平行平面間の放射層流⁽¹⁾村 田 暹⁽²⁾

Radial Flow of Viscous Fluid Through Parallel Walls

by Susumu MURATA

With respect to the flow of viscous fluid through parallel plane walls without a sink or source at their center, Schulz-Grunow discussed in the paper on disk friction. The present paper deals with the flow with a sink or source. The principal conclusion is as follows.

When a plate is rotating, while another is fixed, the flow is characterized by two Reynold's numbers pertaining to the radial and tangential flows, respectively. The pressure shows a minimum value at a certain radius due to the centrifugal force in the case of outward flow, while it decreases with the decreasing radius in the case of inward flow.

When both plates are fixed, the pressure shows a maximum value at a certain radius due to the inertia force in the case of outward flow, while it decreases with the decreasing radius, as the above case, in the case of inward flow. The velocity distribution across the plates is flat in the case of inward flow, while it has a peak in the case of outward flow.

When two plates are rotating with different speeds without sink or source, the pressure increase along radius is minimum at a certain rotating speed ratio when the character of radial flow changes.

1. 緒 言

平行平面間の流れ（一面回転，一面固定）については，Schultz-Grunow⁽³⁾が円板摩擦と関連して論じているが，本論文ではこれに放射状の流れが加わった場合，すなわち中心に湧源，吸源のある場合を取り扱い，圧力分布，速度分布を求めた．また特別な場合として，両面固定で湧源，吸源のあるもの，両面回転で湧源等のないものを論じた．

2. 基礎式

回転軸を z 軸として，一平面上に原点のある円柱座標 (r, θ, z) を考える． u, v, w を r, θ, z 方向の流速， ψ を流線かん数とし，流れは z 軸に関して対称であるとすれば，*

$$\begin{cases} 2k \frac{\Omega^* \partial \Omega^*}{\alpha^2 \partial \beta} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial(\psi^*, D^2 \psi^*)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{2}{\alpha^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial \beta} D^{*2} \psi^* = \frac{1}{R_1} D^{*4} \psi^* \\ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial(\psi^*, \Omega^*)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{1}{R_1} D^{*2} \Omega^* \quad D^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \end{cases} \quad (2)$$

ここに $R_1 = -u_0 h / \nu$ ， $R_2 = v_0 h / \nu$ ， $k = R_2^2 / R_1^2$ であり u_0 は $r = h(\alpha = 1)$ での半径方向平均流速， v_0 は $r = h$ での回転面の周速とする．符号の関係上 R_1 が正のときは中心に吸源が，負のときは湧源があることになる．

$$* \quad u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = \frac{\Omega}{r}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \dots\dots\dots(1)$$

となり，更に運動方程式から圧力を消去した結果は次のようになる⁽⁴⁾．

$$\begin{cases} \frac{2\Omega}{r^2} \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, D^2 \psi)}{\partial(r, z)} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} D^2 \psi = \nu D^4 \psi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, \Omega)}{\partial(r, z)} = \nu D^2 \Omega \\ D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{cases}$$

ただし ν は流体の動粘性係数である．無次元形にするため， $\Omega = h^2 \omega \Omega^*$ ， $\psi = \psi_h \psi^*$ ， $r = h \alpha$ ， $z = h \beta$ とおく．ただし h は二平面間の距離， ω は平面の角速度で， Q を流量とし， $\psi_h = -Q/2\pi$ とする．前式は次式のようになる．

3. 係数の方程式

(2)式の解が次の形で与えられるものとする．

$$\begin{cases} \Omega^* = \Omega_2 \alpha^2 + \Omega_0 + \Omega_{-2} \alpha^{-2} + \Omega_{-4} \alpha^{-4} + \dots\dots \\ \psi^* = \psi_2 \alpha^2 + \psi_0 + \psi_{-2} \alpha^{-2} + \psi_{-4} \alpha^{-4} + \dots\dots \end{cases} \quad (3)$$

