短円柱および円盤の軸対称変形⁽¹⁾斎藤 秀雄⁽²⁾

The Axially Symmetrical Deformation of a Short Circular Cylinder

by Hideo SAITŌ

The object of this paper is to find the stresses and displacements in a short circular cylinder or a disk deformed symmetrically with respect to its axis. The surface tractions are separated into eight cases, each of which is expanded in a series of trigonometric or Bessel functions and the stress system for each case is found and combining these stress systems, the general solution has been obtained. This method is applied to a short circular cylinder, strained by surface tractions, viz., (1) a uniform pressure distributed over the middle zone of the cylindrical surface, (2) a uniform pressure distributed over a circle at the center of each end-surface.

1. 緒 論

円柱および円盤の応力を求める研究は多くの人々によって行われている。この中円柱に関する研究は古く 1876 年 L. Pochhammer, 1889 年 C. Chree のものがあり⁽³⁾⁽⁴⁾, また 1902 年 L.N.G. Filon⁽⁵⁾ はこれに関する総合的研究を発表しその中で実際の興味ある数種の問題について計算を行い, その後引続いてこれに関する研究報告⁽⁶⁾が発表されておるが最近には小野鑑正博士が軸対称の圧力を受ける円柱の強さに関する論文⁽⁷⁾を発表された。一方円盤に関する研究も A. Nadai, A. Timpe 等により行われ⁽⁸⁾, その後 1933 年 S. Woinowsky-Krieger⁽⁹⁾ は円筒座標を用いて厚い円盤の問題を一般的に論じ, 更に 1940 年 H. Swoboda⁽¹⁰⁾ も同種の問題を取り上げその近似解法を試みている。このように古来両者は個々別々に論ぜられており, またその形状からも 2 境界の中の一方の条件を省略し計算を簡略にすることはきわめて妥当であるが両者の中間にあるものすなわち丈の短い円柱や厚さの大なる円盤等にはわかに一方に偏して論じ難く, 二つの境界面すなわち側面, 端面を対当に考慮しなければ内部応力, 変形状態等の本質を捉えることは困難である。もちろん円柱や円盤を取り扱う上述の多くの研究もこのことに関しては触れる所が多いのであるが, 2 境界面上に任意の軸対称外力を受けて変形する円柱および円盤内の応力を求める一般解はいまだ見当らないように思われるのでここに本問題解法の一つの試みとして表題の研究を提案する次第である。ただここにのべる変形はねじりを伴わぬ場合の変形をさすものとしねじり変形の場合は別個に論ずるものとする。

2. 基 礎 式

座標として円筒座標 (r, θ, z) を用い, 円柱(あるいは

は円盤)の直径を $2a$, 高さを $2h$ としその中心軸に z 軸を一致させ原点を円柱(あるいは円盤)の中心に置く。軸対称変形の場合応力成分は角 θ に無関係で, せん断応力 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$ は 0 であるからつり合方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1)$$

で与えられる。

今 Michell⁽¹¹⁾ に従い応力かん数 ϕ を取り入れ応力を次のように表わす。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left((2-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right), \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left((1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2)$$

ここに $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, また ν は ポアソン比を表わし, ϕ は

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (2.3)$$

を満足する かん数 である。

一方 r および z 方向の変位を u, w , 材料のヤング係数を E とすれば

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z}, \\ w &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ (1-2\nu) \nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.4)$$

軸対称の応力分布を求める問題はそれぞれの場合に境界条件を満足する(2.3)の ϕ の解を求めればよい。

さて (2.3) を満足する ϕ の解として次の形のものをとる。

$$\phi = F(r, z) + \sum_{n=1}^{\infty} [f(\beta_n r) \cos(\beta_n z + \alpha) + g(\gamma_n z) J_0(\gamma_n r)], \quad (2.5)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} f(\beta_n r) &= A_n' I_0(\beta_n r) + B_n' \beta_n r I_1(\beta_n r) \\ &\quad + A_n'' K_0(\beta_n r) + B_n'' \beta_n r K_1(\beta_n r), \\ g(\gamma_n z) &= C_n' \sin \gamma_n z + D_n' \gamma_n z \cos \gamma_n z \\ &\quad + C_n'' \cos \gamma_n z + D_n'' \gamma_n z \sin \gamma_n z \end{aligned} \right\} \quad (2.5')$$

