$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sigma^2 + m}{\sigma(\sigma^2 - m)} \bar{\Phi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{\bar{\Phi}'(-1/\sqrt{m})}{\zeta + \sqrt{m}} - \frac{\bar{\Phi}'(1/\sqrt{m})}{\zeta - \sqrt{m}},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1 - m\sigma^2}{\sigma^2 - m} \bar{\Psi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{1 - m^2}{2\sqrt{m}} \frac{\bar{\Psi}'(1/\sqrt{m})}{\zeta - \sqrt{m}} + \frac{1 - m^2}{2\sqrt{m}} \frac{\bar{\Psi}'(-1/\sqrt{m})}{\zeta + \sqrt{m}},$$

であるから、若干の計算の後

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= a_0 + B/(\zeta^2 - m), \\ \Psi(\zeta) &= b_0 - C/(\zeta^2 - m) + B(1 - m\zeta^2)/(\zeta^2 - m)^2 + 2B\zeta^2(1 + m\zeta^2)/(\zeta^2 - m)^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

を得る。ここに

$$\left. \begin{aligned} B &= -(1 - \nu)/(3 + \nu) \cdot m\bar{a}_0 + ma_0 - (1 - \nu)/(3 + \nu) \cdot \bar{b}_0, \\ C &= (3 + \nu)/(1 - \nu) \cdot \bar{a}_0 - a_0 - mb_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

である。\$a_0, b_0\$ は無限遠の応力により定る。すなわち

$$\begin{aligned} (M_1 + M_2)/(1 + \nu) + i \int Q_n ds &= -4a_0, \\ M_1 - M_2 - 2iH &= -2(1 - \nu)b_0 \end{aligned}$$

である。((5)および(14)による。)ここに \$M_1, M_2, H\$ は無限遠における \$M_x, M_y, M_{xy}\$ を表わす。

例：例として \$M_2\$ のみが加えられた場合を取り扱か

う。この場合には

$$\begin{aligned} a_0 &= -M_2/4(1 + \nu), \quad b_0 = M_2/2(1 - \nu), \\ B &= -(1 + m)M_2/2(3 + \nu) \end{aligned}$$

となり、だ円孔の周辺では

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \Phi(\zeta) = -\frac{M_2}{4(1 + \nu)} \\ &\times \left[1 + \frac{2(1 + \nu)(1 + m)(\cos 2\phi - m - i \sin 2\phi)}{(3 + \nu)(1 - 2m \cos \phi + m^2)} \right] \end{aligned}$$

となる。(4)式および周辺上では \$M_n = 0\$ となること

を考慮すれば

$$\begin{aligned} (M_s)_{\zeta\bar{\zeta}=1} &= M_2 \left[1 + \frac{2(1 + \nu)(1 + m)(\cos 2\phi - m)}{(3 + \nu)(1 - 2m \cos \phi + m^2)} \right], \\ (M_s)_{\phi=0}^{\zeta\bar{\zeta}=1} &= M_2 \left[1 + \frac{2(1 + \nu)}{3 + \nu} \frac{a}{b} \right] \end{aligned}$$

を得る。すなわち応力集中係数は \$1 + 2(1 + \nu)/(3 + \nu) \cdot (a/b)\$ であり、二次元応力の場合に比して大分楽である。

注：—

- (1) 昭和26年4月4日 第28期定時總會講演會において講演，原稿受付 昭和26年1月29日。
- (2) 正員，東京大學。
- (3) (2)式は(1)式において \$P=0\$ とおいたものに相當する。したがつて以下の議論はまた荷重の作用していない面分で成立する一般理論でもある。
- (4) Elizabeth. H. Mann : Proc. Roy. Soc., Vol. 199, No. 1058, 1949/7, 376/393.
- (5) 本計算後，同一問題に關し E. Reissner の論文のあるのを知つた。結果は一般した。
- (6) E. Reissner : Math Ann. 111, 1935, 777/780.