(2)式に代入して係数を比較して次式を得る．

$$\begin{cases}
 2k\Omega_2\Omega_2' + 2\psi_2\psi_2''' = \psi_2^{IV}/R_1 \\
 2k(\Omega_0\Omega_2' + \Omega_0'\Omega_2) + 2(\psi_0'\psi_2''' + \psi_0''\psi_2') = \psi_0^{IV}/R_1 \\
 2k(\Omega_{-2}\Omega_2' + \Omega_0\Omega_0' + \Omega_2\Omega_{-2}') + 2(\psi_2\psi_{-2}''' - \psi_{-2}\psi_2''' + \psi_2'\psi_{-2}'' + \psi_0'\psi_0'') \\
 \quad + \psi_{-2}''\psi_2') = \psi_{-2}^{IV}/R_1 \\
 2k(\Omega_{-4}\Omega_2' + \Omega_{-2}\Omega_0' + \Omega_0\Omega_{-2}' + \Omega_2\Omega_{-4}') + 2(\psi_2\psi_{-4}''' + 2\psi_0'\psi_{-2}'' + \psi_{-2}'\psi_0'') \\
 \quad + \psi_2'\psi_{-4}'' - 2\psi_{-4}\psi_2''' - \psi_{-2}\psi_0''' + 2\psi_2'\psi_{-4}'' + 8\psi_2\psi_{-2}' + 16\psi_2'\psi_{-2} + 8\psi_{-2}\psi_2') \\
 \quad = (\psi_{-4}^{IV} + 16\psi_{-2}^{IV})/R_1
 \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{cases}
 2\psi_2\Omega_2' - 2\Omega_2\psi_2' = \Omega_2''/R_1 \\
 2\psi_2\Omega_0' - 2\Omega_2\psi_0' = \Omega_0''/R_1 \\
 2(\psi_2\Omega_{-2}' - \psi_{-2}\Omega_2') - 2(\psi_{-2}'\Omega_2 - \Omega_{-2}\psi_2') = \Omega_{-2}''/R_1
 \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

ただし'は β に関する微分を示す。更に ψ_n, Ω_n を(4)(5)から逐次近似法で求めれば、次式のうに表わされる。

$$\begin{cases}
 \psi_2 = A_1R_1 + A_3R_1^3 + A_5R_1^5 + \dots\dots\dots \\
 \Omega_2 = B_0 + B_2R_1^2 + B_4R_1^4 + \dots\dots\dots
 \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{cases}
 \psi_0 = C_0 + C_2R_1^2 + C_4R_1^4 + \dots\dots\dots \\
 \Omega_0 = D_1R_1 + D_3R_1^3 + D_5R_1^5 + \dots\dots\dots
 \end{cases} \dots\dots\dots (7) *$$

$$\begin{cases}
 \psi_{-2} = E_1R_1 + E_3R_1^3 + E_5R_1^5 + \dots\dots\dots \\
 \Omega_{-2} = F_2R_1^2 + F_4R_1^4 + F_6R_1^6 + \dots\dots\dots
 \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{cases}
 \psi_{-4} = G_1R_1 + G_2R_1^2 + G_3R_1^3 + \dots\dots\dots \\
 \Omega_{-4} = H_2R_1^2 + H_3R_1^3 + \dots\dots\dots
 \end{cases} \dots\dots\dots (9)$$

そして上式の A_n, B_n 等は次の式を満足する。

$$\begin{cases}
 A_1^{IV} = 2kB_0B_0' \\
 A_3^{IV} = 2k(B_0B_2' + B_2B_0') + 2A_1A_1''' \\
 A_5^{IV} = 2k(B_0B_4' + B_2B_2' + B_0'B_4) + 2(A_1A_3''' + A_1'''A_3)
 \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{cases}
 B_0'' = 0 \\
 B_2'' = 2(A_1B_0' - B_0A_1') \\
 B_4'' = 2(A_3B_0' + A_1B_2' - B_0A_3' - B_2A_1')
 \end{cases} \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{cases}
 C_0^{IV} = 0 \\
 C_2^{IV} = 2k(B_0'D_1 + B_0D_1') + 2(A_1C_0''' + A_1'C_0'') \\
 C_4^{IV} = 2k(B_0'D_3 + D_1B_2' + B_0D_3' + B_2D_1') + 2(A_3C_0''' + A_1C_2''' + A_3'C_0'' + A_1'C_2'')
 \end{cases} \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{cases}
 D_1'' = -2B_0C_0' \\
 D_3'' = 2(A_1D_1' - B_2C_0' - B_0C_2') \\
 D_5'' = 2(A_1D_3' + A_3D_1' - B_4C_0' - B_2C_2' - B_0C_4')
 \end{cases} \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{cases}
 E_1^{IV} = 2C_0'C_0'' \\
 E_3^{IV} = 2k(F_2B_0' + D_1D_1' + B_0F_2') + 2(A_1E_1''' - E_1A_1''' + 2A_1'E_1'' + C_0'C_2'' + C_2'C_0'') \\
 E_5^{IV} = 2k(B_2'F_2 + B_0'F_4 + D_1D_3' + D_3D_1' + B_2F_2' + B_0F_4') + 2(A_3E_1''' + A_1E_3''' \\
 \quad - A_3'''E_1 - A_1'''E_3 + 2A_3'E_1'' + 2A_1'E_3'' + C_0'C_4'' + C_2'C_2'' + C_4'C_0'')
 \end{cases} \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{cases}
 F_2'' = -2(E_1B_0' + B_0E_1') \\
 F_4'' = 2(A_1F_2' - E_1B_2' - E_3B_0' - E_1'B_2 - E_3'B_0 + A_1'F_2) \\
 F_6'' = 2(A_3F_2' + A_1F_4' - E_1B_4' - E_3B_2' - E_5B_0' - E_1'B_4 - E_3'B_2 - E_5'B_0 + A_3'F_2 + A_1'F_4)
 \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