を表わし、また $F(r, z)$ は r, z の多項式であってその中に含まれる未知係数は $A_n', B_n', \dots$ および β_n, γ_n と共に境界条件によって決定されるものである。

3. 解の方法

表面に作用する荷重は z に関し対称および反対称の二つの場合に大別し、これを次のように分類する。

(1) 垂直荷重のみ

- (i) 荷重が z の偶かん数で変位 u および w が z の偶かん数および奇かん数になる場合。
- (ii) 荷重が z の奇かん数で変位 u および w が z の奇かん数および偶かん数となる場合。

(2) せん断荷重のみ

- (i) 荷重が z の偶かん数で変位 u および w が z の奇かん数および偶かん数となる場合.*

$$\begin{aligned} \phi_{I,II} &= A_0 \frac{z^3}{6} + C_0 \frac{zr^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^3} [A_n' I_0(\beta_n r) + B_n' \beta_n r I_1(\beta_n r)] \sin \beta_n z \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_s^3} [C_s' \sin \gamma_s z + D_s' \gamma_s z \cos \gamma_s z] J_0(\gamma_s r), \quad (4.3) \end{aligned}$$

ここに $\beta_n = n\pi/h$, $\gamma_s = \lambda_s/a$ を表わす。

(2.2)を用いて応力を出す。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A_0 \nu + C_0 (2\nu - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n' \left\{ -I_0(\beta_n r) + \frac{I_1(\beta_n r)}{\beta_n r} \right\} + B_n' \left\{ (2\nu - 1) I_0(\beta_n r) - \beta_n r I_1(\beta_n r) \right\} \right] \cos \beta_n z \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \left[\{ C_s' \cos \gamma_s z + D_s' ((2\nu + 1) \cos \gamma_s z + \gamma_s z \sin \gamma_s z) \} J_0(\gamma_s r) - \{ C_s' \cos \gamma_s z + D_s' (\cos \gamma_s z + \gamma_s z \sin \gamma_s z) \} \frac{J_1(\gamma_s r)}{\gamma_s r} \right], \\ \sigma_z &= A_0 (1 - \nu) + C_0 2(2 - \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n' I_0(\beta_n r) + B_n' \{ 2(2 - \nu) I_0(\beta_n r) + \beta_n r I_1(\beta_n r) \}] \cos \beta_n z \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} [-C_s' \cos \gamma_s z + D_s' \{ (1 - 2\nu) \cos \gamma_s z - \gamma_s z \sin \gamma_s z \}] J_0(\gamma_s r), \\ \sigma_\theta &= A_0 \nu + C_0 (2\nu - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n' \frac{I_1(\beta_n r)}{\beta_n r} + B_n' (2\nu - 1) I_0(\beta_n r) \right] \cos \beta_n z \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \left[D_s' 2\nu \cos \gamma_s z J_0(\gamma_s r) + \{ C_s' \cos \gamma_s z + D_s' (\cos \gamma_s z + \gamma_s z \sin \gamma_s z) \} \frac{J_1(\gamma_s r)}{\gamma_s r} \right], \\ \tau_{rz} &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n' I_1(\beta_n r) + B_n' \{ 2(1 - \nu) I_1(\beta_n r) + \beta_n r I_0(\beta_n r) \}] \sin \beta_n z \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} [C_s' \sin \gamma_s z + D_s' \{ 2\nu \sin \gamma_s z + \gamma_s z \cos \gamma_s z \}] J_1(\gamma_s r). \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

表面 $r=a$, $z=\pm h$ においてはせん断応力は作用しないから、これより次の関係

$$\frac{A_n'}{2(1-\nu)I_1(\beta_n a) + \beta_n a I_0(\beta_n a)} = \frac{B_n'}{-I_1(\beta_n a)} = \frac{A_n}{\Delta}, \quad \frac{C_s'}{2\nu \sin \gamma_s h + \gamma_s h \cos \gamma_s h} = \frac{D_s'}{-\sin \gamma_s h} = \frac{-C_s}{\Omega} \quad (4.5)$$

