$$2\lambda_1^2\psi(\sigma) - \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)\varphi(\sigma) + \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{\varphi}(1/\sigma) = -2\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \left[\int^P P_y ds + (i/\lambda_2) \int^P P_x ds \right]$$

である。さて

$$(1/2\pi i) \oint \varphi(\sigma) d\sigma / (\sigma - \zeta) = -\varphi(\zeta),$$

$$(1/2\pi i) \oint \bar{\varphi}(1/\sigma) d\sigma / (\sigma - \zeta) = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\int^P P_y ds}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1}^{-\sigma_1} \frac{-P \sin \alpha}{\sigma - \zeta} d\sigma \\ = -\frac{P \sin \alpha}{2\pi i} \log \frac{\zeta + \sigma_1}{\zeta - \sigma_1}.$$

ただし $\sigma_1 = \cos \theta_E + i \sin \theta_E$,

$$\tan \alpha = b \sin \theta_E / a \cos \theta_E,$$

であるから、前々節同様の計算を行えば *

$$\left. \begin{aligned} F_1''(z_1) &= -(4P/\pi) \lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2) (i\lambda_2 \sin \alpha + \cos \alpha) \sigma_1 \zeta_1^2 / \{ (\zeta_1^2 - \sigma_1^2) [(a + \lambda_1 b) \zeta_1^2 - (a - \lambda_1 b)] \} \\ F_2''(z_2) &= -(4P/\pi) \lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2) (i\lambda_1 \sin \alpha + \cos \alpha) \sigma_1 \zeta_2^2 / \{ (\zeta_2^2 - \sigma_1^2) [(a + \lambda_2 b) \zeta_2^2 - (a - \lambda_2 b)] \} \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

を得る。これらの関係式から応力を計算することがで

きる。たとえば $\alpha = \pi/2$ の時、A 点の応力は

$$(\sigma_y)_{x=a, y=0} = [(\lambda_1 + \lambda_2) / \lambda_1 \lambda_2] \cdot (P/b\pi)$$

と計算される。

注：—

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2) (i\lambda_2 \sin \alpha \\ &\quad + \cos \alpha) (P/\pi) \log [(\zeta + \sigma_1) / (\zeta - \sigma_1)], \\ \psi(\zeta) &= \lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2) (i\lambda_1 \sin \alpha \\ &\quad + \cos \alpha) (P/\pi) \log [(\zeta + \sigma_1) / (\zeta - \sigma_1)]. \end{aligned}$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} F_1'(z_1) &= \varphi(\zeta_1) = \lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2) (i\lambda_2 \sin \alpha \\ &\quad + \cos \alpha) (P/\pi) \log [(\zeta_1 + \sigma_1) / (\zeta_1 - \sigma_1)], \\ F_2'(z_2) &= \psi(\zeta_2) = \lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2) (i\lambda_1 \sin \alpha \\ &\quad + \cos \alpha) (P/\pi) \log [(\zeta_2 + \sigma_1) / (\zeta_2 - \sigma_1)] \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

および

- (1) 昭和26年4月4日 第28期定時總會講演會において講演，原稿受付 昭和26年1月29日。
- (2) 正員，東京大學。
- (3) たとえば日本で發表されたものの中には，池田健：日本科學文化協會會報，2巻3號，26ページ(昭22-10)，佐藤常三：平面應力問題の新解析法(生活社發行)，森口繁一：東大—工應用力學懇話會誌，1巻2號，7ページ(昭22-2)，森口繁一：機械學會誌，50巻347號，193ページ；51巻353號，62ページ等がある。

621-272.272

コイルばねの横剛性について (第1報)⁽¹⁾

松 宮 惣 一⁽²⁾

Lateral Rigidity of Helical Spring (1st Report)

by Sōichi MATSUMIYA

If a helical spring is fixed at one end, and subjected to any force and moment at the other end, the deflection of the spring will be caused. The value of this deflection is necessary for the design of helical spring and calculation of any vibration problem, but its precise solutions have not been hitherto known.

Now evaluating the precise expressions of lateral rigidity of helical spring by theory of elasticity, we found them quite appropriate by comparing them with experimental values, and also they are more precise than the values calculated by "Die Federn" published by V.D.I..