$$\begin{cases}
 G_1^{IV} = -16E_1'' \\
 G_2^{IV} = 2(-E_1C_0''' + 2E_1''C_0' + E_1'C_0'')
 \end{cases} \dots\dots\dots (16)$$

次に速度、圧力を無次元で表わして、 $u=u_0U, v=v_0V, w=u_0W, Pu_0^2=p/\rho$ とおく。(1)(3)および(6)~(9)より U, V, W, P は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 U &= (A_1'R_1 + A_3'R_1^3 + A_5'R_1^5 + \dots)\alpha + (C_0' + C_2'R_1^2 + C_4'R_1^4 + \dots)\alpha^{-1} \\
 &\quad + (E_1'R_1 + E_3'R_1^3 + E_5'R_1^5 + \dots)\alpha^{-3} + (G_1'R_1 + G_2'R_1^2 + \dots)\alpha^{-5} + \dots\dots\dots (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= (B_0 + B_2R_1^2 + B_4R_1^4 + \dots)\alpha + (D_1R_1 + D_3R_1^3 + D_5R_1^5 + \dots)\alpha^{-1} + (F_2R_1^2 + F_4R_1^4 \\
 &\quad + F_6R_1^6 + \dots)\alpha^{-3} + \dots\dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W &= -2(A_1R_1 + A_3R_1^3 + A_5R_1^5 + \dots) + 2(E_1R_1 + E_3R_1^3 + E_5R_1^5 + \dots)\alpha^{-1} + (G_1R_1 \\
 &\quad + G_2R_1^2 + \dots)\alpha^{-3} + \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = -\left(U \frac{\partial U}{\partial \alpha} + W \frac{\partial U}{\partial \beta} - k \frac{U^2}{\alpha}\right) + \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} - \frac{U}{\alpha^2}\right) \\ = -(P_2 \alpha + P_0 \alpha^{-1} + P_{-2} \alpha^{-3} + P_{-4} \alpha^{-5} + \dots) \quad (20)$$

* とすれば, 次のようになる.

4. 一平面回転の場合

境界条件を

$$\begin{cases} z=0 \text{ で } u=v=w=0, \quad \psi=\Omega=\partial\psi/\partial z=0 \\ z=h \text{ で } u=w=0, \quad v=r\omega, \quad \partial\psi/\partial z=0, \\ \psi=\psi_h, \quad \Omega=r^2\omega \end{cases} \quad *$$

$$\begin{cases} \beta=0 \text{ で } A_n=A_n'=B_n=C_n=C_n'=D_n=E_n \\ \quad =E_n'=F_n=G_n=G_n'=0 \\ \beta=1 \text{ で } A_n=A_n'=B_n(n \neq 0)=C_n(n \neq 0)=C_n' \\ \quad =D_n=E_n=E_n'=F_n=G_n=G_n'=0, \\ B_0=1, \quad C_0=1 \end{cases}$$