を得る。ここに A_n, C_s は新未知係数であり、また

* (ii) 荷重が z の奇かん数で変位 u および w が z の偶かん数および奇かん数となる場合。

解の方法は(1), (2)の荷重を三角かん数および Bessel かん数の級数に展開し、これらがおのおの単独に境界に作用する基礎境界条件 8 種に対応した応力系をおのおの独立に求めてこれらを適当に組合せ一般の境界条件に対する解を得んとするものである。まず基礎境界条件に対する応力系を導くことにしよう。

4. 基礎境界条件

(I) 第1および第2境界条件

第1境界条件

$r=a$ において

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi z}{h}, \quad \tau_{rz} = 0, \\ z &= \pm h \text{ において } \sigma_z = \tau_{rz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

第2境界条件

$r=a$ において $\sigma_r = \tau_{rz} = 0$,

$z = \pm h$ において

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= a_0' + \sum_{s=1}^{\infty} a_n' J_0\left(\frac{\lambda_s}{a} r\right), \quad \tau_{rz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

ここに λ_s は $J_1(\lambda_s) = 0$ の第 s 番目の根とする。

さて(2.5)を参照して ϕ を次のようにおく。

$$\Delta = [2(1-\nu) + (\beta na)^2] I_1^2(\beta na) - (\beta na)^2 I_0^2(\beta na) / \beta na, \quad \Omega = \sin \gamma sh \cos \gamma sh + \gamma sh \dots (4.6)$$

を表わす。更に便宜上

$$I_1 = I_1(\beta na), \quad I_0 = I_0(\beta na), \quad J_0 = J_0(\lambda_s), \quad J_1 = J_1(\lambda_s) \dots (4.6')$$

の記号を用いて(4.4)を書き直せば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A_0 \nu + C_0(2\nu - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\Delta} \left[-(I_1 + \beta na I_0) I_0(\beta nr) + \beta nr I_1 I_1(\beta nr) + \{2(1-\nu) I_1 + \beta na I_0\} \frac{I_1(\beta nr)}{\beta nr} \right] \cos \beta nz \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_s}{\Omega} \left[\{(\sin \gamma sh - \gamma sh \cos \gamma sh) \cos \gamma sz + \gamma sz \sin \gamma sh \sin \gamma sz\} J_0(\gamma sr) \right. \\ &\quad \left. + \{-\gamma sz \sin \gamma sh \sin \gamma sz + (\gamma sh \cos \gamma sh - (1-2\nu) \sin \gamma sh) \cos \gamma sz\} \frac{J_1(\gamma sr)}{\gamma sr} \right], \\ \sigma_z &= A_0(1-\nu) + C_0 2(2-\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\Delta} \left[(\beta na I_0 - 2I_1) I_0(\beta nr) - \beta nr I_1 \cdot I_1(\beta nr) \right] \cos \beta nz \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_s}{\Omega} \left[(\gamma sh \cos \gamma sh + \sin \gamma sh) \cos \gamma sz - \gamma sz \sin \gamma sh \sin \gamma sz \right] J_0(\gamma sr), \\ \sigma_\theta &= A_0 \nu + C_0(2\nu - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\Delta} \left[(2\nu - 1) I_1 \cdot I_0(\beta nr) + \{2(1-\nu) I_1 + \beta na I_0\} \frac{I_1(\beta nr)}{\beta nr} \right] \cos \beta nz \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_s}{\Omega} \left[2\nu \sin \gamma sh \cos \gamma sz J_0(\gamma sr) + \{(1-2\nu) \sin \gamma sh - \gamma sh \cos \gamma sh\} \cos \gamma sz + \gamma sz \sin \gamma sh \sin \gamma sz \right] \frac{J_1(\gamma sr)}{\gamma sr}, \\ \tau_{rz} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\Delta} \left[\beta na I_0 \cdot I_1(\beta nr) - \beta nr I_1 \cdot I_0(\beta nr) \right] \sin \beta nz \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_s}{\Omega} \left[-\gamma sh \cos \gamma sh \sin \gamma sz + \gamma sz \sin \gamma sh \cos \gamma sz \right] J_1(\gamma sr). \end{aligned} \right\} \dots (4.7)$$