直交異方性板の二次元応力についての一覽書⁽¹⁾

531.252.2

鷺 津 久 一 郎⁽²⁾

A Note on the Two Dimensional Stresses of Orthogonally Aeolotropic Plates

by Kyuichirō WASHIZU

The method of analysis of two dimensional stresses of orthogonally aeolotropic plates has been well formulated and treated by many authors. It seems, however, somewhat laborious. In this paper, the another's method of analysis is attempted by the use of Muschelišvili's theorem which is used in the two dimensional stress analysis of isotropic plates. As examples, (1) an infinite plate with an elliptic hole and subjected to uniform stresses at infinity, (2) an infinite plate with a circular hole and subjected to a concentrated load, and (3) an infinite plate with an elliptic hole and subjected to a pair of concentrated loads on the boundary, are treated.

緒 言

直交異方性板の二次元応力の解析法は既に多くの人々⁽³⁾により研究され、十分公式化されている。しかし従来の方法は多少労力を要するに思われる。本論文においては等方性板の二次元応力解析に用いられる

Muschelišvili の定理の利用を試みた。問題によっては既存の方法より少ない労力で、機械的に問題が解けるように思われる。

1. 応力かん数

だそくと思われるか記号の定義等の必要上若干の関

係式を羅列したい。(x,y)面を板の中央面に、x軸およびy軸がそれぞれ板の対称軸と一致するように選ぶ。次の諸関係式はよく知られている。

(1) フックの法則

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_y \frac{\sigma_y}{E_y}, \quad \varepsilon_y = -\nu_x \frac{\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに $\nu_x/E_x = \nu_y/E_y$ なる関係がある。

(2) つり合方程式

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y = 0, \quad \partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y = 0$$

$$\dots\dots\dots (2)$$

(3) 適合条件式

$$\partial^2 \varepsilon_x / \partial y^2 + \partial^2 \varepsilon_y / \partial x^2 = \partial^2 \gamma_{xy} / \partial x \partial y \quad \dots\dots\dots (3)$$

(2) から応力かん数が導びかれる。すなわち

$$\sigma_x = \partial^2 F / \partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 F / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 F / \partial x \partial y$$

$$\dots\dots\dots (4)$$

(3) と (4) から直交異方性板の基礎方程式

$$\frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - 2 \frac{\nu_x}{E_x} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

が得られ、これらはまた記号の変換

$$E_x/E_y = \lambda_1^2/\lambda_2^2, \quad E_x/G_{xy} - 2\nu_x = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

により

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 \partial^4 F / \partial x^4 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \partial^4 F / \partial y^4 + \partial^4 F / \partial y^4 = 0$$

$$\dots\dots\dots (7)$$

となる。簡単のため以後 λ_1, λ_2 は実正数として論をすすめる。さて(7)の一般解は

$$F(x,y) = -\frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} R_e \left[\frac{1}{\lambda_1^2} F_1(z_1) - \frac{1}{\lambda_2^2} F_2(z_2) \right]$$

$$\dots\dots\dots (8)$$

で与えられる。ここに $z_1 = x + i\lambda_1 y$, $z_2 = x + i\lambda_2 y$ である。この応力かん数 $F(x,y)$ を使用し次の諸関係式が得られる。これらは主として森口助教授⁽³⁾によるものである*。

$$z_1 = (1/2) \{ [(a + \lambda_1 b) \cos \alpha + i(b + \lambda_1 a) \sin \alpha] \zeta_1 + [(a - \lambda_1 b) \cos \alpha + i(\lambda_1 a - b) \sin \alpha] / \zeta_1 \}$$

$$z_2 = (1/2) \{ [(a + \lambda_2 b) \cos \alpha + i(b + \lambda_2 a) \sin \alpha] \zeta_2 + [(a - \lambda_2 b) \cos \alpha + i(\lambda_2 a - b) \sin \alpha] / \zeta_2 \}$$

$$\dots\dots\dots (14)$$

により、円の外側の領域を ζ_1, ζ_2 面の単位円の外側の領域に写像する。境界上では

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \sigma = e^{i\phi}$$

である。 $F_1'(z_1), F_2'(z_2)$ の正則性からこれら二かん数は次のように表現される。

$$F_1'(z_1) \equiv \varphi(\zeta_1) = a_1 \zeta_1 + a_0 + a_{-1} / \zeta_1 + a_{-2} / \zeta_1^2 + \dots\dots\dots$$

$$F_2'(z_2) \equiv \psi(\zeta_2) = b_1 \zeta_2 + b_0 + b_{-1} / \zeta_2 + b_{-2} / \zeta_2^2 + \dots\dots\dots$$