I. 緒 言

コイルばねが軸方向の力，および軸方向のベクトルを有するモーメントを受けた場合のたわみの式は従来 Timoshenko, Wahl, Austin, Röver, 池田氏等によりかなり正確に計算されているが，ばねの軸に直角の力，およびこの方向のベクトルを持つモーメントの作用した場合の一般式はいまだ發表されていない。我々は，ボギートラックにおいて枕ばねにコイルばねを用いた

場合の復元力の計算，つり合ばねおよびつり合はりとの関係，すなわち車両の横方向弾性支持の問題，あるいは一般に防振の目的をもって機械の基礎にコイルばねを用いた場合等，ばねの横方向の剛性の計算式が必要である。Rausch は軸方向の力およびこれに直角な方向の力の作用した場合の簡単な式を V.D.I.⁽³⁾ に示しているが，その最後の式は計算方法を示していないし，一部誤りがあるように思われる。また Die Fede-

rn⁽⁴⁾ の計算式も完全なものとは言い難い。ゆえに筆者は空間曲線を中心線に持つ一般の棒の弾性理論に関する松村鶴造氏の論文⁽⁶⁾を基として、コイルばねについてのたわみを計算し、横剛性の式を導いたのである。

II. たわみ、および傾きの一般式

(1) 一般式 今ばねの一端を固定し、他端が自由であると考え、ばねの中心軸を $O'O$ とし、($O'O$ は鉛直に置く) たわみ、および傾きを考える点を G' 、ばね上の任意の一点を G とする。 G におけるばね線の中心線に引ける接線、陪法線、および主法線をそれぞれ GA, GB, GC とする(第1図)。 GO の水平面内で x 軸となす角を φ とし、 AG の水平との傾き(ばねのピッチ角)を β とする。今 $G(x, y, z)$ $G_0(R, O, O)$ $G'(x', y', z')$ とし、ばねの高さを L とすれば

第 1 図

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = \varphi L / 2\pi.$$

また接線、陪法線、主法線の *d. c. n.* は第1表のごとくなる。

第 1 表

	接線 GA	陪法線 GB	主法線 GC
x	$\lambda_1 = -\cos \beta \sin \varphi$	$\lambda_2 = \sin \beta \sin \varphi$	$\lambda_3 = \cos \varphi$
y	$\mu_1 = \cos \beta \cos \varphi$	$\mu_2 = -\sin \beta \cos \varphi$	$\mu_3 = \sin \varphi$
z	$\nu_1 = \sin \beta$	$\nu_2 = \cos \beta$	$\nu_3 = 0$

次に中心軸上端に一つの力、およびモーメントが作用するものとし、その x, y, z 方向の分値をおのおの $Q, S, P; M_{0x}, M_{0y}, M_{0z}$ とする。このとき一点 G に作用するモーメントは

$$M_x = M_{0x} - PR \sin \varphi - SL \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right),$$

$$M_y = M_{0y} + PR \cos \varphi + QL \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right),$$

$$M_z = M_{0z} + QR \sin \varphi - SR \cos \varphi.$$

このモーメントを GA, GB, GC のまわりのモーメント M_1, M_2, M_3 にて表わせば

$$M_1 = -M_{0z} \cos \beta \sin \varphi + M_{0y} \cos \beta \cos \varphi$$

$$+ M_{0x} \sin \beta + PR \cos \beta + QR \sin \beta \sin \varphi$$

$$- SR \sin \beta \cos \varphi + QL \cos \beta \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right)$$

$$- \frac{\varphi}{2\pi} \cos \varphi + SL \cos \beta \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \sin \varphi,$$

$$M_2 = M_{0x} \sin \beta \sin \varphi - M_{0y} \sin \beta \cos \varphi$$

$$+ M_{0z} \cos \beta - PR \sin \beta + QR \cos \beta \sin \varphi$$

$$- SR \cos \beta \cos \varphi - QL \sin \beta \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \cos \varphi$$

$$- SL \sin \beta \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \sin \varphi,$$

$$M_3 = M_{0x} \cos \varphi + M_{0y} \sin \varphi$$

$$+ QL \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \sin \varphi - SL \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \cos \varphi.$$

