したがって本報を前報の場合に移すために省略した $(2\omega_1 - \omega_2)t$ の正弦および余弦の係数による項の影響はきわめて微小なものであり、実際上の取り扱いにおいては考慮する必要のないことがわかる。

第 8 図は位相差曲線の一例を、実験番号 5 の場合について示したものである。

4. 結 言

以上の理論的ならびに実験的検討によつて、非線型対称型復原力を有する振動系に $p \sin \omega_1 t + q \sin(\omega_2 t + \varphi)$ なる非調和強制力が作用する場合、 ω_1 と ω_2 とが 1:3 または 3:1 の比をなす場合において考慮する必要を生じた $\sin(\omega_1 - 2\omega_2)t$, $\cos(\omega_1 - 2\omega_2)t$ および $\sin(2\omega_1 - \omega_2)t$, $\cos(2\omega_1 - \omega_2)t$ の係数による項が振動状態に及ぼす影響はきわめて微小であり、したがって実際上の取り扱いにおいてはこれらを省略した前報の理論をそのまま適用してさしつかえないこと

が明らかである。

ゆえに振動系に作用する非調和強制力を二つの調和力の和に分析したとき、 ω_1 と ω_2 とがいかなる比をなす場合においてもその振動状態は次のようである。すなわち各調和力による共振領域では他の調和力による影響は全く影をひそめ、実際上は各調和力による共振状態と全く一致する。しかして各調和力による非共振部、すなわち振幅のきわめて小さいところにおいては、線型の場合に成立した重畳の原理を適用することができる。

注:—

- (1) 昭和 26 年 10 月 13 日 第 4 回関西工学連合講演会において講演、原稿受付 昭和 27 年 1 月 23 日。
- (2) 正員、京都大学。
- (3) 准員、京都学芸大学。
- (4) 西原・桃木、機械学会論文集、17 巻 57 号、37 ページ (昭 26-4)。

621.8.034:534.014.2

が た の あ る 駆 動 系 の 振 動

(第 1 報 減衰なし 1 自由度系の定常強制振動)⁽¹⁾

津 田 公 一⁽²⁾

On the Vibration of a Power-transmission System having Angular Clearances, (1) — steady forced undamped vibration of a system of single degree of freedom

by Kōichi TSUDA

Angular clearances in a transmission system excited by a fluctuating torque cause noise at several speed ranges. This has been, in these years, a rather difficult problem for the automobile makers to confront. Although the system has symmetrically combined linear elasticities, and is excited by a periodic torque, the mean torque of the transmission power puts the characteristic asymmetry. The author solved rigorously the steady forced vibration of an undamped idealized system of single degree of freedom, and calculated numerically, declaring the substance of the problem.

1. ま え が き

自動車の推進軸系が、ある車速で出す、いわゆるがら音は軸系の回転方向の がた によるものらしい。この問題については各社で検討し⁽³⁾⁽⁴⁾、その対策としてがた を無くすか、熱エネルギー形ダンパ⁽⁴⁾あるいは動ダンパ⁽⁵⁾を入れる努力があり、着々成果を上げているらしい。私は、この系を少し理想化して簡単な系に置きかえ、現象を解析したので、その結果を報告する。

推進軸系は第 1 図に示すように発動機に始まり、ミッショ、プロペラ軸、デフを経て車輪に至り、更に

第 1 図

車体慣性も質量として働くのだが、これを一つのねじり振動系と考え、その端に発動機のトルク変動が加わるとすればよい。もし途中に がた があれば系のばね特性は非線形詳しくいえば対称折線形であり、しかも

大事なことは、トルク変動が系に対称でなくて、その平均トルク分だけ動作基点がずれ、動作基点については非対称形になるのである(第2図)。Buchhold⁽⁶⁾、

二見⁽⁷⁾等が、すでにがた系の振動を厳密に解いているが、このような非対称の場合は扱っていないので、まず1自由度系に余弦トルクが静止トルクを伴って加わるとし、減衰力は全く働かないとして定常の状態を考