したがって側面および端面における応力は

$r=a$ において

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A_0 \nu + C_0(2\nu - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \beta nz + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_s J_0}{\Omega} \left[(\sin \gamma sh - \gamma sh \cos \gamma sh) \cos \gamma sz + \gamma sz \sin \gamma sh \sin \gamma sz \right], \\ \tau_{rz} &= 0, \\ z = \pm h \text{ において} \\ \sigma_z &= A_0(1-\nu) + C_0 2(2-\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\Delta} (-1)^n \left[(\beta na I_0 - 2I_1) I_0(\beta nr) - \beta nr I_1 \cdot I_1(\beta nr) \right] + \sum_{s=1}^{\infty} C_s J_0(\gamma sr), \\ \dot{\epsilon}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (4.7')$$

となる。しかるに(4.7')の z および r を含む項はこれを級数に展開すると

$$\left. \begin{aligned} (\sin \gamma sh - \gamma sh \cos \gamma sh) \cos \gamma sz + \gamma sz \sin \gamma sh \sin \gamma sz &= 4\gamma sh \sin^2 \gamma sh \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n\pi)^2}{\{(\gamma sh)^2 + (n\pi)^2\}^2} \cos \frac{n\pi z}{h}, \\ (\beta na I_0 - 2I_1) I_0(\beta nr) - \beta nr I_1 \cdot I_1(\beta nr) &= -4\beta na I_1^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s^2}{\{(\beta na)^2 + \lambda_s^2\}^2} J_0\left(\lambda_s \frac{r}{a}\right) \end{aligned} \right\}$$

となるから(4.7')の σ_r, σ_z はこれを書き直して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A_0 \nu + C_0(2\nu - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n + \sum_{s=1}^{\infty} C_s \frac{(-1)^n 4\gamma sh (n\pi)^2 \sin^2 \gamma sh J_0}{\Omega \{(\gamma sh)^2 + (n\pi)^2\}^2} \right] \cos \beta nz, \\ \sigma_z &= A_0(1-\nu) + C_0 2(2-\nu) + \sum_{s=1}^{\infty} \left[C_s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(-1)^{n+1} 4\beta na \lambda_s^2 I_1^2}{\Delta \{(\beta na)^2 + \lambda_s^2\}^2 J_0} \right] J_0(\gamma sr). \end{aligned} \right\} \dots (4.8)$$

しかして(4.8)の応力は境界面上において(4.1), (4.2)の外力と同じ分布をなすべきであるから次の諸関係が成立せねばならない。

第1境界条件

$$\left. \begin{aligned} A_0 \nu + C_0(2\nu - 1) &= a_0, \\ A_0(1-\nu) + C_0 2(2-\nu) &= 0, \\ A_n + \sum_{s=1}^{\infty} C_s Q_{ns}^{(1)} &= a_n, \\ C_s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n R_{ns}^{(1)} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

第2境界条件

$$\left. \begin{aligned} A_0 \nu + C_0(2\nu - 1) &= 0, \\ A_0(1-\nu) + C_0 2(2-\nu) &= a_0', \\ A_n + \sum_{s=1}^{\infty} C_s Q_{ns}^{(1)} &= 0, \\ C_s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n R_{ns}^{(1)} &= a_s'. \end{aligned} \right\} \dots (4.9)$$

ただし $n, s=1, 2, 3, \dots$,

$$\left. \begin{aligned} Q_{sn}^{(1)} &= \frac{4(-1)^n \gamma_s h (n\pi)^2 \sin^2 \gamma_s h J_0}{Q((\gamma_s h)^2 + (n\pi)^2)^2}, \\ R_{ns}^{(1)} &= \frac{4(-1)^{n+1} \beta_n a \lambda_s^2 I_1^2}{4\{(\beta_n a)^2 + \lambda_s^2\}^2 J_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.10)$$