G' の傾きおよび変位の式は前述の松村鶴造氏の論文より、

$$w_x = \int (AM_1 \lambda_1 + BM_2 \lambda_2 + CM_3 \lambda_3) ds + C_x \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$w_y = \int (AM_1 \mu_1 + BM_2 \mu_2 + CM_3 \mu_3) ds + C_y \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$w_z = \int (AM_1 \nu_1 + BM_2 \nu_2 + CM_3 \nu_3) ds + C_z \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\begin{aligned} \delta_x &= \int (AM_1 \mu_1 + BM_2 \mu_2 + CM_3 \mu_3) (z' - z) ds \\ &\quad - \int (AM_1 \nu_1 + BM_2 \nu_2 + CM_3 \nu_3) (y' - y) ds + D_x \quad \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_y &= \int (AM_1 \nu_1 + BM_2 \nu_2 + CM_3 \nu_3) (x' - x) ds \\ &\quad - \int (AM_1 \lambda_1 + BM_2 \lambda_2 + CM_3 \lambda_3) (z' - z) ds + D_y \quad \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_z &= \int (AM_1 \lambda_1 + BM_2 \lambda_2 + CM_3 \lambda_3) (y' - y) ds \\ &\quad - \int (AM_1 \mu_1 + BM_2 \mu_2 + CM_3 \mu_3) (x' - x) ds + D_z \quad \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

ここに C_x, C_y, C_z は原点における各軸のまわりの回転を与えるものであり、 D_x, D_y, D_z は

$$D_x = z' C_y - y' C_z \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$D_y = x' C_z - z' C_x \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$D_z = y' C_x - x' C_y \quad \dots \dots \dots (9)$$

A, B, C はねじり、または曲げに対する棒の剛性であり、断面円形なるばねの場合には

$$A = 1/GI_p, \quad B = 1/EFr^2 \kappa \cong 1/EI, \quad C = 1/EI$$

である。ただし E はヤング係数、 G はせん断弾性係数、 I は断面の慣性モーメント、 I_p は断面の慣性極モーメント、 F は断面の面積、 r は断面の半径、 κ は曲線はりの曲げに関する断面係数である。

M_1, M_2, M_3 の式を(1), (2), ……(6)式に代入して $\int_0^{2n\pi} \dots d\varphi$ を行えば ばね の上端の傾き, および変位が求められる. すなわち,

$$w_x = \frac{R}{\cos \beta} \left[\left\{ (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta + C) \left(M_{ox} - \frac{SL}{2} \right) - (A-B) \sin \beta \cos \beta RQ \right\} n\pi - (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta - C) \frac{QL}{2} \right] \dots\dots\dots (10)$$

$$w_y = \frac{R}{\cos \beta} \left[\left\{ (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta + C) \left(M_{oy} + \frac{QL}{2} \right) - (A-C) \sin \beta \cos \beta SR \right\} n\pi + (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta - C) \frac{SL}{2} \right] \dots\dots\dots (11)$$

$$w_z = \frac{R}{\cos \beta} \left[\left\{ (A-B) \sin \beta \cos \beta PR + (A \sin^2 \beta + B \cos^2 \beta) M_{oz} \right\} 2n\pi + (A-B) \sin \beta \cos \beta SL \right] \dots\dots\dots (12)$$

$$\delta_x = \frac{R}{\cos \beta} \left[\left\{ (A \sin^2 \beta + B \cos^2 \beta) QR^2 - (A-B) \sin \beta \cos \beta M_{ox} R + (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta + C) \frac{M_{oy} L}{2} \right\} n\pi + \frac{1}{4} \left\{ 2(A-B) \sin \beta \cos \beta QRL - (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta - C) (M_{ox} L - SL^2) \right\} + QL^2 C \left(\frac{n\pi}{3} - \frac{1}{8n\pi} \right) + QL^2 (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta) \left(\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{8n\pi} \right) \right] \dots\dots\dots (13)$$

$$\delta_y = \frac{R}{\cos \beta} \left[\left\{ (A \sin^2 \beta + B \cos^2 \beta) SR^2 - (A-B) \sin \beta \cos \beta M_{oy} R - (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta + C) \frac{M_{ox} L}{2} \right\} n\pi + \left\{ (A-B) \sin \beta \cos \beta M_{ox} + (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta) PR - \frac{1}{2} (A-B) \sin \beta \cos \beta SR \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta - C) (M_{oy} + QL) \right\} L + (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta) SL^2 \left(\frac{n\pi}{3} - \frac{1}{8n\pi} \right) + C SL^2 \left(\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{8n\pi} \right) \right] \dots\dots\dots (14)$$

$$\delta_z = \frac{R}{\cos \beta} \left[2n\pi \left\{ (A-B) \sin \beta \cos \beta M_{ox} R + (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta) PR^2 \right\} + (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta) SLR \right] \dots\dots\dots (15)$$