第 1 表 係 数 表

	β^2	β^3	β^4	β^5	β^6	β^7	β^8	β^9	β^{10}	β^{11}	β^{12}	β^{13}	β^{14}	β^{15}	β^{16}	β^{17}	β^{18}	β^{19}
A_1	0.33333	-0.50000																
A_2	-0.73185	1.2764																
A_3	0.70411	-0.13138																
C_0	3	-2																
C_2	0.30595	-0.50073																
C_4	-0.00587	0.05773																
E_1	0.08571	-0.23774																
E_3	-0.82073	0.08527																
E_5	0.086524	-0.02167																
G_1	0.014623	-0.027519	-0.1429															
G_2	-0.00295	0.004824	0.05143	-0.14571	0.05878	0.19286	-0.27143	0.13714	-0.02494									
	β	β^4	β^5	β^7	β^8	β^9	β^{10}	β^{11}	β^{12}	β^{13}	β^{14}	β^{15}	β^{16}	β^{17}	β^{18}	β^{19}	β^{20}	β^{21}
B_0	1																	
B_2	-0.12680	-0.55556	1.0000	-0.31796														
B_4	0.034977	0.19253	-0.38228	-0.05493	0.55556	-0.33730	-0.10725	0.11063	-0.01094									
D_1	0.4	-1	0.6															
D_3	-0.006738	-0.0706	0.12500	-0.17587	0.09089	-0.03611	-0.00858	0.002003										
D_5	0.037077	0.02052	-0.29365	-0.13547	0.33074	-0.57662	-0.51646	0.6383	-0.70007	0.67097	0.76154	-0.07006	-0.00906	0.00619				
F_2	-0.00093	-0.04286	0.10286	-0.17143	0.15000	-0.03340												
F_4	0.00491	0.31083	-0.28732	-0.04491	0.06369	-0.02704	-0.01762	0.02847	-0.01335	0.00093	0.01183	-0.00096						
F_6	0.01434	-0.15765	0.13258	0.29423	-0.49003	0.71654	-0.06619	0.03497	-0.04732	0.01706	0.02367	-0.00501	0.00066	0.00653	-0.00305	-0.00069	0.0003210	-0.00007

これらの条件を用いて, (10)~(16)を解けばその係数は第1表に示すようになる. したがってこの表を(17) (18) (19) (20) に用いれば, 速度分布, 圧力*

*分布を計算することができる. とくに圧力分布の係数は P_{-4} 以外は β に無関係でレイノルズ数のみの関数となる. すなわち

$$\begin{cases} P_2 = -0.3 k + 7.6584 \times 10^{-4} k^2 R_1^2 - 7.8828 \times 10^{-6} k^3 R_1^4 + \dots \\ P_0 = -12/R_1 - 0.30524 k R_1 - 3.1038 \times 10^{-4} k^2 R_1^3 + \dots \\ P_{-2} = -1.54284 + 0.39916 k R_1^2 - 1.2966 \times 10^{-4} k^2 R_1^4 + \dots \\ P_{-4} = (-0.045714 + 8 E_1') + \{0.028943 + (4 A_1'' G_1 - 4 A_1' G_1' - 2 A_1 G_1'')\} R_1 + \dots \end{cases} \quad (21)$$

更に壁面では $A_1 = A_1' = G_1 = E_1' = 0$

$$P_{-4} = -0.045714 + 0.028943 R_1 + \dots$$

となるゆえ, (15) より壁面の圧力は次のように表わされる.

$$P = -\left(\frac{1}{2} P_2 \alpha^2 + P_0 \log \alpha - \frac{1}{2} P_{-2} \alpha^{-2} - \frac{1}{4} P_{-4} \alpha^{-4} + \dots\right) + \text{定数} \quad (22)$$

また $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$ により囲まれる輪形の固定面に働くモーメントを M_f とすれば

$$M_f = 2\pi\mu \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0} dr = 2\pi\mu h^3 \omega \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha \left(\frac{\partial \Omega^*}{\partial \beta}\right)_{\beta=0} d\alpha = 2\pi\mu h^3 \omega \times [(0.25000 - 3.1745 \times 10^{-4} R_2^2 + 8.58 \times 10^{-7} R_2^4 + \dots)(\alpha_2^4 - \alpha_1^4) + R_1 (0.20000 - 3.3690 \times 10^{-4} R_2^2 + 1.8535 \times 10^{-6} R_2^4 + \dots)(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + R_1^2 (-4.7619 \times 10^{-4} + 4.4908 \times 10^{-3} R_2^2 + 1.4336 \times 10^{-5} R_2^4 + \dots)(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) + \dots] \quad (23)$$