逐次近似法を用いて(4.9)を解く. すなわち $A_n = \sum_{r=1}^{\infty} A_n^{(r)}$, $C_s = \sum_{r=1}^{\infty} C_s^{(r)}$ とおき第1近似として第1境界条件の場合 $A_n^{(1)} = a_n$, $C_s^{(1)} = 0$, 第2境界条件の場合 $A_n^{(1)} = 0$, $C_s^{(1)} = a_s'$ とおけば

$$A_n^{(r)} = - \sum_{s=1}^{\infty} C_s^{(r-1)} Q_{sn}, \quad C_s^{(r)} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(r-1)} R_{ns}.$$

このようにして A_n および C_s を見出せば境界条件(4.1), (4.2)をみたす所要の応力系が求められる. 同様の方法で第3より第8境界条件に対する応力系を求めることができるが, これらならびに一般境界条件については別に改めて論ずることとしここにおいては省略する.

5. 本方法の実際問題への適用

(1) 側面中央部に一様圧力を受ける短円柱

具体的例として第1図に示すごとく円柱あるいは円盤が側面中央幅 $2d$ の部分にわたり p の一様圧力で圧縮される場合を考えよう. この場合の境界

第1図 側面中央部に一様圧力を受ける短円柱

第2図 (a) σ_r の値

条件は荷重を級数に展開し

$$\left. \begin{aligned} z = \pm h \text{ において } \sigma_z = \tau_{rz} &= 0, \\ r = a \text{ において } \sigma_r &= -p \left[\frac{d}{h} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi d}{h} \cos \frac{n\pi}{h} z \right], \\ \tau_{rz} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.1)$$

となる. これは 4. (1) 第1境界条件に相当し(4.9)式中 $a_0 = -p \cdot d/h$, $a_n = -(2p/\pi n) \sin(n\pi d/h)$ となり, 逐次近似法を用いて係数を決定すれば(5.1)を満たす応力系が求められる. 一例として $h=a$, $\nu=0.25$ の短円柱をとり $d/h=0.2$ の場合を計算した. 第1表に諸係数の値を掲げる. 第2図, (a)~(d)は応力の分布を線図に表わしたもので縦軸に応力の値, 横軸に z/a をとり, パラメータとして r を用いた. $r=a$ における応力は $A_n = a_n + A_n$ と分けて記して

第1表 a_n, A_n, C_n の値(単位 $-p$)

n	a_n	A_n	C_n
0	0.2	0.56	-0.12
1	0.374 2	0.401 4	0.226 5
2	0.302 7	0.274 7	-0.141 0
3	0.201 8	0.223 7	0.094 5
4	0.093 6	0.076 4	-0.075 8
5	0	0.013 9	0.066 0
6	-0.062 4	-0.073 8	-0.060 0
7	-0.086 5	-0.076 7	0.054 0
8	-0.075 7	-0.083 9	-0.050 9
9	-0.041 6	-0.034 4	0.047 6
10	0	-0.007 1	-0.043 4
11	0.034 0	0.039 6	-0.042 0
12	0.050 5	0.045 5	-0.039 6
13	0.046 6	0.051 0	0.037 4

第2図 (b) σ_z の値

$$\begin{aligned}
 \sigma_z = & \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi z}{h} \right\} - (A_0 \nu + (2\nu - 1)C_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi z}{h} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n}{1 + \frac{2(1-\nu)}{(n\pi)^2} - \left(\frac{I_0}{I_1}\right)^2} \left[\left(\frac{I_0}{I_1}\right)^2 - 1 - \frac{1}{n\pi} \frac{I_0}{I_1} - \frac{(1-\nu)}{(n\pi)^2} \right] \cos \frac{n\pi z}{h} \\
 & + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_s J_0}{\tan \lambda_s + \frac{\lambda_s}{\cos^2 \lambda_s}} \left[(\lambda_s + \tan \lambda_s) \frac{\cos \lambda_s \frac{z}{a}}{\cos \lambda_s} - \lambda_s \frac{z}{a} \tan \lambda_s \frac{\sin \lambda_s \frac{z}{a}}{\cos \lambda_s} \right], \\
 \sigma_\theta = & 2\nu \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi z}{h} \right\} - 2\nu [A_0 \nu + C_0(2\nu - 1)] + 2\nu \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi z}{h} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\nu A_n}{1 + \frac{2(1-\nu)}{(n\pi)^2} - \left(\frac{I_0}{I_1}\right)^2} \left\{ \left(\frac{I_0}{I_1}\right)^2 - 1 - \frac{I_0}{n\pi I_1} - \frac{(1-\nu)(1+2\nu)}{\nu(n\pi)^2} \right\} \cos \frac{n\pi z}{h} \\
 & + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_s J_0 2\nu \tan \lambda_s}{\tan \lambda_s + \frac{\lambda_s}{\cos^2 \lambda_s}} \frac{\cos \lambda_s \frac{z}{a}}{\cos \lambda_s}
 \end{aligned} \quad (5.2)$$