(2) . 特別な場合 軸方向, すなわち z 方向のたわみは(15)式を書きなおして,

$$\delta_z = \frac{2n\pi R^2}{\cos \beta} \left\{ (A-B) \sin \beta \cos \beta M_{ox} + (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta) (P + S \tan \beta) R \right\} \dots\dots\dots (16)$$

横方向(x 方向)のたわみを求めるに, 一方向のみを考えて $S=0, M_{ox}=0$ として計算をする.(13)式より

$$\delta_x = \frac{RL}{\cos \beta} \left[\left\{ \frac{A \sin^2 \beta + B \cos^2 \beta}{\tan \beta} + (A-B) \sin \beta \cos \beta \right\} \frac{QR}{2} + QL \left\{ (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta + C) \frac{L}{6R \tan \beta} + (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta - C) \frac{R \tan \beta}{4L} \right\} + (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta + C) \frac{M_{oy} L}{4R \tan \beta} \right] \dots\dots\dots (17)$$

$M_{oy}=0$ するとき

$$\delta_x = \frac{QRL}{\cos \beta} \left\{ \frac{2(A-B) \sin^2 \beta + B}{\tan \beta} \cdot \frac{R}{2} + \frac{A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta + C}{\tan \beta} \cdot \frac{L^2}{6R} + (A \cos^2 \beta + B \sin^2 \beta - C) \frac{R \tan \beta}{4} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$\beta \equiv 0$ として書きなおせば

$$\delta_x = \frac{n\pi \cdot QR^3}{EI} + QRL \left\{ \frac{n\pi}{3} \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GI_p} \right) + \frac{1}{8n\pi} \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI} \right) \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ただし(19)式には P の影響が入っていない. すなわち δ_x なる x 方向のたわみが Q により生じた場合, P なる垂直方向の力が作用している時は, たわみは(19)式で求めたものだけでは不十分であり, この式は

たわみの小さい時のみ近似式として用いられ, 一般には次の方法により求めた式を用いなければならぬ.

III. 垂直荷重による増加モーメントを考慮する場合の近似式

まず第2図において P が作用せず, Q と M_{oy} のみが作用するとき, ばねの上端を水平のままにして置くため $M_{oy} = -QL/2$ とする. $\beta=0$ とすれば(17)式より

$$\delta_x = \frac{n\pi QR^3}{EI} + \frac{QRL^2}{2} \left\{ \frac{n\pi}{6} \left(\frac{1}{GI_p} + \frac{1}{EI} \right) + \frac{1}{4n\pi} \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI} \right) \right\} \quad (20)$$

次に垂直荷重 P が作用したとする。今上端のたわみを δ_1 で表し、ばねの各点でのたわみを Δx_1 とすれば、ばねの各点では $P(\delta_1 - \Delta x_1)$ だけのモーメントが附加される。しかしてそれにより G' 点では δ_2 のたわみを生ずる。*

第 2 図

* これにより ばね には更にモーメントが附加され、たわみが増加する。すなわち G' 点の x 方向のたわみを δ とすれば、

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \quad (21)$$

にて求められる。(21)式を求める前に近似式として、 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ を求める。(4)式を積分する前の形とし、ばね上の任意の一点を θ にて表わせば、

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x_1}{ds} = & APRL \cos \varphi \frac{(\theta - \varphi)}{2n\pi} \\ & + CM_{0y} L \frac{(\theta - \varphi)}{2n\pi} \sin^2 \varphi \\ & + AQL^2 \cos^2 \varphi \left(1 - \frac{\varphi}{2n\pi} \right) \left(\frac{\theta - \varphi}{2n\pi} \right) \\ & + AM_{0y} L \cos^2 \varphi \cdot \frac{\theta - \varphi}{2n\pi} \\ & + CQL^2 \sin^2 \varphi \left(1 - \frac{\varphi}{2n\pi} \right) \left(\frac{\theta - \varphi}{2n\pi} \right) \\ & - BQR^2 \sin \varphi (\sin \theta - \sin \varphi) \quad (22) \end{aligned}$$

