鑄鉄のごとき脆性材料の曲げによる破壊⁽¹⁾中西 不二夫⁽²⁾

Rupture of Cast Iron Beams under Bending

by Fujio NAKANISHI

The stress distribution being taken into account, the rupture strength of cast iron beams of rectangular section under bending becomes,

$$M_B = \frac{n}{2} b h^3 \sigma_B,$$

where, M_B =bending moment at rupture, b =breadth of the beam, h =height of the beam, nh =distance of the neutral axis from the surface of tension side, and σ_B =tensile strength under uniform stress.

From stress-strain curves of compression and tension, the tension curve being somewhat extended, the moment-deflection curve and the rupture moment were calculated. These calculated values conform very closely with experiment.

鑄鉄の破壊と軟鋼の降伏とを比べると、鑄鉄の破壊は引張応力によって起るし、軟鋼の降伏はせん断応力によって起るのであって、その点では違っている。しかし、破壊も降伏もある一点の応力状態だけで決るものではなく、断面全体の問題であるという点では全く同様であって、鑄鉄の破壊は軟鋼の降伏と同じ考え方で取り扱うべきものと思う。

鑄鉄はりの曲げによる破壊については前にも一度書いたことがある⁽³⁾。しかし、当時はまだ軟鋼降伏の研究もまだ十分進んでいなかったの、それにならってたてた破壊の理論も不完全であった。すなわち、前には曲げの場合に中立軸の片側、引張側だけについて考えて、これが実験ともかなりよく合うことを述べたのであるが、軟鋼降伏の研究も進んできた現在からみると、片側だけについて考えるのはいけないのであって、どうしても断面全体を考えなければならない。それで、ここでは断面全体を考えた理論をたて、それを実験と比較してみようと思う。

応力分布が対称的である場合には、断面全体の応力の平均値——附重平均値であるが——が一定値に達したところで降伏なり破壊なりが起ることは、これまで何度も述べてきたことである⁽⁴⁾。ところが鑄鉄の曲げの場合は応力分布は対称ではない。したがって別の方法を考えなければならない。ここではまず対称でない場合の軟鋼の降伏を考え、それにならって鑄鉄の曲げによる破壊理論をたてて行こうと思う。

1. 軟鋼はりの均等曲げによる降伏

長方形断面の軟鋼の はり が均等曲げモーメントを受けたときには、応力分布は対称であるから、中立軸からの距離を重さにつけた応力の附重平均値が一定値に

達したところで降伏が起るのであって、降伏の条件は

$$\bar{\sigma} = \frac{b \int \sigma_y dy}{b \int y dy} = \sigma_y \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{すなわち } M_y = b \int \sigma_y dy = \frac{1}{4} b h^3 \sigma_y \dots \dots \dots (2)$$

ただし、 b は断面の幅、

h は断面の高さ、

y は断面上の面素 $b dy$ の中立軸からの距離、

σ は断面に働く垂直引張応力、

σ_y は降伏部分の垂直引張応力で、材料について一定の値、

M_y は はり の降伏点である。

これを対称的でない場合にも用い得るような、もっと一般的の考え方から求めてみよう。降伏は応力の最

第 1 図

大のところから始まって断面全体に拡がってゆくのであるから、まず初めに外側の応力最大の部分が dy だけ降伏した状態を考えてみよう。第1図(a)は降伏点に達してまだ降伏を始めない状態、(b)は引張側も圧縮側も dy だけ降伏した状態である。降伏した dy の部分の保ち得る応力は σ_y であるから、全体のモーメント M_y のうちで降伏した部分の受けもつモーメントは

$$dM = b h \sigma_y dy.$$

したがって、まだ降伏していない部分の受けもつモーメント M' は

$$M' = M_y - b h \sigma_y dy.$$

全体に M_y のモーメントを受けていて、この一定のモーメントで降伏が中の方に進んでゆくということは、まだ降伏していない、高さ $h-2dy$ の部分を一つのはりと考えれば、これが M' のモーメントで降伏するというのである。したがって、高さ h のはりと $h-2dy$ のはりの降伏点を比較して

$$\frac{M_y}{h^2} = \frac{M'}{(h-2dy)^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