第 2 図 (c) σ_θ の値 第 2 図 (d) τ_{rz} の値

のように書きかえて求めた。この場合の{ }は外力を表わすものとする。 σ_z, σ_θ は側面上荷重接触部分の中心でその最大値を示すが z に従い漸減し荷重接触周辺において σ_z は圧縮から引張応力に急変する。しかし σ_θ はやはり圧縮応力である。また表面から離れた中心部においては σ_z は引張応力であり、 σ_r, σ_θ は端面ではすべて引張応力となる。次に任意点の主応力は

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_r - \sigma_z)^2}{4} + \tau_{rz}^2}, \\
 \sigma_2 &= \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_r - \sigma_z)^2}{4} + \tau_{rz}^2}
 \end{aligned}$$

および σ_θ であって σ_1, σ_2 は z 軸を含む平面内にあり σ_θ はこれに垂直である。一方各点の最大せん断応力はこれらいずれかの、二つの主応力の差の半分すなわち $|\sigma_1 - \sigma_2|/2, |(\sigma_1 - \sigma_\theta)/2|, |(\sigma_2 - \sigma_\theta)/2|$ の中の最大値で与えられる。第3図はこれを示すものであって最大主応力差一定曲面と円柱軸を含む平面との交線を

第 3 図 最大主応力差一定曲面

図示したものである。第2表は表面の変位を表わしこれを用いて変形の形状を示すと第4図が得られる。図上端面がふくれ上るのが見られ前に指摘したごとく、 σ_z が内部で張力となるのもうなづける所である。

(2) 端面中央部に一樣圧縮荷重を受ける短円柱

第5図に示すごとく端面中央半径 d の部分に一樣

第 2 表 表面における変位(単位 p/E)

z/a あるいは r/a	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$r=a$ における u/a	-0.506 4	-0.475 0	-0.340 5	-0.123 0	-0.048 0	-0.002 5	0.035 6
w/a	0	-0.029 3	-0.058 9	-0.016 1	0.013 8	0.028 0	0.032 2
$z=a$ における u/a	0	0.005 1	0.011 4	0.024 4	0.033 5	0.043 3	0.035 6
w/a	0.183 6	0.181 5	0.177 1	0.156 0	0.120 6	0.073 9	0.032 2

第 4 図 表面における変形の形状

分布圧力 p を受ける場合を考えると境界条件は荷重を級数に展開して

$$r=a \text{ において } \sigma_r = \tau_{rz} = 0,$$

$$z=\pm h \text{ において}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -p \left[\left(\frac{d}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{d}{a} \right) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1 \left(\lambda_s \frac{d}{a} \right)}{\lambda_s J_0^2} J_0 \left(\lambda_s \frac{r}{a} \right) \right], \\ \tau_{rz} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.3)$$

これは 4. (I) 第 2 境界条件に相当し

$$a_0' = -p \left(\frac{d}{a} \right)^2, \quad a_s' = -2p \left(\frac{d}{a} \right) \frac{J_1 \left(\lambda_s \frac{d}{a} \right)}{\lambda_s J_0^2}$$