ただし μ は流体の粘性係数である. 同様に, 回転面に働くモーメントを M_r とすれば

$$M_r = 2\pi\mu h^3 \omega \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha \left(\frac{\partial \Omega^*}{\partial \beta}\right)_{\beta=1} d\alpha = 2\pi\mu h^3 \omega \times [(0.25000 + 0.0010714 R_2^2 - 2.045 \times 10^{-6} R_2^4 + \dots)(\alpha_2^4 - \alpha_1^4) + R_1 (-0.30000 + 0.0013575 R_2^2 + 1.48 \times 10^{-6} R_2^4 + \dots)(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + R_1^2 (4.7619 \times 10^{-4} + 4.4908 \times 10^{-3} R_2^2 + 1.4336 \times 10^{-5} R_2^4 + \dots)(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) + \dots] \quad (24)$$

となる。 M_f と M_r は等しくならないが、運動量のモーメントの定理により、 $r=r_1$, $r=r_2$ の円柱面を出入する運動量のモーメントと、 $r=r_1$, $r=r_2$ の円柱面に働くせん断力によるモーメントのためであることは明らかである。ただし後者は中心から離れた所では無視できる。

二、三の数値計算の結果を第 1~4 図に示した。これらより次のことがわかる。

1. 中心から流出する場合の圧力分布は第 1 図のようになる。すなわちある半径までは流出のため内部ほど圧力が高い

がある半径以上では遠心力のために内部ほど圧力が低くなり、極小値ができる。このときの α は R_1 が大きいほど、 R_2 が小さいほど大になる。また中心に流入する場合は中心から離れるほど圧力は高くなる。

2. 半径方向速度は第 2 図に見るような半径で逆流を生ずる。この半径の R_1 , R_2 に対して変る傾向は極小値の半径がとる傾向と同じである。

3. 円周方向流速の分布は第 3 図のようになる。これは半径方向の流れが円周方向の運動量モーメントを持ち込むために生ずる。

4. 回転面、固定面に働くモーメントの一例を第 4 図に示す。図より固定面に働くモーメントは流出の場合は流量が増加すると小にな

第 1 図

第 2 図

第 3 図

第 4 図

5. 二平面固定の場合

特別な例として $\omega=0$ とすれば $R_2=0$, $k=0$ となるから、(17) (18) (19) (20) から次式を得る。

$$\begin{aligned} U &= C_0/\alpha^{-1} + E_1/R_1 \alpha^{-3} + (G_1/R_1 + G_2/R_1^2 \\ &\quad + \dots) \alpha^{-5} + \dots \\ W &= 2 E_1 R_1 \alpha^{-4} + 4(G_1 R_1 + G_2 R_1^2) \alpha^{-6} + \dots \\ P &= 12 \log \alpha / R_1 - 0.77143 \alpha^{-2} \\ &\quad + (-0.11429 + 0.0072357 R_1 + \dots) \alpha^{-4} \\ &\quad + \dots + \text{定数} \end{aligned}$$

上式から二、三の場合について数値計算を行えば第 5~8 図を得る。これらの図から次のことがわかる。

り流入の場合は流量が増加すると大になる。回転面ではその逆の傾向になる。これは周方向流速が第 3 図のようになるからである。

第 5 図

第 6 図

1. 粘性項を考えないとベルヌーイ式から内部ほど低圧となる。また慣性項を考えないと流出の場合は内部で圧力が高く流入の場合は内部で圧力が低く対数的に変化する。

慣性項、粘性項を考えた本計算では中心から流出する場合は第 5~6 図に示すようになる。すなわち中心に近い所では内部ほど圧力低く、ある半径以上では中心から離れるほど圧力が低く極大値を生ずる。このときの α は $|R_1|$ が

大なるほど大である。
中心に流入する場合は
第7図に示すように内
部ほど圧力が低い。

2. 半径方向流速の
分布は第8図に示すよ
うに、流入の場合は収
縮流で先の平らな流れ
に、流出の場合は拡大
流で先ののがつた流れ
になる。半径の大きな
所では放物線分布の流
れに近づき、この近づ
き方は $|R_1|$ が大なる

第 7 図

$$\begin{cases} A_0 = 1 - x\beta \\ B_1 = (-0.083333x + 0.033333x^2)\beta^2 + (0.16667x - 0.5x^2)\beta^3 - 0.083333x\beta^4 + 0.16667x^2\beta^5 \end{cases}$$

$$P = 0.5 \alpha \alpha^2 = 0.5(1 - x + 0.3x^2)\alpha^2$$

$$p = a \rho r^2 \omega^2 / 2$$

ただし中心の圧力を 0 とした。また流速は $u = v_0 R_2 B_1' \alpha$, $v = v_0 A_0 \alpha$, $w = -2 v_0 R_2 B_1$ となる。数値計算の結果を第9~10図に示す。