(13) より自由境界条件は

$$*F_1''(z_1) = \lambda_1^2 \sigma_x + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \sigma_y$$

$$-i\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)/2 \cdot \tau_{xy} + i\lambda_1 E_x \omega_{xy}$$

$$F_2''(z_2) = \lambda_2^2 \sigma_x + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \sigma_y$$

$$+ i\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)/2 \cdot \tau_{xy} + i\lambda_2 E_x \omega_{xy} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$F_1'(z_1) = E_x(\lambda_1^2 u + i\lambda_1 v) + \{ -\lambda_1^2(\lambda_2^2) + \nu_x \} \int P_y ds + i\lambda_1(\lambda_1^2 + \nu_x) \int P_x ds$$

$$F_2'(z_2) = E_x(\lambda_2^2 u + i\lambda_2 v) + \{ -\lambda_2^2(\lambda_1^2) + \nu_x \} \int P_y ds + i\lambda_2(\lambda_2^2 + \nu_x) \int P_x ds \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\sigma_x = 1/(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cdot R_e[F_1''(z_1) - F_2''(z_2)]$$

$$\sigma_y = -1/(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cdot R_e[F_1''(z_1)/\lambda_1^2 - F_2''(z_2)/\lambda_2^2]$$

$$\tau_{xy} = -1/(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cdot Im[F_1''(z_1)/\lambda_1 - F_2''(z_2)/\lambda_2] \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$E_x u = 1/(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cdot R_e[(\lambda_1^2 + \nu_x)/\lambda_1^2 \cdot F_1'(z_1) - (\lambda_2^2 + \nu_x)/\lambda_2^2 \cdot F_2'(z_2)]$$

$$E_x v = -1/(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cdot Im[(\lambda_2^2 + \nu_x)/\lambda_1 \cdot F_1'(z_1) - (\lambda_1^2 + \nu_x)/\lambda_2 \cdot F_2'(z_2)] \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$2\lambda_2^2 F_1'(z_1) - \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2) F_2'(z_2) - \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) \bar{F}_2'(\bar{z}_2)$$

$$= -2\lambda_1^2 \lambda_2^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) [\partial F / \partial x - (i/\lambda_1) \partial F / \partial y]$$

$$2\lambda_1^2 F_2'(z_2) - \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) F_1'(z_1) + \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) \bar{F}_1'(\bar{z}_1)$$

$$= 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) [\partial F / \partial x - (i/\lambda_2) \partial F / \partial y] \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに $\int P_x ds = \partial F / \partial y$, $\int P_y ds = -\partial F / \partial x$ である。

2. だ円孔を有し無限遠において一様な応力を受ける板(第1図) 変換

第 1 図

$$2\lambda_2^2 \varphi(\sigma) - \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2) \psi(\sigma) - \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) \bar{\psi}(1/\sigma) = 0$$

$$2\lambda_1^2 \psi(\sigma) - \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) \varphi(\sigma) + \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) \bar{\varphi}(1/\sigma) = 0$$

$$\dots\dots\dots (15)$$

となる。この両辺に $(1/2\pi i) \oint \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ を演算すれば、(γ は単位円周、 ζ は円外の任意の一点)。

$$(1/2\pi i) \int \varphi(\sigma) d\sigma / (\sigma - \zeta) = -\varphi(\zeta) + a_1 \zeta + a_0,$$

$$(1/2\pi i) \int \bar{\varphi}(1/\sigma) d\sigma / (\sigma - \zeta) = -\bar{a}_1 / \zeta.$$