第 2 図

えることにした。なお実際には普通の減衰力が働くほか、がたのところでは衝突が起り、無視できないのだが、ここでは全く理想的に略して考える。

がたがある場合の発動機系の振動については、古くは Reissner⁽⁸⁾ 近くは Tuplin⁽⁹⁾、山室⁽¹⁰⁾、丸山⁽¹¹⁾の報告があり、また歯車のために起る強制振動について小野⁽¹²⁾、中田⁽¹³⁾の解析があるが、軸の共振回転数近くでがた部分が離れることを知るばかりで、離れて後のことは少しもわからない。この報告は、これらについて、正しい見方を与えるのであるが、いまだ十分でなく、続いて研究する予定である。

2. 片ばね系の振動

第2図のばねで

第3図のように一つの質量をつり、平均力と、そのまわりの周期力と一緒に加える場合、周期力が小さいときには $\alpha\beta$ の範囲

第 3 図

で普通の線形振動をする。しかし共振点近くでは必ず $\alpha\beta$ の範囲を越えるし、共振でなくても初期条件として大きな振幅を適当な位相で与えれば振幅が $\alpha\beta$ と

$\beta\gamma$ にまたがることもあり、さらに $\gamma\delta$ にまで及ぶことがある。後者は対称がた系の振動に似ているが、前者は異なつた性質をもち、これが駆動されるがた系振動の特質であると思う。私は前者を片ばね系の振動、後者を両ばね系の振動と呼ぶことにしている。

変位 x 、質量 m 、ばねのこわさ k 、平均トルク F_0 、周期トルク $F \cos \omega t$ 、がた 2ε と与え、原点を 2ε の中央に選ぶことにする。まず $\alpha\beta$ の範囲だけで振動する場合には、添字 1 を付けて

$$m \ddot{x}_1 + k(x_1 - \varepsilon) = F_0 + F \cos \omega t$$

これは普通の線形振動である。ここで二見⁽⁷⁾のまねをして

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad \omega/\omega_0 = \Omega, \quad \tau = \omega_0 t, \quad k\varepsilon/F_0 = \gamma,$$

$$F/F_0 = f, \quad kx/F_0 = \xi, \quad d^2\xi/d\tau^2 = \ddot{\xi}$$

と置きかえれば

$$\ddot{\xi}_1 + \xi_1 = f \cos \Omega \tau + 1 + \gamma$$

$f = \pm 0.2$ の場合の、この解が第4図の ab , gh である。

次に $\alpha\beta$ と $\beta\gamma$ にまたがる振動(片ばね系の振動)では、 $\alpha\beta$ 範囲に添字 1, $\beta\gamma$ 範囲に 0 を付けると

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \xi_1 = f \cos \Omega \tau + 1 + \gamma & (\xi_1 > \gamma) \\ \ddot{\xi}_0 = f \cos \Omega \tau + 1 & (\xi_0 < \gamma) \end{cases}$$

一般解は

$$\begin{cases} \xi_1 - \gamma = 1 + f \cos \Omega \tau / (1 - \Omega^2) + S \cos \tau + T \sin \tau \\ \xi_0 = -f \cos \Omega \tau / \Omega^2 + \tau^2/2 + U \tau + V \end{cases}$$

$\alpha\beta$ と $\beta\gamma$ のさかい β を通る時刻を τ_1 , τ_4 とおけば、ここで両範囲の変位と速度が連続でなければならない。いまは強制周期力と同じ周期の振動を考えることにすれば、

$$\begin{cases} \xi_1(\tau_1) = \gamma, & (\xi_0)_{\tau_1} = \gamma, & \dot{\xi}_1(\tau_1) = \dot{\xi}_0(\tau_1) \\ \xi_1(\tau_4 - 2\pi/\Omega) = \gamma, & (\xi_0)_{\tau_4} = \gamma, & \dot{\xi}_1(\tau_4 - 2\pi/\Omega) = \dot{\xi}_0(\tau_4) \end{cases}$$