1. 圧力分布の係数 a は第9図のようになり、同一方向に回転するとき ($0 < x < 1$) には x が小のときは両平面の平均速度で流体が回転しているとして算出してよいが、一方が静止しているとき ($x=1$) には $a=0.3$ となり、両平面が互に反対方向に同じ大きさの角速度で回転しているとき ($x=2$) には $a=0.2$ となる。

第 8 図

ほど遅い。

3. z 軸方向流速 W は流入流出とも中心から壁面に向い、半径の大きいほど小である。これはとがつた流れが放物線分布に、放物線分布の流れが平らな流れになるための二次的な流れである。

6. 吸源、湧源のない場合

この場合は $u_0=0$, $R_1=0$ とおけばよい。また $P = p/\rho v_0^2$ とすれば (21) (22) より

$$P = P/k = -0.5\alpha^2(-0.3 + 7.6584 \times 10^{-4} R_2^2 - 7.8828 \times 10^{-6} R_2^4 + \dots) + \text{定数}$$

となる。第1項は Schultz-Grunow の結果である。二平面の回転速度が異なるときは、すなわち $z=0$ で ω , $z=h$ で $(1-x)\omega$ で回転するときは、(4)(5) で $\phi_2 = R_1 \psi_2 / R_2$, $\psi_0 = \psi_{-2} = \psi_{-4} = \Omega_0 = \Omega_{-2} = 0$ とおき

$$\begin{cases} 2\Omega_2 \Omega_2' + 2\phi_2 \phi_2''' = \psi_2^{IV} / R_2, \\ 2\phi_2 \Omega_2' - 2\Omega_2 \phi_2' = \Omega_2'' / R_2 \end{cases} \quad (25)$$

これを解くために一般には

$$\begin{cases} \Omega_2 = A_0 + R_2^2 A_2 + R_2^4 A_4 + \dots, \\ \phi_2 = R_2 B_1 + R_2^3 B_3 + R_2^5 B_5 + \dots \end{cases} \quad (26)$$

とおくのであるが、ここでは R_2 が小として第1項のみを考えることにする。すなわち $\Omega_2 = A_0$, $\phi_2 = R_2 B_1$ を (25) に代入すれば

$$A_0'' = 0, \quad B_1^{IV} = 2 A_0 A_0'$$

となる。これを

$$\begin{cases} \beta=0 \text{ で } A_0=1, \quad B_1=B_1'=0 \\ \beta=1 \text{ で } A_0=(1-x), \quad B_1=B_1'=0 \end{cases}$$

の条件で解けば

第 9 図

$x=5/3$ で a は最小値 $1/6$ となる。

2. 半径方向流速の分布は第10図のようになり、 $x=0$ では流体は一体となつて回転するが x が大となると循環流を生じる。 $x=5/3$ 以下では回転速度の大き

第 10 図

な平面にそつて外向きの流れ、小さい平面にそつて内向きの流れができる。 x が $5/3$ より大のときは平面にそつて外向き流れ、中心で内向きの流れができる。

7. 両面同速度回転の場合

この場合は前と同様にして解を求めることができる。ただし境界条件は

$$\begin{cases} \beta=0 \text{ で } \Omega_2=1, \psi_n=\psi_n'=0, \Omega_n=0(n \neq 2), \\ \beta=1 \text{ で } \Omega_2=1, \psi_0=1, \psi_n=0(n \neq 0), \\ \psi_n'=0, \Omega_n=0(n \neq 2) \end{cases}$$

これより $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n$ 等を求*

第2表 係 数 表

	β^2	β^3	β^4	β^5	β^6	β^7	β^8	β^9	β^{10}	β^{11}
C_0	3	-2								
$\frac{1}{2}C_2$	0.21629	-0.08992	0.83333							
$\frac{1}{2}C_4$	-0.01763	0.04707		-0.23810	0.38549	-0.19841		0.026455	-0.00487	
E_1	0.08574	-0.25714		0.60000	-0.60000	0.17143				
$\frac{1}{2}E_3$	0.033313	-0.10052	0.25238		-0.29624	0.15702	-0.05952	0.023810	-0.006549	0.001154
G_1	0.01428	-0.07762	-0.14423	0.20571		-0.22857	0.17143	-0.03810		
G_2	-0.00235	0.004624		0.05143	-0.14571	0.05878	0.19286	-0.27143	0.13714	-0.02494
	β	β^3	β^5	β^7	β^9	β^{11}	β^{13}	β^{15}	β^{17}	β^{19}
D_1	1	-2	1							
$\frac{1}{2}D_3$		-0.06286	0.040476	-0.33333		0.065238	-0.02381			
$\frac{1}{2}D_5$		0.11296	-0.023535		0.68027	-0.06372	0.44092		-0.04310	0.008077
F_2		-0.05714	0.12657		-0.20000	0.17143	-0.04286			
$\frac{1}{2}F_4$		0.000615	-0.02220	0.50258		-0.04427	0.04354	-0.37755	0.13228	-0.04762