であるから直ちに

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= a_1\xi + \frac{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)\bar{a}_1 - 2\lambda_1^2\bar{b}_1}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{1}{\xi}, \\ \psi(\xi) &= b_1\xi + \frac{2\lambda_2^2\bar{a}_1 - \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)\bar{b}_1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{1}{\xi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_1'(z_1) &= \varphi(\xi_1) = a_1\xi_1 + \frac{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)\bar{a}_1 - 2\lambda_1^2\bar{b}_1}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{1}{\xi_1} \\ F_2'(z_2) &= \psi(\xi_2) = b_1\xi_2 + \frac{2\lambda_2^2\bar{a}_1 - \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)\bar{b}_1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{1}{\xi_2}\end{aligned} \quad (16)$$

が得られる。ただし応力分布に関係のない附加定数は除いた。したがって*

$$\begin{aligned}dz_1/d\xi_1 &= (1/2) \{ [(a + \lambda_1 b) \cos \alpha + i(b + \lambda_1 a) \sin \alpha] - [(a - \lambda_1 b) \cos \alpha + i(\lambda_1 a - b) \sin \alpha] / \xi_1^2 \}, \\ dz_2/d\xi_2 &= (1/2) \{ [(a + \lambda_2 b) \cos \alpha + i(b + \lambda_2 a) \sin \alpha] - [(a - \lambda_2 b) \cos \alpha + i(\lambda_2 a - b) \sin \alpha] / \xi_2^2 \} \end{aligned} \quad (17)$$

であるから

$$F_1''(z_1) = d\varphi(\xi_1)/d\xi_1 \cdot d\xi_1/dz_1, \quad F_2''(z_2) = d\psi(\xi_2)/d\xi_2 \cdot d\xi_2/dz_2$$

と計算される。\$a_1, b_1\$ は無限遠の応力により定る。すなわち(9)より

$$\lambda_1^2[\sigma_x] + \lambda_1^2\lambda_2^2[\sigma_y] - i\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)/2 \cdot [\tau_{xy}] + i\lambda_1 E_x[\omega_{xy}] = 2a_1/[(a + \lambda_1 b) \cos \alpha + i(b + \lambda_1 a) \sin \alpha],$$

$$\lambda_2^2[\sigma_x] + \lambda_1^2\lambda_2^2[\sigma_y] + i\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)/2 \cdot [\tau_{xy}] + i\lambda_2 E_x[\omega_{xy}] = 2b_1/[(a + \lambda_2 b) \cos \alpha + i(b + \lambda_2 a) \sin \alpha],$$

となる。ここに \$[\sigma_x], \dots\$ は無限遠の応力または回転の値を示す。

例 \$x\$ 軸方向に一樣な引張応力 \$p\$ が作用する場合。

$$a_1 = \lambda_1^2 p A_1 / 2, \quad b_1 = \lambda_2^2 p A_2 / 2,$$

$$\begin{aligned}F_1''(z_1) &= \left[\lambda_1^2 - \frac{2\lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2)(b \cos \alpha - ia \sin \alpha)}{A_1 \xi_1^2 - B_1} \right] p, \quad F_2''(z_2) = \left[\lambda_2^2 - \frac{2\lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2)(b \cos \alpha - ia \sin \alpha)}{A_2 \xi_2^2 - B_2} \right] p, \\ \left(\sigma_s \right)_{\xi_1=1}^{\xi_2=1} &= \left\{ 1 + \frac{-b\lambda_1\lambda_2(\lambda_1\lambda_2+1)\cos^4\alpha + [(\lambda_1+\lambda_2)a - (\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2-1)b]\cos^2\alpha \sin^2\alpha + a(\lambda_1+\lambda_2)\sin^4\alpha}{(\lambda_1^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\lambda_2^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)b} \right\} p.\end{aligned}$$

ここに

$$A_1 \equiv (a + \lambda_1 b) \cos \alpha + i(b + \lambda_1 a) \sin \alpha, \quad B_1 \equiv (a - \lambda_1 b) \cos \alpha + i(-b + \lambda_1 a) \sin \alpha,$$

$$A_2 \equiv (a + \lambda_2 b) \cos \alpha + i(b + \lambda_2 a) \sin \alpha, \quad B_2 \equiv (a - \lambda_2 b) \cos \alpha + i(-b + \lambda_2 a) \sin \alpha,$$