一例として $a=h$,

$\nu=0.25$ の短円柱を

とり $d/a=0.2$ の場合

を計算すれば第 3 表の

係数が得られる。第 6

図, (a)~(d) に応力分

布図, 第 7 図に円柱軸

を含む平面と最大主応

力差一定曲面との交線

第 5 図 端面中央部に一様圧縮荷重を受ける短円柱

を, 第 4 表に表面の変位, 第 8 図に変形の状態を図示

した。なお端面における応力は $C_s = a_s' + {}^\circ C_s$ の形に

し (5.2) のごとく書きかえて求めた。本例においては

前例の場合よりも特に外力の局部的影響が著しい。引

張応力の最大値は荷重接触面周辺における σ_r で示さ

れ, また σ_θ は端面より内部に行くに従い急激に減少

することがわかる。

第 3 表 a_n', C_n, A_n の値 (単位 $-p$)

n	a_n'	C_n	A_n
0	0.04	0.008	0.016
1	0.228 8	0.248 7	-0.019 7
2	0.343 4	0.320 9	0.012 7
3	0.362 1	0.379 7	-0.007 1
4	0.284 7	0.265 2	0.004 8
5	0.140 4	0.158 3	-0.003 8
6	-0.022 6	-0.309 2	0.003 2
7	-0.153 8	-0.138 6	-0.002 8
8	-0.215 2	-0.229 3	0.002 5
9	-0.194 7	-0.181 6	-0.002 3
10	-0.107 6	-0.119 8	0.002 1
11	0.095 5	0.106 9	-0.002 0
12	0.113 2	0.102 5	0.001 8
13	0.167 9	0.177 9	-0.001 7

第 6 図 (a) σ_z の値 第 6 図 (b) σ_r の値

第 6 図 (c) σ_θ の値 第 6 図 (d) τ_{rz} の値

第 7 図 最大主応力差一定曲面

本項において求められた変形，応力分布状態は直径 $2a$ ，高さ h の円盤をなめらかな剛性板上にのせ上端面*

第 4 表 表面における変位 (単位 p/E)

z/a あるいは r/a	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$r=a$ における u/a	0.0183	-0.0180	-0.0170	-0.0153	-0.0118	-0.0018	-0.0085
w/a	0	-0.0021	-0.0029	-0.0045	-0.0044	-0.0033	-0.0025
$z=a$ における u/a	0	-0.0296	-0.0554	-0.0275	-0.0156	-0.0111	-0.0085
w/a	-0.3400	-0.3125	-0.2031	-0.0610	-0.0288	-0.0134	-0.0025

第 8 図 表面における変形の形状

* の中央部に一様垂直荷重を加えた第 9 図の場合にそのまま適用される。何となれば対称の関係により中央面 $z=0$ においてはせん断応力および z 方向の変位が 0 となるからである。

第 9 図 なめらかな剛性平面上に置かれた円盤

したがって上端面の中央 d 内に一様圧力をうける直径 $2a$ ，高さ a の円盤には本項の結果がそのまま

適用され，円盤と剛性板との接触面上の応力分布は第 6 図，(a)～(c)の $z=0$ 面上の曲線で表われ，すべて一様分布状態に近ずき両者は完全に接触することがわかる。円盤端面中央に圧力を加えて硬度を測定する場合等はこの適例であるが上記のごとき寸法の範囲では上面の局所作用は底面にはほとんど影響を与えぬことがうかがわれる。

6. 結 語

円柱および円盤がその表面に任意の軸対称荷重を受けて変形する場合の応力分布，変形状態を求める方法について論じ，更に側面および端面中央部に一様分布圧力を受ける短円柱に本方法を適用し，その状態を明らかにした。

最後に本研究に対し終始御指導下された樋口盛一先生に衷心より謝意を捧げる。なおこの研究には文部省自然科学研究費が用いられた。

注：一

- (1) 昭和 26 年 4 月 4 日 第 28 期定時總會講演會において講演，原稿受付 昭和 26 年 8 月 31 日。
- (2) 正員，東北大學。
- (3) A. E. H. Love, Math. Theory of Elasticity, p. 276.
- (4) S. Timoshenko, Theory of Elasticity, p. 352.