これを 0 から θ まで φ について積分し、 θ を再び φ と書くと

$$\begin{aligned} \Delta x_1 = & \left(\frac{1}{2} \varphi - \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) BQR^3 + APR^2 L \frac{1 - \cos \varphi}{2n\pi} + \frac{A-C}{8} \frac{R}{2n\pi} (M_{0y} L + QL^2) \\ & + \frac{A-C}{8} \frac{QRL^2}{(2n\pi)^2} \varphi + \frac{A+C}{4} (M_{0y} L + QL^2) R \frac{\varphi^2}{2n\pi} - \frac{A+C}{12} \frac{QRL^2}{(2n\pi)^2} \varphi^3 - \frac{A-C}{8(2n\pi)^2} QRL^2 \sin 2\varphi \\ & - \frac{A-C}{8} \frac{R}{2n\pi} (M_{0y} L + QL^2) \cos 2\varphi + \frac{A-C}{8} \frac{QRL^2}{(2n\pi)^2} \varphi \cos 2\varphi \quad (23) \end{aligned}$$

ばねの上端が傾かないままとするため、

$M_{0y} = -QL/2$ とし P は Z 軸の下向きを正とすれば、

$$\begin{aligned} \Delta x_1 = & \left(\frac{1}{2} \varphi - \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) BR^3 Q - APR^2 L \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{2n\pi} + \left\{ \frac{A-C}{16} \frac{1}{2n\pi} + \frac{A-C}{8} \frac{\varphi}{(2n\pi)^2} \right. \\ & + \frac{A+C}{8} \frac{\varphi^3}{2n\pi} - \frac{A+C}{12} \frac{\varphi^3}{(2n\pi)^2} - \frac{A-C}{8} \frac{\sin 2\varphi}{(2n\pi)^2} - \frac{A-C}{16} \frac{\cos 2\varphi}{2n\pi} \\ & \left. + \frac{A-C}{8} \frac{\varphi}{(2n\pi)^2} \cos 2\varphi \right\} QRL^2 \quad (24) \end{aligned}$$

δ_1 が生じた場合、上端が傾かないままにして置いために $-M_{01}$ なるモーメントを附加するとすれば、ばね上の任意の点における全体の附加モーメントは

$$M_{y1} = P(\delta_1 - \Delta x_1) - M_{01},$$

$$\therefore M_1 = M_{y1} \cos \beta \cos \varphi \equiv (P\delta_1 - \Delta x_1 - M_{01}) \cos \varphi,$$

$$M_2 = -M_{y1} \sin \beta \cos \varphi \equiv 0,$$

$$M_3 = M_{y1} \sin \varphi \equiv (P\delta_1 - \Delta x_1 - M_{01}) \sin \varphi,$$

$$\therefore dw_y = (P\delta_1 - \Delta x_1 - M_{01}) (A \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi) R d\varphi.$$

ここで $\int_0^{2n\pi} dw_y = 0$ となるごとく M_{01} の値を定めると

$$\begin{aligned} M_{01} = & \left[\frac{1}{2} n\pi BR^3 Q + \frac{1}{2n\pi} APR^2 L \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \left\{ \frac{A-C}{2n\pi} + (A+C) \frac{n\pi}{3} \right\} QRL^2 \right] P \quad (25) \end{aligned}$$

この M_{y1} と (4) 式より

$$\Delta x_2 = \int_0^\theta (A \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi) M_{y1} \frac{\theta - \varphi}{2n\pi} \cdot LR d\varphi \quad (26)$$

(26) を積分して $\theta = 2n\pi$ とすれば

$$\begin{aligned} \delta_2 = & \left[\left\{ \frac{1}{12} (A+C) n^2 \pi^2 + \frac{7}{16} (A+C) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{11}{192} (A-C) \right\} BR^2 + \left\{ \frac{1}{120} (A+C)^2 n^2 \pi^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{96} + \frac{1}{32n^2 \pi^2} \right) (A+C)(A-C) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{384} + \frac{11}{1024n^2 \pi^2} \right) (A-C)^2 \right\} L^2 \right] R^2 LPQ \quad (27) \end{aligned}$$

(A-C)の項は(A+C)に比較して小さいから省略すれば, 近似式として

$$\delta_1 = \left\{ n\pi BR^3 + \frac{n\pi}{12} (A+C) RL^2 \right\} Q \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\delta_2 = \left\{ \left(\frac{1}{12} n^2 \pi^2 + \frac{7}{16} \right) BR^3 + \frac{1}{120} n^2 \pi^2 (A+C) RL^2 \right\} (A+C) RL \cdot P \cdot Q \quad \dots\dots\dots (29)$$

同様に δ_3 を求めると次のごとくなる.

