.314	-0.306	-0.307	-0.329		

 $\widehat{\rho\theta}/-\frac{P}{a}$

θ	ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$-\pi/4$	0	0	0	0	0	0	
$-5\pi/24$	0.166	0.133	0.084	0.013	-0.039	0	
$-\pi/6$	0.320	0.261	0.153	0.030	-0.069	0	
$-\pi/8$	0.452	0.379	0.210	0.052	-0.089	0	
$-\pi/12$	0.554	0.481	0.274	0.088	-0.092	0	
$-\pi/24$	0.618	0.559	0.362	0.139	-0.080	0	
0	0.640	0.606	0.454	0.214	-0.064	0	
$\pi/24$	0.618	0.613	0.565	0.323	-0.023	0	
$\pi/12$	0.554	0.575	0.612	0.471	0.073	0	
$\pi/8$	0.452	0.488	0.580	0.633	0.284	0	
$\pi/6$	0.320	0.355	0.456	0.706	0.736	0	
$5\pi/24$	0.166	0.187	0.251	0.510	1.26	0	
$\pi/4$	0	0	0	0	0	0	

$$\frac{1-\rho^{2n}}{1+2\rho^n \cos n\theta + \rho^{2n}} = 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \rho^{qn} \cos qn\theta,$$

$$\frac{2(1-\rho^n) \rho^{\frac{n}{2}} \sin(n\theta/2)}{1+2\rho^n \cos n\theta + \rho^{2n}}$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \rho^{\frac{(2q+1)n}{2}} \sin \frac{(2q+1)n}{2} \theta$$

を利用し(a)の場合

$$\widehat{\theta\theta} = \left(-\frac{pn\omega}{\pi} \right) \left[\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1-\rho^{2n}}{1+2\rho^n \cos n\theta + \rho^{2n}} \right. \\ \left. + 2 \left\{ (A_0-1) + 2 \sum_{q=1}^{\infty} (A_q - (-1)^q) \cos qn\theta \right\} \right],$$

b)の場合

$$\widehat{\theta\theta} = \left(-\frac{pn\omega}{\pi} \right) \left[\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2(1-\rho^n) \rho^{\frac{n}{2}} \sin(n\theta/2)}{1+2\rho^n \cos n\theta + \rho^{2n}} \right. \\ \left. + 4 \sum_{q=0}^{\infty} \{ C_q - (-1)^q \} \sin \frac{(2q+1)n}{2} \theta \right].$$

応力の計算は第1図, 第2図に示す正三角形, 正四角形について行い, ρ 線, θ 線の交点の各点においてこれを求めた. 結果を次の諸表および図に示す.

第5図, 第6図は上表をもとにして描いた最大せん

第 5 図 (単位 P/a)

第 6 図 (単位 P/a)

断応力一定曲線(等色線図)である.

正四角形の対辺中央に集中圧力 P の働く第7図の

第 7 図

対辺に集中荷重を受ける正方形板の大久保博士の解⁽⁶⁾と比べるとよく一致することが確かめられる.

第 8 図 (単位 P/a)

4. 結 語

以上この研究は各周辺上に荷重を受ける正多形板内の応力分布を求める一方法を考え, これを各周辺中央に集中荷重が作用する正多角形板にこれを適用し我々の目に最もふれる正三角形, 正四角形板について数値計算を行い応力分布状況を明らかにしたものである. 終りに絶えざる御激励をいただいた樋口盛一先生に深甚の謝意を表する次第である.

注:—

(1) 昭和 24 年 12 月 10 日 仙臺地方講演會において講演, 原稿受付 昭和 26 年 5 月 28 日.

(2) 正員, 東北大學工學部.

(3) A. E. H. Love, London, Math. Soc. Proc., Vol. 29 (1929).

(4) E. Kohl, Z. f. Angew. Math. u. Mech., Bd. 11, S. 141 (1930).

(5) J. Kuno, Phil. Mag., Vol. 13, p. 810 (1932).

(6) 大久保, 機械學會論文集, 8 卷 33 號, 185 ページ (昭 17).

(7) 樋口, 森川, 小澤, 東北大學工學部内力および弾性學研究室報告, 第 2 號, 6 ページ (昭 24).

(8) N. Muschelisvili, Z.f. Angew. Math. u. Mech., Bd. 13, S. 264 (1933).

(9) Bronwich, Theory of Infinite Series, p. 62.