- (5) L. N. G. Filon, Roy. Soc. London, Phil. Trans., Vol. 198 (1902).
 (6) O. F. Fischer, Ing-Archiv, II. Band, S. 178. (1931).
 (7) A. Ono, Reports of the Research Institute for Elasticity Eng., Kyushu Univ., Vol. 5, No. 2 (1949).
 (8) 前掲 (4), p. 318, p. 355.
 (9) S. Woinowsky-Krieger, Ing-Archiv, IV. Band, S. 305 (1933).
 (10) H. Swoboda, Z. f. Angew. Math. u. Mech., Bd. 20 (1940).
 (11) 前掲 (3), p. 276.

621.884 : 539.41.014.3

一つのリベット穴を有する帯板のリベット圧力による応力の研究 (第1報)⁽¹⁾

渥 美 光⁽²⁾

On the Stress Distributions in a Strip with a Circular Hole fitted by a Rivet

(1st Report)

by Akira ATSUMI

In the present paper, the problem on the stress distributions in a plate with a circular hole where a rivet is fitted and pulled, is solved, in the following way. First, the force acting on the rivet hole is assumed as $-P(1+\cos \theta)$ distributed along the periphery of the hole, and, next, using the method of solution due to Howland, a solution of the problem in question is obtained for the case of an infinite strip, and moreover extending it, an approximate solution of a rectangular plate is finally obtained under the boundary conditions mentioned above. Comparing the results of the present numerical calculations with those of the similar problems treated by many other authors, many important and interesting characteristics about the distributions of stress in a plate are pointed out and discussed somewhat in detail.

I. 緒 言

弾性一般理論より、リベットの平板に及ぼす応力状態を計算によって明らかにすることは、リベットの円孔に及ぼす力の状態が明らかにされていないことなどの理由により現状では困難である。著者は先に平板にリベット継ぎされる問題⁽³⁾を円孔に一樣な内圧が作用する無限帯の問題として論じ応力分布を計算したが、本報はこのリベットが中心軸と直角な方向に引張られる場合を研究したものである。この問題に対しては、R. C. Knight の論文⁽⁴⁾が発表されているが、それは実際現象を十分説明するものとは思われない。なぜならば、単一外力 P がリベット心に働く問題を解としているため、リベット縁の重要な応力分布が適当に考察されたとはいえないからである。ここに上の不備を補い、実際現象に近いと考えられる応力状態を求める目的で、円孔に $-P(1+\cos \theta)$ なる垂直圧力が分布するとして、板内の応力を詳しく計算した。

II. 無 限 帯 の 解

1. 応力かん数および解の誘導 座標を第1図のようにとり、原点を中心とする円孔の直径を $2a$ 、無限帯の幅を $2b$ とする。ここに次の記号を使う。

第 1 図

$$\lambda = a/b, \quad \xi = x/b$$

$$\eta = y/b, \quad \rho = r/b$$

ここに本問の境界条件は次のものとする。

無限帯の上下面

にて、

$$\widehat{yy} = \widehat{xy} = 0,$$

円孔に沿って

$$\widehat{rr} = -P$$

$$\times (1 + \cos \theta), \quad \widehat{r\theta} = 0.$$

いま上の境界条件をみたし、 $\nabla^4 \bar{\chi} = 0$ を満足する応力かん数 $\bar{\chi}$ を次のように選ぶ。

$$\bar{\chi} = \bar{\chi}' + \bar{\chi}'' \dots \dots \dots (1)$$

ここに $\bar{\chi}'$, $\bar{\chi}''$ は $\nabla^4 \bar{\chi}' = 0$, $\nabla^4 \bar{\chi}'' = 0$ を満足しそれぞれ次の境界条件をみたすものとする。

$$\bar{\chi}'; \begin{cases} \text{無限帯の上下面にて, } \widehat{yy} = \widehat{xy} = 0. \\ \text{円孔に沿って, } \widehat{rr} = -P, \quad \widehat{r\theta} = 0. \end{cases}$$

$$\bar{\chi}''; \begin{cases} \text{無限帯の上下面にて, } \widehat{yy} = \widehat{xy} = 0. \\ \text{円孔に沿って, } \widehat{rr} = -P \cos \theta, \quad \widehat{r\theta} = 0. \end{cases}$$

したがって次式を得る。