これから直ちに

$$M_y = \frac{1}{4}bh^2\sigma_y \quad \dots\dots\dots (2)'$$

すなわち、当然のことであるが、前と同じ結果が得られる。

2. 軟鋼はりの引張曲げ組合せ応力による降伏

応力分布が対称的でない場合の例として、長方形断面のはりの引

張り曲げ組合せ応力による降伏を考えてみよう。第2

図(a)は降伏

点に達したところ、(b)はそこで dy だけ降伏したときの応力分布を表わしたものであるが、いま

T を引張力、

M_y を T を受けているときの降伏曲げモーメント、

σ_t を T による引張応力、

σ_b を M_y による縁応力、

$$\sigma_s = \sigma_t + \sigma_b,$$

T' を dy だけ降伏したときの未降伏部分 $h-dy$ の部分の受ける引張力、

M' を同じく $h-dy$ の部分の受ける曲げモーメント、

σ_t' を T' により $(h-dy)$ の部分に生ずる引張応力、

σ_b' を M' により $(h-dy)$ の部分に生ずる縁応力、
 $\sigma_s' = \sigma_t' + \sigma_b'$,

とすれば、 σ_s は高さ h のはりの降伏応力であり、 σ_s' は高さ $h-dy$ のはりの降伏応力であるが、 σ_s は σ_t のかん数であるから

$$\sigma_s' = \sigma_s + \frac{d\sigma_s}{d\sigma_t} d\sigma_t \quad \dots\dots\dots (4)$$

ところが、

$$T = bh\sigma_t,$$

$$M_y = \frac{1}{6}bh^2\sigma_b,$$

$$T' = T - b\sigma_y dy, \quad \sigma_t' = \sigma_t - (\sigma_y - \sigma_t) \frac{dy}{h},$$

$$M' = M - \frac{1}{2}bh(\sigma_y - \sigma_t) dy,$$

$$\sigma_b' = \sigma_b + (2\sigma_b - 3\sigma_y + 3\sigma_t) \frac{dy}{h},$$

であるから、これらの関係を(4)に入れば

$$2\sigma_b - 3\sigma_y + 3\sigma_t = -(\sigma_y - \sigma_t) \frac{d\sigma_b}{d\sigma_t} \quad \dots\dots\dots (4)'$$

これを解いて、

$$\sigma_t = 0, \text{ において } \sigma_b = \frac{3}{2}\sigma_y,$$

$$\text{の条件を入れれば } \frac{\sigma_b}{\sigma_y} = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_y} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

これが引張り一曲げ組合せ応力を受けたときの降伏限界である。軟鋼の場合には他のもっと簡単な方法からこの限界を求めることもできるが⁽⁵⁾、当然のことながら結果は同じである。

軟鋼の降伏には、このほかに $1.5\sigma_y$ の限界応力による局部的降伏が

あって、 σ_t の小さいところではこの方が低いが、今ここで問題になるのは(5)で示される断面全体の問題としての降伏である。

(5)式を図に表わせば第3図のようになる。図に明らかなように、 $\sigma_t = 0$ のところでは

この限界線の傾きは0である。このことは σ_t の極く小さいところでは σ_t は降伏に影響はないということである。

3. 鋳鉄はりの均等曲げによる破壊

鋳鉄の長方形断面のはりの均等曲げによる破壊を、前

の軟鋼の降伏と全く同様に考えてみよう。第4図(a)は破壊モー

メント M_B に達したときの図である。引張側と圧縮側とでは応力とひずみの関係が違うので中立軸は真中ではない。はりの高さ h に対して、引張側の縁辺から中

第2図

第3図

第4図

立軸までの距離を nh とする。第4図(b)は dy の部分に破壊が始まった状態である。鑄鉄のような脆性材料でも破壊が始まると同時に離れてしまうのではなく、破壊局部について考えれば、やはりひずみの増加とともに応力が変化していつ、ついに離れるのであると思う。降伏の場合には、降伏を始めた部分の保ち得る応力は、均等応力を受けたときの降伏応力に等しい。鑄鉄の破壊の場合にも、破壊を始めたときには、最初その部分の保ち得る応力は均等応力を受けたときの破壊応力 σ_B に等しいと考えるのが妥当であろう。そうすると残りの $h-dy$ の受ける引張力 dT 、および曲げモーメント M' は

$$dT = -b\sigma_B dy,$$

$$M' = M_B - nbh\sigma_B dy.$$

M_B のモーメントではりの破壊が進むということは、 dT, M' で $h-dy$ のはりが破壊を始めるということである。

引張荷重 T が同時に働いていれば、 M_B は T のかん数であって、破壊条件としては(4)式のような形のものを作らなければならないであろう。そういう式を作って、 $T=0$ の点の M_B を求めてもよいのである。しかし、ここでは h のはりに対しては $T=0$ であり、 $h-dy$ のはりに対しても引張荷重はきわめて小さい dT である。この dT は、前節の軟鋼降伏のときと同様に、破壊にはきかないのである。したがって均等曲げによる破壊の条件は、簡単に