とおいだ。

3. 円孔を有し \$x\$ 軸上に集中荷重を受ける無限板 (第2図)

円の半径を \$a\$, 円の中心と着力点との距離を \$aa\$, 荷重の \$x\$ および \$y\$ 軸方向の成分をそれぞれ \$X\$ および \$Y\$ とする。

第 2 図

さて無限板の原点に (\$X\$,

\$Y\$) なる集中力の作用したときの応力かん数は

$$\begin{aligned}F_1'(z_1) &= -(\lambda_1^2/2\pi) [(\lambda_1 + \nu_x)/\lambda_1 \cdot X \\ &\quad + i(\lambda_2^2 + \nu_x)Y] \log z_1 \equiv -A_1 \log z_1, \\ F_2'(z_2) &= -(\lambda_2^2/2\pi) [(\lambda_2 + \nu_x)/\lambda_2 \cdot X \\ &\quad + i(\lambda_1^2 + \nu_x)Y] \log z_2 \equiv -A_2 \log z_2\end{aligned} \quad (18)$$

であるから、着力点が \$(aa, 0)\$ に移った場合の応力かん数 \$f_1'(z_1)\$, \$f_2'(z_2)\$ は

$$\begin{aligned}f_1'(z_1) &= -A_1 \log(z_1 - aa) \\ f_2'(z_2) &= -A_2 \log(z_2 - aa)\end{aligned} \quad (19)$$

となる。さて変換

$$\begin{aligned}z_1 &= (a/2) [(1 + \lambda_1)\xi_1 + (1 - \lambda_1)/\xi_1] \\ z_2 &= (a/2) [(1 + \lambda_2)\xi_2 + (1 - \lambda_2)/\xi_2]\end{aligned} \quad (20)$$

により、\$(x, y)\$ 面の円の外側の領域を \$\xi_1\$ および \$\xi_2\$ 面の単位円の外側の領域に写像すれば境界上では

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_2 = \sigma = e^{i\theta}, \\ z_1 &= a[(1 + \lambda_1)\sigma^2 + 1 - \lambda_1]/2\sigma, \\ z_2 &= a[(1 + \lambda_2)\sigma^2 + 1 - \lambda_2]/2\sigma, \\ z_1 - aa &= a(1 + \lambda_1)(\sigma - \gamma_1^{(1)})(\sigma - \gamma_2^{(1)})/2\sigma, \\ z_2 - aa &= a(1 + \lambda_2)(\sigma - \gamma_1^{(2)})(\sigma - \gamma_2^{(2)})/2\sigma,\end{aligned}$$

となる。ここに \$\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}\$ および \$\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}\$ はそれぞれ代数方程式

$$\begin{aligned}(1 + \lambda_1)\sigma^2 - 2a\sigma + (1 - \lambda_1) &= 0 \\ (1 + \lambda_2)\sigma^2 - 2a\sigma + (1 - \lambda_2) &= 0\end{aligned} \quad (21)$$

の根である。それぞれの方程式の二根の中、一根は 1 より大、他根は 1 より小(いずれも絶対値において)なることが証明される。以後絶対値の大なる根を \$\gamma_1^{(1)}\$ および \$\gamma_1^{(2)}\$ で、小なる根を \$\gamma_2^{(1)}\$ および \$\gamma_2^{(2)}\$ で表わすことにする。境界条件を満足させるため \$g_1(z_1), g_2(z_2)\$ を加えて、\$F_1'(z_1)\$ および \$F_2'(z_2)\$ を

$$\left. \begin{aligned} F_1'(z_1) &= f_1'(z_1) + g_1'(z_1) \\ F_2'(z_2) &= f_2'(z_2) + g_2'(z_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

と表現する. ここに $g_1'(z_1)$, $g_2'(z_2)$ はそれぞれ z_1 , z_2 の正則かん数で

$$\begin{aligned} g_1'(z_1) &\equiv \varphi(\zeta_1) = a_1/\zeta_1 + a_2/\zeta_1^2 + \dots\dots\dots \\ g_2'(z_2) &\equiv \psi(\zeta_2) = b_1/\zeta_2 + b_2/\zeta_2^2 + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