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \sinh \sqrt{R_2} \beta (A \cos \sqrt{R_2} \beta + B \sin \sqrt{R_2} \beta) + \cosh \sqrt{R_2} \beta (C \cos \sqrt{R_2} \beta - A \sin \sqrt{R_2} \beta) - C \\ \Omega_0 &= -(R_1/\sqrt{R_2}) [(C-B) \cos \sqrt{R_2} \beta \sinh \sqrt{R_2} \beta + \cosh \sqrt{R_2} \beta \{2A \cos \sqrt{R_2} \beta \\ &\quad + (B+C) \sin \sqrt{R_2} \beta\} - 2A] \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sinh^2 \sqrt{R_2} + \sin^2 \sqrt{R_2}}{2 (\cosh \sqrt{R_2} - \cos \sqrt{R_2}) (\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2})}, \\ B &= \frac{\sinh \sqrt{R_2} + \sin \sqrt{R_2}}{2 (\cosh \sqrt{R_2} - \cos \sqrt{R_2})}, \quad C = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ψ_0, Ω_0 を R_2 のべき級数に展開すればその係数は $C_0, C_2, C_4, D_1, D_3, D_5$ と一致する。速度、圧力は前と同様にして求めることができる。たとえば圧力は

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{2} P_2 \alpha^2 - P_0 \log \alpha + \frac{1}{2} P_{-2} \alpha^{-2} \\ &\quad + \frac{1}{4} P_{-4} \alpha^{-4} + \dots + \text{定数} \end{aligned}$$

となる。ここで P_2, P_0, P_{-2} 等は R_1, R_2 のかん数で

$$P_2 = -k$$

$$P_0 = -12 \frac{1}{R_1} - 0.48571 k R_1 + 0.00028242 k^2 R_1^3$$

$$+ \dots = -4 \frac{R_2}{R_1} \frac{3}{2} A$$

$$P_{-2} = -1.54285 - 0.060309 R_2^2 + \dots$$

$$P_{-4} = -0.45716 + 0.028943 R_1 + \dots$$

$P_0 R_1$ の値を級数の第3項までとつて計算したものゝ厳密解との比較を第11図に示す。 R_2 が小さい所では十分一致を示している。

第 11 図 **

* めればその係数値は第2表のようになる。ただし $B_n=0 (n \neq 0), B_0=1, A_n=0$ すなわち $\psi_2=0, \Omega_2=1$ である。したがって(4)(5)式は次のようになる。

$$\begin{cases} 2k\Omega_0' = \psi_0^{IV}/R_1 \\ 2k(\Omega_0\Omega_0' + \Omega_{-2}') + 2\psi_0'\psi_0'' = \psi_{-2}^{IV}/R_1 \\ 2k(\Omega_{-2}\Omega_0' + \Omega_0\Omega_{-2}' + \Omega_{-4}') + 2(2\psi_0'\psi_{-2}'' \\ + \psi_{-2}'\psi_0'' - \psi_{-2}\psi_0''') = (\psi_{-4}^{IV} + 16\psi_{-2}^{IV})/R_1 \\ \begin{cases} -2\psi_0' = \Omega_0''/R_1 \\ -2\psi_{-2}' = \Omega_{-2}''/R_1 \end{cases} \end{cases}$$

上式は連立線型微分方程式で、境界条件

$$\begin{cases} \beta=0 \text{ で } \Omega_0=0, \psi_0=0, \psi_0'=0; \Omega_{-2}=0, \\ \psi_{-2}=0, \psi_{-2}'=0, \dots \\ \beta=1 \text{ で } \Omega_0=0, \psi_0=1, \psi_0'=0; \Omega_{-2}=0, \\ \psi_{-2}=0, \psi_{-2}'=0, \dots \end{cases}$$