$$\frac{M_B}{h^2} = \frac{M'}{(h-dy)^2} \dots (5)$$

これより直ちに

$$M_B = \frac{n}{2} b h^2 \sigma_B \dots (6)$$

これが長方形断面の鑄鉄はりの破壊モーメントである。

引張側と圧縮側とで応力とひずみの関係の異なることは、中立軸の位置 n として破壊モーメントに入ってくる。 n さえ等しければ途中の応力分布の形は影響しないのである。分布が対称ならば $n=1/2$ となつて、(2)と同じ形になる。

4. 実験結果との比較

前に行った実験⁽³⁾の結果と比較してみよう。実験は一度に鑄造した 10 本の棒から引張試験片 4 本、圧縮試験片 2 本、曲げ試験片 4 本を作つて、これらについて行ったものである。第5図および第1表は引張実験の結果である。応力-ひずみの関係は図にみるように、 $T-1$ が $4 \sim 7 \text{ kg/mm}^2$ の辺で少し離れてい

第 5 図

第 1 表 引張実験

試験片	直径 mm	破壊荷重 kg	破壊応力 σ_B kg/mm ²	破壊 ひずみ
T-1	12.00	1 478	13.06	0.004 27
T-2	12.00	1 460	12.91	0.004 18
T-3	12.01	1 525	13.45	0.004 68
T-4	11.98	1 483	13.16	0.004 24
全部の平均値			13.15	0.004 34
T-1, T-2, T-4 の平均値			13.04	0.004 23

るだけで、ほかは一つの曲線の上によく乗っている。破壊応力 σ_B は $T-1, T-2, T-4$ は非常に接近しているが、 $T-3$ だけ少し大きくなっている。それで

第 6 図

平均値としては、全部の平均値と、 $T-3$ を除いた平均値とを通り出しておいた。

第 2 表 曲 げ 実 験

試験片	断面の幅×高さ mm	破壊モー メント cm·kg	破 壊 曲 率 $\frac{1}{\rho} \times 10^2, 1/\text{cm}$
B-1	10.01×10.00	390	1.089
B-2	9.99×10.00	385	1.069
B-3	9.99×10.01	395	1.110
B-4	9.99×10.02	390	1.089
平均値		390	1.089

第 7 図

第 6 図は圧縮実験の結果である。

第 7 図および第 2 表は曲げ実験の結果である。均等曲げモーメントを加えた実験であるが、図にみるようにモーメントとたわみとの関係は皆一本の曲線の上

第 8 図

に乗っているし、第 2 表にみるように破壊モーメント M_B もよくそろっている。

ここでは、引張りおよび圧縮の曲線から曲げモーメントとたわみとの関係および曲げによる破壊点を計算して、これと曲げ実験の結果とを比較してみよう。

まず引張りと圧縮の曲線を合せて第 8 図を作る。この図から第 3 表の数値を計算してゆく。計算の仕方は

第 3 表

引張り ずみ $\epsilon \times 10^3$	中立軸 の位置 n	曲 率 $\frac{1}{\rho} \times 10^2$ 1/cm	モーメ ント M , cm·kg	$M_B = \frac{n}{2} b h^2 \sigma_B$ cm·kg	$\sigma_B = \frac{M}{n}$ kg/mm²	$\sigma_B = \frac{M}{n}$ kg/mm²	備 考
0	0.500	0	0	326			
1	0.520	0.192	110.2	339			
2	0.538	0.372	194.5	351			
3	0.553	0.543	253.0	360			
4	0.566	0.707	302.0	369			
4.23	0.569	0.740	312	371			
4.34	0.571	0.757	316		375		$\sigma = \sigma_B$ の点
5	0.577	0.867	340.5	376		379	
6	0.587	1.022	371.3	383		386	
6.48	0.591	1.096	385.0	385			破壊モ ーメン ト
6.64	0.592	1.122	389.0		389		
7	0.595	1.176	398.3	388		392	