あるいは

$$S \cos \tau_1 + T \sin \tau_1 = -\{1 + f \cos \Omega \tau_1 / (1 - \Omega^2)\} \quad (1)$$

$$S \cos(\tau_4 - 2\pi/\Omega) + T \sin(\tau_4 - 2\pi/\Omega) = -\{1 + f \cos \Omega \tau_4 / (1 - \Omega^2)\} \quad (2)$$

$$\gamma - V = U \tau_1 + \tau_1^2/2 - f \cos \Omega \tau_1 / \Omega^2 \quad (3)$$

$$\gamma - V = U \tau_4 + \tau_4^2/2 - f \cos \Omega \tau_4 / \Omega^2 \quad (4)$$

$$-S \sin \tau_1 + T \cos \tau_1 - f \Omega \sin \Omega \tau_1 / (1 - \Omega^2) = U + \tau_1 + f \Omega \sin \Omega \tau_1 / \Omega \quad (5)$$

$$-S \sin(\tau_4 - 2\pi/\Omega) + T \cos(\tau_4 - 2\pi/\Omega) - f \Omega \sin \Omega \tau_4 / (1 - \Omega^2) = U + \tau_4 + f \Omega \sin \Omega \tau_4 / \Omega \quad (6)$$

3. 対称性と解

(1)(2) から S と T を τ_1 , τ_4 のかん数の形で求めて(5)(6)に入れ、右辺と右辺、左辺と左辺を加え

$$\sin \frac{\Omega(\tau_1 + \tau_4)}{2} \left[\frac{\sin \frac{\Omega(\tau_1 - \tau_4)}{2}}{1 - \Omega^2} + \tan \left(\frac{\tau_4 - \tau_1}{2} - \frac{\pi}{\Omega} \right) \left\{ \frac{\cos \frac{\Omega(\tau_1 - \tau_4)}{2}}{\Omega(1 - \Omega^2)} - \frac{2}{\Omega^2} \frac{\sin \frac{\Omega(\tau_1 - \tau_4)}{2}}{\tau_1 - \tau_4} \right\} \right] = 0 \quad (7)$$

また(1)(2) から求めた S と T を(5)(6)に入れ、 U を消すと次の関係が出る。

合せて(5)+(6)を求める。次に(3)(4)から V を消して U を τ_1 , τ_4 のかん数として求め、(5)+(6)に入れ、少し計算すると次の関係が出る。

$$\tan\left(\frac{\tau_4 - \tau_1}{2} - \frac{\pi}{\Omega}\right) = \frac{(\tau_1 - \tau_4) + \frac{2f}{\Omega(1-\Omega^2)} \cos \frac{\Omega(\tau_1 + \tau_4)}{2} \sin \frac{\Omega(\tau_1 - \tau_4)}{2}}{-2 - 2 \frac{f}{1-\Omega^2} \cos \frac{\Omega(\tau_1 + \tau_4)}{2} \cos \frac{\Omega(\tau_1 - \tau_4)}{2}} \quad \dots\dots\dots(8)$$

(7) の大かつこの中が0になるかどうかを調べると、 $(\tau_4 - \tau_1)/2 < \pi/\Omega$ の範囲においては Ω と $(\tau_4 - \tau_1)$ の組合が0を満たすこともあり、満たさないこともある。0 を満たす場合に(8)を調べると、 f がきわめて大きな値を取らなければならない。したがって後で求める数値例のように小さい f に対しては(7)の大かつこの中は0でない。そこで

$$\sin \frac{1}{2} \Omega(\tau_1 + \tau_4) = 0$$

が成立つといつてよい。この解は

$$\frac{1}{2} \Omega(\tau_1 + \tau_4) = n\pi \quad (n: \text{正整数}) *$$

$$0 = \int_{\tau_4 - 2\pi/\Omega}^{\tau_1} \{-S \sin \tau + T \cos \tau - f \Omega \sin \Omega \tau / (1 - \Omega^2)\} f \cos \Omega \tau d\tau \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_4} (U + \tau + f \sin \Omega \tau / \Omega) \cdot f \cdot \cos \Omega \tau d\tau \quad \dots\dots\dots(9)$$