を用いて解を求めることができる。たとえば ψ_0, Ω_0 は簡単に次式のようになる。

**また $R_2=0$ とおけば両面固定の場合と一致する。

8. 実験値との比較

著者の知る限りでは平行平面間の軸対称流の実験としては、鈴木教授の論文⁽⁶⁾があるのみである。実験は $h=1, 0.5, 0.3 \text{ mm}$ で回転数を 0, 800, 1600, 2000 rpm に変えて行われている。 $h=0.3 \text{ mm}$ で 0 rpm の実験値と本論文による計算値とを第12図に示す。

第 12 図

すなわち、すきま小さく、流量が少ない場合は入口附近を除きよく一致する。回転のある場合はこの実験では R_2 が大のため比較できなかった。

終りに本研究に終始御指導賜わった宮津純先生に厚く御礼申し上げます。

注:—

- (1) 昭和 24 年 10 月 16 日 関西支部講演会において講演、原稿受付 昭和 26 年 11 月 9 日。
- (2) 正員、山梨大学工学部。
- (3) Schultz-Grunow, Z. a. M. M., Heft 4 (1935).
- (4) たとえば S. Goldstein:—Modern development in fluid dynamics.
- (5) S. Suzuki:—On the leakage of water through clearance space, 東大工学部紀要, 第 18 冊, 第 2 号。

532.532

平端せきに関する Boussinesq 理論の一考察⁽¹⁾

杉原 哲 二⁽²⁾ 住田 旭⁽³⁾

A Consideration on the Boussinesq's Theory of the Suppressed Weir

by Tetuji SUGIHARA and Akira SUMIDA

Boussinesq's theory on the suppressed weir is derived from the assumption of the velocity distribution at the vena contracta i. e. $rv = \text{const.}$ however, in this paper the velocity distribution is assumed $r^m v = \text{const.}$ And better results about the coefficient of discharge and the dimensions of vena contracta are obtained.

1. 緒 論

せきを越える流れを理論的に取り扱うことはむずかしいが、古くは Francis の業績が讃えられる。その他平端せきに関する理論的なものとしては Boussinesq の理論⁽⁴⁾, Bernoulli の定理を用いる Bazin の方法⁽⁵⁾, Prášil-Kulka の図式計算法⁽⁶⁾, Lauck の不連続流の理論⁽⁷⁾等がある。中でも Boussinesq の理論は流量係数が簡単に求められるので一般に邦書はもちろん海外の名著書に収録されている。この Boussinesq の理論は縮脈の流速分布を自由旋回運動と見なして流量係数および縮脈の形状寸法を求めている。先に筆者は縮脈の流速分布は必ずしも自由旋回運動 $rv = \text{const.}$ とおく必要はなく、一般に $r^m v = \text{const.}$ とおけば更に実測値に近づくことを確かめた⁽⁸⁾。これより Boussinesq が行つたと同様に流量が最大になる条件を導入して計算を行つた。なお得られた流量係数および縮脈の形状寸法は Francis, Bazin, Rehbock, Lauck その他のものと比較対照し、もつて Boussinesq の理論を再検討した。

2. 本 論

Boussinesq はせきを越える流れの取り扱いに縮脈における流速分布に着目している。第 1 図において横軸に流速 v , 縦軸にせき山からとつた水の高さをとつてやれば鎖線は Boussinesq の理論曲線で点線は自由落下の速度に等しい放物線流速分布、○印は Bazin の実測値を示す。ただし長さは せき上の水頭で割り、

第 1 図

第 2 図

速さは $\sqrt{2gH}$ で割つて無次元メーションにしてある。以下も同じことである。Bazin の実測値および Boussinesq の理論値を比較

すれば前者は明らかに x 軸にそうて立っている。ゆえに仮りに $r^m v = \text{const.}$ ($m < 1$) とおけるものとする。第 2 図で縮脈の垂直断面 A-B における流速分布を

$$r^m v = \text{const.} \dots\dots\dots (1)$$

とおく。また縮脈の上面および下面の近寄速度は近似的に無視できるものとして Bernoulli の定理から

$$v_A = \sqrt{1-a}, \quad v_B = \sqrt{1-a-d} \dots\dots\dots (2)$$

を得る。(1)(2) より

$$(r_a + d)^m v_B = r_a^m v_A = (r_a + x - a)^m v \dots\dots\dots (3)$$

$$v = \sqrt{1-a} \frac{r_a^m}{(r_a + x - a)^m}$$

流量 Q は せき幅 b ($B = bH$) に対し上式より

$$Q = b \int_a^{a+d} v dx$$