と表現される. (13)を考慮し境界では

$$\begin{aligned} 2\lambda_1^2 \{ -A_1 \log[a(1+\lambda_1)(\sigma - \gamma_1^{(1)}) (\sigma - \gamma_2^{(1)})/2\sigma] + \varphi(\sigma) \} \\ - \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2) \{ -A_2 \log[a(1+\lambda_2)(\sigma - \gamma_1^{(2)}) (\sigma - \gamma_2^{(2)})/2\sigma] + \psi(\sigma) \} \end{aligned} \quad *$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\text{const}}{\sigma - \zeta} d\sigma = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\sigma - \zeta} \log\left(\frac{\sigma - \gamma_2^{(1)}}{\sigma}\right) d\sigma = -\log \frac{\zeta - \gamma_2^{(1)}}{\zeta}, \\ \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\sigma - \zeta} \log(\sigma - \gamma_1^{(1)}) d\sigma = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\sigma - \zeta} \varphi(\zeta) d\sigma = -\varphi(\zeta), \\ \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\sigma - \zeta} \log\left(\frac{\sigma - \gamma_2^{(2)}}{\sigma}\right) d\sigma = -\log \frac{\zeta - \gamma_2^{(2)}}{\zeta}, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\sigma - \zeta} \psi(\sigma) d\sigma = -\psi(\zeta), \\ \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\sigma - \zeta} \log\left(\frac{\sigma - 1/\gamma_1^{(2)}}{\sigma}\right) d\sigma = -\log \frac{\gamma_1^{(2)}\zeta - 1}{\gamma_1^{(2)}\zeta}, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\sigma - \zeta} \bar{\varphi}(1/\sigma) d\sigma = 0, \\ \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\sigma - \zeta} \log\left(\frac{\sigma - 1/\gamma_1^{(1)}}{\sigma}\right) d\sigma = -\log \frac{\gamma_1^{(1)}\zeta - 1}{\gamma_1^{(1)}\zeta}, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\sigma - \zeta} \bar{\varphi}(1/\sigma) d\sigma = 0, \end{aligned}$$

であるから若干計算の後

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= A_1 \log \frac{\zeta - \gamma_2^{(1)}}{\zeta} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \bar{A}_1 \log \frac{\gamma_1^{(1)}\zeta - 1}{\gamma_1^{(1)}\zeta} + \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \bar{A}_2 \log \frac{\gamma_1^{(2)}\zeta - 1}{\gamma_1^{(2)}\zeta}, \\ \psi(\zeta) &= A_2 \log \frac{\zeta - \gamma_2^{(2)}}{\zeta} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \bar{A}_2 \log \frac{\gamma_1^{(2)}\zeta - 1}{\gamma_1^{(2)}\zeta} - \frac{2\lambda_2^2}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \bar{A}_1 \log \frac{\gamma_1^{(1)}\zeta - 1}{\gamma_1^{(1)}\zeta}, \end{aligned}$$

を得る. これを(22)にもどせば解として

$$\left. \begin{aligned} F_1'(z_1) &= -A_1 \log(\zeta_1 - \gamma_1^{(1)}) - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \bar{A}_1 \log\left(\frac{\gamma_1^{(1)}\zeta_1 - 1}{\gamma_1^{(1)}\zeta_1}\right) + \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \bar{A}_2 \log\left(\frac{\gamma_1^{(2)}\zeta_1 - 1}{\gamma_1^{(2)}\zeta_1}\right), \\ F_2'(z_2) &= -A_2 \log(\zeta_2 - \gamma_1^{(2)}) + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \bar{A}_2 \log\left(\frac{\gamma_1^{(2)}\zeta_2 - 1}{\gamma_1^{(2)}\zeta_2}\right) - \frac{2\lambda_2^2}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \bar{A}_1 \log\left(\frac{\gamma_1^{(1)}\zeta_2 - 1}{\gamma_1^{(1)}\zeta_2}\right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

が決定される. ただし応力に関係のない附加項は省いた.