$$\delta_3 = \left\{ \left(\frac{1}{120} n^3 \pi^3 + \frac{7}{192} n\pi + \frac{31}{256 n\pi} \right) BR^3 + \frac{17}{20 \cdot 160} n^3 \pi^3 (A+C) RL^2 \right\} (A+C)^2 R^2 L^2 P^2 Q \quad \dots\dots\dots (30)$$

IV. 前節の場合の一般式

前節のごとく, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ を求めて加え合すと正確な δ の値が求められるので, 次に一般項 δ_m を求める. 今簡単のために, $2n\pi = \alpha$, $BR^3 Q = U$, $(A+C) \times RL^2 Q = T$, $(A+C) \cdot PRL/2n\pi = N$ とおき, 最初より (A-C) の項を省略すれば

$$\Delta x_1 = \left(\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi - \sin \varphi \right) U + \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\varphi^3}{8} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\varphi^3}{12} \right) T \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\delta_1 = \frac{\alpha}{2} U + \frac{\alpha}{24} T \quad \dots\dots\dots (32)$$

Δx_2 を求める時上端に加えるべきモーメントは

$$M_{y1} = P(\delta_1 - \Delta x_1) - M_{o1}$$

ゆえに

$$\Delta x_2 = \frac{PRL}{2n\pi} \int_0^\theta (A \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi) (\delta_1 - \Delta x_1 - \frac{M_{o1}}{P}) (Q - \varphi) d\varphi$$

また(25)式を求めるのと同様にして

$$M_{o1} = \frac{P}{2} \delta_1 + \frac{P}{2} \cdot \frac{AR^2 L}{n\pi} P,$$

$$\text{一般に } M_{om} = \frac{P}{2} \delta_m + P \cdot \frac{AR^2 L \cdot P}{2^{m-1} \alpha} N^{m-1}$$

であるが δ_m の式では常に第2項は消失するから, 以下これを省略して,

$$\Delta x_2 = \left\{ \frac{\delta_1}{2} \cdot \frac{\theta^2}{4} - \frac{1}{A+C} \int_0^\theta (A \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi) (\theta - \varphi) \Delta x_1 d\varphi \right\} N \quad \dots\dots\dots (33)$$

ゆえに

$$\Delta x_m = \left\{ \frac{\delta_{m-1}}{8} \theta^2 - \frac{1}{A+C} \int_0^\theta (A \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi) (\theta - \varphi) \Delta x_{m-1} d\varphi \right\} N \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$\therefore \delta_2 = \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\alpha^2}{2!} \delta_1 + \left\{ \left(\frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{8} \right) \alpha - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3!} \left(1 - 4 \times \frac{1}{8} \right) \alpha^3 \right\} U + \left\{ -\frac{1}{2^3} \times \frac{\alpha^3}{4!} + \frac{1}{2^2} \times \frac{\alpha^3}{5!} \right\} T \right] N \quad \dots\dots\dots (35)$$

同様にして

$$\delta_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\alpha^2}{2!} \delta_2 N - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{\alpha^4}{4!} \delta_1 N^2 + \left[\left\{ \left(\frac{1}{2^2} - 4 \times \frac{1}{8^3} \right) \alpha - \frac{1}{2} \frac{\alpha^3}{3!} \left(\frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{8^2} \right) + \frac{1}{2^3} \times \frac{\alpha^5}{5!} \left(1 - 4 \times \frac{1}{8} \right) \right\} U + \left\{ \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{2^4} \times \frac{\alpha^6}{6!} - \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1}{2^3} \times \frac{\alpha^7}{7!} \right\} T \right] N^2 \quad \dots\dots\dots (36)$$

一般に

$$\delta_m = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\alpha^2}{2!} \delta_{m-1} N - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{\alpha^4}{4!} \delta_{m-2} N^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^3} \times \frac{\alpha^6}{6!} \delta_{m-3} N^3 - \dots + (-1)^{m-2} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{m-1}} \times \frac{\alpha^{2m-2}}{(2m-2)!} \delta_1 N^{m-1} + \left[\left\{ \left(\frac{1}{2^{m-1}} - \frac{4}{8^m} \right) \alpha - \frac{1}{2} \times \frac{\alpha^3}{3!} \left(\frac{1}{2^{m-3}} - \frac{4}{8^{m-1}} \right) + \frac{1}{2^2} \times \frac{\alpha^5}{5!} \left(\frac{1}{2^{m-5}} - \frac{4}{8^{m-2}} \right) - \dots + (-1)^{m-1} \frac{1}{2^{m-1}} \times \frac{\alpha^{2m-1}}{(2m-1)!} \left(1 - \frac{4}{8} \right) \right\} U + (-1)^{m-1} \left\{ \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{2^{m+1}} \times \frac{\alpha^{2m}}{(2m)!} - \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1}{2^m} \times \frac{\alpha^{2m+1}}{(2m+1)!} \right\} T \right] N^{m-1} \quad \dots\dots\dots (37)$$