たとえば第 8 図の引張り側のひずみ $\epsilon = 0.001$ のところに直線 AB を引く。次に圧縮側に面積 OCD が面積 OBA に等しくなるように直線 CD を引く。そうすると BOC は高さ AD の 1/2 が曲げモーメントを受けて引張り側縁辺のひずみが 0.001 になったときの応力分布曲線である。したがって、このときの中立軸の位置 n が直ちにわかるし、 n と縁辺のひずみとから曲率 $1/\rho$ が計算できる。また応力分布がわかっているから曲げモーメント M も計算できる。これをおのおのひずみについて繰り返してゆけばモーメント M と曲率 $1/\rho$ との関係が得られる。初めモーメントのごく小さいところでは材料はまだ弾性的で $n = 0.5$ である。それからモーメントが増すにしたがって中立軸が移動してゆく。それで、ある部分では初めには圧縮を受けていたのが後に引張りになってくるようになる。しかしこの部分の応力は一般に小さいので、この計算ではこの部分の履歴現象はないものと仮定してある。

また別に、 σ_B は引張り実験からわかっているから、これと n とから (6) 式の破壊モーメント M_B を計算してゆく。この理論では M が M_B に達したところで破壊が起るはずである。

第 3 表の計算結果をみると、縁辺応力が σ_B に達しても M はまだ M_B に達しない。すなわち、この理論ではここではまだ破壊を起さないということである。

が、実際実験でも破壊はまだずっと先の方である。

そこから先は引張応力—ひずみの曲線がないので、適当に引き伸ばした曲線を用いて計算を続けてゆく。その結果、計算では

$$M_B = 385 \text{ cm} \cdot \text{kg} (\sigma_B = 13.04 \text{ kg/mm}^2) \\ = 389 \text{ cm} \cdot \text{kg} (\sigma_B = 13.15 \text{ kg/mm}^2)$$

のところで破壊が起ることになる。第2表の実験結果と比較して、これは非常によく合っている。¹⁾

曲線を適当に引き伸ばすのであるから、引き伸ばし方によって結果が違わないかという問題がある。

しかし第3表の M_B の値をみればわかるように、破壊点の辺ではこの値はだいたい一定に近いので、引き伸ばし方が違ってても、それが破壊モーメントの値に及ぼす影響はきわめてわずかである。破壊点の曲率またはたわみについては引き伸ばし方の影響がある。しかしこれも極端に非合理的な引き伸ばし方をしない限り、その違いは比較的わずかである。

第9図は第3表の計算と実験結果とを图示したものである。モーメントと曲率との関係も、この種の計算と実験では、この程度に合っていればよく合うと言ってよいであろう。縁応力 σ が σ_B 以上のところでも、ただ適当に引き伸ばしただけであるが、相当よく合っている。その結果破壊点曲率の計算値も実験に非常に近い値が出ている。

5. 結 言

以上述べたことから、破壊がある一点の応力状態できまるものでなく、断面全体の問題であること、そして断面全体の問題として計算すれば実験ときわめてよく一致することがわかった。

第 9 図

鑄鉄のような脆性材料の引張りによる破壊⁽⁶⁾、ねじりによる破壊⁽⁷⁾については前に述べておいた。これで、このような材料の最も基本的な引張り、ねじり、曲げによる強度およびそれら相互の関係が明らかになったわけである。

なお第3表の数値計算は鳥崎忠雄君にやってもらったもので、ここに厚く謝意を表する。

注：—

(1) 昭和25年4月 第27期定時總會講演會において講演。

原稿受付 昭和26年3月1日。

(2) 正員、東京大學工學部。

(3) 機械學會誌, 36 卷 195 號 (昭和8年)。

(4) 機械學會誌, 53 卷 374 號 (昭和25年), その他會誌および論文集。

(5) 機械學會論文集, 14 卷 48 號 (昭和23年)。

(6) 機械學會論文集, 17 卷 61 號 (昭和26年)。

(7) 機械學會論文集, 18 卷 65 號 (昭和27年)。

539.431.4/.4

曲げおよびねじり耐久限度線図⁽¹⁾

(疲れ耐久限度の法則 第5報)

中西不二夫⁽²⁾

Endurance Limit Diagrams under Bending and under Torsion

by Fujio NAKANISHI

The same problems were treated formerly. At that time, however, fatigue under non-uniform stress distribution was not yet clearly understood, and it was considered that the whole stress distribution over the cross section had an effect on fatigue.

Now the relation between fatigue and stress distribution is clear, and, in this paper, endurance limit diagrams under bending and under torsion were computed generally. The results of calculation agree very closely with experiments.

さきに第1報⁽³⁾で耐久限度の仮説を提唱し、第3報⁽⁴⁾で応力分布が均等でないときの応力と疲れとの関係を

明らかにし、第4報⁽⁵⁾では耐久限度の仮説にこの関係を取り入れたものを述べておいた。この仮説は実際の