4. だ円孔の周辺上に一對の集中力を受ける無限板(第3図)

写像かん数は **

第 3 図

$$\begin{aligned} * \quad & -\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) \{ -\bar{A}_2 \log[a(1-\lambda_2)(\sigma - 1/\gamma_1^{(2)}) (\sigma - 1/\gamma_2^{(2)})/2\sigma] + \bar{\varphi}(1/\sigma) \} = 0, \\ & -\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) \{ -A_1 \log[a(1+\lambda_1)(\sigma - \gamma_1^{(1)}) (\sigma - \gamma_2^{(1)})/2\sigma] + \varphi(\sigma) \} \\ & + 2\lambda_1^2 \{ -A_2 \log[a(1+\lambda_2)(\sigma - \gamma_1^{(2)}) (\sigma - \gamma_2^{(2)})/2\sigma] + \psi(\sigma) \} \\ & + \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) \{ -\bar{A}_1 \log[a(1-\lambda_1)(\sigma - 1/\gamma_1^{(1)}) (\sigma - 1/\gamma_2^{(1)})/2\sigma] + \bar{\varphi}(1/\sigma) \} = 0 \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

が成立する. (22)の両辺に $(1/2\pi i) \oint d\sigma/(\sigma - \zeta)$ を演算すれば (ただし ζ は単位円外の任意の一点, γ は単位円周を意味する.)

$$\begin{aligned} * \quad & z_1 = x + i\lambda_1 y = (1/2) [(a + \lambda_1 b)\zeta + (a - \lambda_1 b)/\zeta] \\ & z_2 = x + i\lambda_2 y = (1/2) [(a + \lambda_2 b)\zeta + (a - \lambda_2 b)/\zeta] \end{aligned}$$

である. $F_1'(z_1)$, $F_2'(z_2)$ は

$$\left. \begin{aligned} F_1'(z_1) &\equiv \varphi(\zeta_1) = a_1/\zeta_1 + a_2/\zeta_1^2 + \dots\dots\dots \\ F_2'(z_2) &\equiv \psi(\zeta_2) = b_1/\zeta_2 + b_2/\zeta_2^2 + \dots\dots\dots \end{aligned} \right\}$$

と表現される. 次に

$$\int^P P_x ds = \partial F / \partial y, \quad \int^P P_y ds = -\partial F / \partial x$$

を計算すれば,

$$\begin{array}{ccc} \text{弧} & \int^P P_x ds & \int^P P_y ds \\ \widehat{FDAE} & 0 & 0 \\ \widehat{EBCF} & -P \cos \alpha & -P \sin \alpha \end{array}$$

となる. (13)を使用すれば だ円縁の境界条件は

$$2\lambda_1^2 \varphi(\sigma) - \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2) \psi(\sigma) - \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) \bar{\varphi}(1/\sigma) = +2\lambda_1^2 \lambda_2^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \left[\int^P P_y ds + (i/\lambda_1) \int^P P_x ds \right],$$

$$2\lambda_1''\psi(\sigma) - \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)\varphi(\sigma) + \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{\varphi}(1/\sigma) = -2\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \left[\int^P P_y ds + (i/\lambda_2) \int^P P_x ds \right]$$

である。さて

$$(1/2\pi i) \oint \varphi(\sigma) d\sigma / (\sigma - \zeta) = -\varphi(\zeta),$$

$$(1/2\pi i) \oint \bar{\varphi}(1/\sigma) d\sigma / (\sigma - \zeta) = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\int^P P_y ds}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1}^{-\sigma_1} \frac{-P \sin \alpha}{\sigma - \zeta} d\sigma \\ = -\frac{P \sin \alpha}{2\pi i} \log \frac{\zeta + \sigma_1}{\zeta - \sigma_1}.$$