これらを加え合せて $m \rightarrow \infty$ とする. しかしてその中の無限級数を整理すれば,

$$\delta = \left[\frac{2}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \tan n\pi \sqrt{\frac{N}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{1 - \frac{N}{2}} - \frac{1}{2 - \frac{N}{4}} \right) BR^3 + \frac{L}{2n\pi} \cdot \frac{1}{P} \right\} - \frac{L}{P} \right] Q \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる. この式の計算途中に $\cos n\pi \sqrt{(N/2)}$ にて割る操作があるので, この値が0の場合を吟味せねばならぬ.

V. 実験および数値例

前節において求めた(38)式と, 略算式(28), (29), (30)式, および Die Federn 式の比較のため, 二, 三の例の数値計算を行った.

次にこれらのばねについて実験を行い、計算と実験とが一致するかどうかを確かめた。使用したばねは第2表のごとくである。

第2表

	a	b	c
線 径 d cm	0.65	0.4	0.35
コイル径 D cm	5.15	4.2	4.2
自由長 $2L_0$ cm	9.6×2	7.95×2	7.95×2
巻 数 $2n$	6×2	4×2	4.5×2

(1) 実験 実験装置は第3図に示す。各ばねは

第3図 (a)

第3図 (b)

第4図 (a)

第4図 (b)

第4図 (c)

あらかじめ軸方向の荷重試験を行い、荷重-たわみ直線を求める。まず2枚の板 A_1 , A_2 の間に試験せんとするばねをはさみ、ボルト B にナット C を締付け適当なばねたわみを与えると、先の荷重試験によりその時の軸方向荷重 P を知ることができる。次にばねの中心に軸に直角な荷重 $2Q$ を加え、その時の中心

のたわみをダイヤルゲージにて測定する。今 $2Q$ なる荷重を段階的に A とばねとがすべらざる範囲において加えて行き、そのおのおのの荷重に対するたわみの関係を求める。その一例を第4図に示す。この関係より一つの軸荷重 P に応ずる単位横力に対するたわみ δ cm/kg を求めることができる。

第 5 図 (a)

第 5 図 (b)

第 5 図 (c)

(2) 数値計算 以上 (a), (b), (c) 3 種のばねにつき δ , δ_1 , δ_2 , δ_3 式および F 式にて δ cm/kg を

求め実験値と比較したものを第 3, 4, 5 表に示す。この図示したものが第 5 図である。

第 3 表 ばね a

δ cm/kg \ P kg	0	15	30	45	60	75
δ_1	0.065 35	0.058 49	0.052 16	0.046 35	0.041 08	0.036 34
δ_2	0	0.004 634	0.007 555	0.009 127	0.009 674	0.009 475
δ_3	0	0.000 388 0	0.001 163	0.001 922	0.002 434	0.002 683
$\delta_1 + \delta_2$	0.065 35	0.063 12	0.059 71	0.055 48	0.050 76	0.045 82
$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3$	0.065 35	0.063 51	0.060 87	0.057 40	0.053 21	0.048 50
(38)式	0.065 35	0.063 55	0.061 09	0.057 92	0.054 05	0.049 7
F 式	0.065 35	0.063 70	0.061 78	0.059 64	0.057 39	0.055 24
実験値		0.067 08	0.066 00	0.064 00	0.060 92	0.055 58

第 4 表 ばね b

δ cm/kg \ P kg	0	5	10	15	20	25	30
δ_1	0.169 9	0.151 3	0.134 1	0.118 5	0.104 3	0.091 65	0.080 48
δ_2	0	0.012 72	0.020 56	0.024 61	0.025 80	0.024 96	0.022 78
δ_3	0	0.000 915 8	0.002 629	0.004 127	0.004 951	0.005 017	0.004 466
$\delta_1 + \delta_2$	0.169 9	0.164 0	0.154 7	0.143 1	0.130 1	0.116 6	0.103 3
$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3$	0.169 9	0.164 9	0.157 3	0.147 2	0.135 1	0.121 6	0.107 7
(38)式	0.169 9	0.165 2	0.158 7	0.150 1	0.139 4	0.127 0	0.113 4
F 式	0.169 9	0.165 6	0.160 5	0.154 8	0.148 7	0.142 9	0.139 2
実験値		0.176 7	0.166 9	0.152 8	0.145 6	0.128 0	0.118 7