S, T, U の値を(1)(2)(3)(4)から求めて(9)に入れ、かなり計算をすれば

$$\sin \frac{1}{2} \Omega(\tau_1 + \tau_4) = 0$$

が出てくる。このような対称性の証明は Buchhold⁽⁶⁾ も、Hartog⁽⁶⁾ も、二見⁽⁷⁾ も、また Rausher⁽¹⁴⁾ も試みていない⁽¹⁵⁾。

対称性がわかつたので、もはや τ_4 を使う必要はなく、 $\tau_4 = 2\pi/\Omega - \tau_1$ を入れて τ_1 だけの形にすればよい。そうすると(8)が形を変えて

$$\frac{\pi}{\Omega} = \tau_1 - \tan \tau_1 \left(1 + \frac{f}{1 - \Omega^2} \cos \Omega \tau_1\right) \\ + \frac{f}{\Omega(1 - \Omega^2)} \sin \Omega \tau_1 \quad \dots\dots\dots(10)$$

となる。あるいは、はじめから

$$\tau = 0, \xi_1 = 0; \tau = \tau_1, \xi_1 = \eta, \xi_0 = \eta, \dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_0; \\ \tau = \pi/\Omega, \dot{\xi}_0 = 0$$

第 4 図

*しかも τ_1 も τ_4 も $2\pi/\Omega$ より小さい正の角を考えることができるから、 $n=1$ だと考えてよい。したがって

$$\tau_1 + \tau_4 = 2\pi/\Omega$$

これは時間原点に対し τ_1 と τ_4 が対称であることを示し、この関係を(2)に入れば $T=0$ が出るし、(3)(4)に入れて V を消せば $U = -\pi/\Omega$ が出る。前のはばねの中の動きが時間原点に対して対称、後ののはばねの外の動きが半周期 π/Ω に対して対称であることを示す。

なお、この対称性は振動1サイクル当りの減衰仕事を0に等しく置いて求めてもよい。すなわち

として τ_1 を解いても同じことである。しかし(10)は解析的には解けないので、 $f = \pm 0.2$ の場合だけ τ_1 にいろいろの値を与えて数値計算とグラフで解いた。 $f = +0.2$ は同相、 $f = -0.2$ は逆相の動きを与え、最大振幅を $\tau = 0$ において B 、 $\tau = \pi/\Omega$ において D と書くことにすれば

$$B = \eta + 1 + \frac{f}{1 - \Omega^2} - \frac{1}{\cos \tau_1} \left(1 + \frac{f}{1 - \Omega^2} \cos \Omega \tau_1\right) \\ D = \eta - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\Omega} - \tau_1\right)^2 + \frac{f}{\Omega^2} (1 + \cos \Omega \tau_1) \quad \dots\dots\dots(11)$$

これが第4図の bd, ge である。図に無縁根的な解と書いたのは、

上の接続条件を満たすけれども $0 < \tau < \tau_1$ の間に、すでに $\beta\gamma$ の範囲に飛び出すもので、すなわち真の解ではない。第5図には片ばね系で $f = \pm 0.2$ のときの $\Omega \tau_1$ を、第6図には $\Omega = 0.4, 0.6, 0.8$ の場合の変位波形を示した。