ただし $\sigma_1 = \cos \theta_E + i \sin \theta_E$,

$$\tan \alpha = b \sin \theta_E / a \cos \theta_E,$$

であるから、前々節同様の計算を行えば *

$$\left. \begin{aligned} F_1''(z_1) &= -(4P/\pi) \lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2) (i\lambda_2 \sin \alpha + \cos \alpha) \sigma_1 \zeta_1^2 / \{ (\zeta_1^2 - \sigma_1^2) [(a + \lambda_1 b) \zeta_1^2 - (a - \lambda_1 b)] \} \\ F_2''(z_2) &= -(4P/\pi) \lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2) (i\lambda_1 \sin \alpha + \cos \alpha) \sigma_1 \zeta_2^2 / \{ (\zeta_2^2 - \sigma_1^2) [(a + \lambda_2 b) \zeta_2^2 - (a - \lambda_2 b)] \} \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

を得る。これらの関係式から応力を計算することがで

きる。たとえば $\alpha = \pi/2$ の時、A 点の応力は

$$(\sigma_y)_{x=a, y=0} = [(\lambda_1 + \lambda_2) / \lambda_1 \lambda_2] \cdot (P/b\pi)$$

と計算される。

注：—

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2) (i\lambda_2 \sin \alpha \\ &\quad + \cos \alpha) (P/\pi) \log [(\zeta + \sigma_1)/(\zeta - \sigma_1)], \\ \psi(\zeta) &= \lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2) (i\lambda_1 \sin \alpha \\ &\quad + \cos \alpha) (P/\pi) \log [(\zeta + \sigma_1)/(\zeta - \sigma_1)]. \end{aligned}$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} F_1'(z_1) &= \varphi(\zeta_1) = \lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2) (i\lambda_2 \sin \alpha \\ &\quad + \cos \alpha) (P/\pi) \log [(\zeta_1 + \sigma_1)/(\zeta_1 - \sigma_1)], \\ F_2'(z_2) &= \psi(\zeta_2) = \lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2) (i\lambda_1 \sin \alpha \\ &\quad + \cos \alpha) (P/\pi) \log [(\zeta_2 + \sigma_1)/(\zeta_2 - \sigma_1)] \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

および

- (1) 昭和26年4月4日 第28期定時總會講演會において講演，原稿受付 昭和26年1月29日。
- (2) 正員，東京大學。
- (3) たとえば日本で發表されたものの中には，池田健：日本科學文化協會會報，2巻3號，26ページ(昭22-10)，佐藤常三：平面應力問題の新解析法(生活社發行)，森口繁一：東大—工應用力學懇話會誌，1巻2號，7ページ(昭22-2)，森口繁一：機械學會誌，50巻347號，193ページ；51巻353號，62ページ等がある。

621-272.272

コイルばねの横剛性について (第1報)⁽¹⁾

松 宮 惣 一⁽²⁾

Lateral Rigidity of Helical Spring (1st Report)

by Sōichi MATSUMIYA

If a helical spring is fixed at one end, and subjected to any force and moment at the other end, the deflection of the spring will be caused. The value of this deflection is necessary for the design of helical spring and calculation of any vibration problem, but its precise solutions have not been hitherto known.

Now evaluating the precise expressions of lateral rigidity of helical spring by theory of elasticity, we found them quite appropriate by comparing them with experimental values, and also they are more precise than the values calculated by "Die Federn" published by V.D.I..

I. 緒 言

コイルばねが軸方向の力，および軸方向のベクトルを有するモーメントを受けた場合のたわみの式は従来 Timoshenko, Wahl, Austin, Röver, 池田氏等によりかなり正確に計算されているが，ばねの軸に直角の力，およびこの方向のベクトルを持つモーメントの作用した場合の一般式はいまだ發表されていない。我々は，ボギートラックにおいて枕ばねにコイルばねを用いた

場合の復元力の計算，つり合ばねおよびつり合はりとの関係，すなわち車両の横方向弾性支持の問題，あるいは一般に防振の目的をもって機械の基礎にコイルばねを用いた場合等，ばねの横方向の剛性の計算式が必要である。Rausch は軸方向の力およびこれに直角な方向の力の作用した場合の簡単な式を V.D.I.⁽³⁾ に示しているが，その最後の式は計算方法を示していないし，一部誤りがあるように思われる。また Die Fede-