第 5 表 ばね c

δ cm/kg \ P kg	0	4	8	12	16	20	24
δ_1	0.297 7	0.259 4	0.224 9	0.194 2	0.167 2	0.144 1	0.124 8

δ_1	0	0'002 876	0'044 38	0'050 33	0'049 65	0'044 80	0'037 68
δ_3	0	0'003 382	0'009 331	0'014 02	0'015 60	0'015 29	0'012 66
$\delta_1 + \delta_2$	0'297 7	0'288 2	0'269 3	0'244 5	0'216 9	0'188 9	0'162 4
$\delta_1 + \delta_1 + \delta_3$	0'297 7	0'291 6	0'278 6	0'258 6	0'232 9	0'204 2	0'175 1
(38)式	0'297 7	0'292 0	0'281 1	0'263 9	0'240 5	0'212 2	0'181 6
F 式	0'297 7	0'293 6	0'289 2	0'286 0	0'288 9	0'318 1	0'636 3
実 験 値		0'242 7	0'229 6	0'210 5	0'197 9	0'177 5	0'151 0

VI. 結 言

以上の結果より次のことがわかった。

(1) 計算結果と実験とはだいたい良く一致する。しかし(38)式の方が F 式よりもよく一致する。しかし P の小さい範囲ではいずれも大差はない。

(2) 近似的に δ を求める場合には (38)式を用いなくとも、 $\delta_1 + \delta_2$ 、または $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ まで求めると十分である。後者は三角かん数が入っていないので数値計算に便利であり、特に振動計算の場合にははなはだ有利である。

(8) F 式はばね C のような場合には使用できない。すなわち F 式はばねを剛性の等しいような一本の棒に置換してたわみを求めているから ($1/\rho = M/EI$) たわみが大となれば、実験とは全く一致しない結果となる。

(4) 実験と(38) δ 式とでも少々ずれているが、こ

れは E, G の値の見積方および d, D, L などの誤差、ピッチ角および式中の (A-C) の省略の影響によるものと思われる。またばね端および有効巻数の算定方法にも関係がある。

(5) 荷重 2Q を加える場合と減ずる場合でたわみに差を生ずることのあるのは、ダイヤルゲージの特性、ばねの接触面の摩擦等によるものと思われる。

終りに臨み、この研究に際し御指導下され、かつ発表を許可された会社の上司、特に永島、宇佐見両博士に対し深く感謝の意を表す次第である。

注：一

(1) 昭和 25 年 10 月 14 日 関西連合工学会において講演，原稿受付 昭和 26 年 1 月 29 日。

(2) 正員，新秋葉金属工業会社製鋼所。

(3) V.D.I., Bd.78, Nr.12, S.388(1934). 同 Nr.32, S.964(1934).

(4) V.D.I., "Die Federn", S. 98 (1938).

(5) 松村，機械学会誌，17 卷 34 号，67 ページ (大 3-9)。

621-272.3 : 539.384.2

重ね板ばねのニップによる各板中央における応力について⁽¹⁾

水 野 正 夫⁽²⁾

On the Stress due to Nipps at the Center of Leaves of the Laminated Springs

by Masao MIZUNO

There are two kinds of method to calculate stress of leaves of the laminated springs. The one assumes that each leaf is cantilever, and the other assumes that all leaves are laminated with equal curvature.

And it was known by experiments that stress due to load may be calculated by the former and that stress due to nipps by the latter in good accuracy. But at the center of leaves, because the leaves are tightly bound each other by means of center bolts or bands, the curvature of the all leaves may be equal, even if there are no load.

Author introduced equation to find stress due to nipps of the laminated springs by the former method, and found that this equation coincide with experimental results better than by the latter method.

And besides, with this method, introduced the equation for practical design to find curvature of each leaf with simplified stress calculation.

〔I〕 重ね板ばねのニップによる応力の計算法を次の 2 種類に分けることができる。

1) 各板を真直はりと考え、板端のみで力が伝達さ

れると仮定するもので、この種の計算法としては次のようなものが発表されている。

a). H. Stark 氏の方法⁽³⁾，