第 5 図

4. 安定判別

第4図の ab , bd , ge の三つは, おおよそ 0.9 より小さい Ω に対して三つの解を与えるが, このうち bd は不安定である. すなわち (10)(11) で求めるつり合状態の近くにおいて, $\alpha\beta$ 上の最大振幅 B_0 , その位相 τ_0 に小さな乱れを与えて見る. これが時間とともに大きくなれば不安定であるし, 大きくならないのが安定である. ただし今は減衰なしと考えているから, 安定の場合でも乱れが減ることはない. まず位相 τ_0 は 0 のまま振幅 B_0 を定常振幅 B より ΔB だけ大きく与え, 1 サイクル後の振幅と位相 $\bar{B}_0$, $\bar{\tau}_0$ の乱れ $\Delta \bar{B}_0$, $\Delta \bar{\tau}_0$ を求めることにする.

ばね から がた に移る時刻 τ_1 と B_0 の関係を ばね の中で求めて微分し, これにつり合状態の値を入れると

第 6 図 a

第 6 図 b

第 6 図 c

$$\left(\frac{dB_0}{d\tau_1} \right)_{(B_0=B, \tau_0=0)} = \frac{1}{\cos \tau_1} \left\{ \frac{f\Omega}{1-\Omega^2} \sin \Omega \tau_1 - \tan \tau_1 \left(1 + \frac{f}{1-\Omega^2} \cos \Omega \tau_1 \right) \right\}$$

がた から ばね に移る時刻 τ_4 と τ_1 の関係を がた の中で求めて微分し, つり合の値を入れると

$$\left(\frac{d\tau_4}{d\tau_1} \right)_{(B,0)} = \frac{\left\{ 1 + 2 \tan \tau_1 \left(\tau_1 - \frac{\pi}{\Omega} \right) \right\} \left\{ \frac{f\Omega}{1-\Omega^2} \sin \Omega \tau_1 - \tan \tau_1 \left(1 + \frac{f}{1-\Omega^2} \cos \Omega \tau_1 \right) \right\}}{\tau_1 - \frac{\pi}{\Omega} + \frac{f}{\Omega} \sin \Omega \tau_1}$$

再び ばね にかえつたので, $\tau_4 - 2\pi/\Omega$ における ξ_1 を τ_4 における ξ_0 に接続して任意定数二つを定める.

次に振幅最大の位相 τ_0 において速度 0 の式を作り, 微分してつり合の値を入れると

$$\left(\frac{d\tau_0}{d\tau_4} \right)_{(B,0)} = \frac{\left(\tau_1 - \frac{\pi}{\Omega} + \frac{f}{\Omega} \sin \Omega \tau_1 \right) (-\sin \tau_1) \cdot 2 \cdot \left\{ 1 + \tan \tau_1 \left(\tau_1 - \frac{\pi}{\Omega} \right) \right\}}{\left\{ 1 + 2 \left(\tau_1 - \frac{\pi}{\Omega} \right) \tan \tau_1 \right\} (B - \eta - 1 - f)}$$

τ_0 における振幅 B_0 を, τ_0 と前の任意定数二つを使つて書き, 微分してつり合の値を入れると

$$\left(\frac{dB_0}{d\tau_0}\right)_{(B,0)} = (B-\eta-1-f) \frac{\left(\tau_1 - \frac{\pi}{\Omega}\right) \sin 2\tau_1 + \cos 2\tau_1}{(-\sin 2\tau_1) \left\{1 + \tan \tau_1 \left(\tau_1 - \frac{\pi}{\Omega}\right)\right\}}$$

したがつて, これらを掛け合せ, 形式的に偏微分記号を使えば

$$\left(\frac{\partial B_0}{\partial B_0}\right)_{(B,0)} = \left(\tau_1 - \frac{\pi}{\Omega}\right) \sin 2\tau_1 + \cos 2\tau_1 \dots\dots\dots(12)$$

$$\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial B_0}\right)_{(B,0)} = (-\sin 2\tau_1) \frac{\left(\tau_1 - \frac{\pi}{\Omega}\right) \tan \tau_1 + 1}{B-\eta-1-f} \dots\dots\dots(13)$$

次には振幅は定常振幅 B のまま, 位相 τ_0 が 0 から $4\tau_0$ だけ乱れる場合を求めると, 全く同じようにして

$$\left(\frac{\partial B_0}{\partial \tau_0}\right)_{(B,0)} = \sin 2\tau_1 \left\{1 - \left(\tau_1 - \frac{\pi}{\Omega}\right) \cot \tau_1\right\} (B-\eta-1-f) \dots\dots\dots(14)$$

$$\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \tau_0}\right)_{(B,0)} = \left(\tau_1 - \frac{\pi}{\Omega}\right) \sin 2\tau_1 + \cos 2\tau_1 = \left(\frac{\partial B_0}{\partial B_0}\right)_{(B,0)} \dots\dots\dots(15)$$

はじめに位相は 0 のまま振幅を B から ΔB 増したとすれば, 1 サイクルすませた後には近似的に

$$(\Delta B_0)_1 = \Delta B \cdot (\partial B_0 / \partial B_0)_{(B,0)}$$

$$(\Delta \tau_0)_1 = \Delta B \cdot (\partial \tau_0 / \partial B_0)_{(B,0)}$$

$i+1$ 番目では

$$(\Delta B_0)_{i+1} = (\Delta B_0)_i (\partial B_0 / \partial B_0)_{(B,0)} + (\Delta \tau_0)_i (\partial B_0 / \partial \tau_0)_{(B,0)}$$

$$(\Delta \tau_0)_{i+1} = (\Delta B_0)_i (\partial \tau_0 / \partial B_0)_{(B,0)} + (\Delta \tau_0)_i (\partial \tau_0 / \partial \tau_0)_{(B,0)}$$

(10), (11) で求めた値を入れてみると, $f=0.2$ では ΔB_0 , $\Delta \tau_0$ がサイクル数とともに同じ符号で大きくなるが, $f=-0.2$ では正負に符号を変えて ge の近くに止まる。

非線形振動解の安定判別については, 古く Appleton⁽¹⁶⁾の計算があるが, 厳密解について厳密に求めた例は無いと思う。

5. 両ばね系の振動

第 2 図の $\gamma\delta$ まで振動する場合 (両ばね系の振動) には

$$\ddot{\xi}_1 + \xi_1 = f \cos \Omega \tau + 1 + \eta \quad (\xi_1 > \eta) \dots\dots\dots(16)$$

$$\ddot{\xi}_0 = f \cos \Omega \tau + 1 \quad (\eta > \xi_0 > -\eta) \dots\dots\dots(17)$$

$$\ddot{\xi}_{-1} + \xi_{-1} = f \cos \Omega \tau + 1 - \eta \quad (-\eta > \xi_{-1}) \dots\dots\dots(18)$$

$$\ddot{\xi}_{-0} = f \cos \Omega \tau + 1 \quad (\eta > \xi_{-0} > -\eta) \dots\dots\dots(19)$$

これらの一般解は任意定数を二つずつ, 合せて八つ含む。 $\alpha\beta$ から $\beta\gamma$ に移る時刻を τ_1 , $\beta\gamma$ から $\gamma\delta$ に移る時刻を τ_2 , $\delta\gamma$ から $\gamma\beta$ に移る時刻を τ_3 , $\gamma\beta$ から $\beta\alpha$ に移る時刻を τ_4 と定めれば, これらも未知であるから合せて 12 未知数がある。これに対し接続条件は各時刻ごとに三つずつ, 合せて 12 あるから, ちょうど解ける。しかしこれでは手に負えないので, 始めから対称性を仮定して解いた。証明をしていないのだが, 減衰なしのときには対称性はおそらく成立つものと思う。すなわち $\tau_1 + \tau_4 = 2\pi/\Omega$, $\tau_2 + \tau_3 = 2\pi/\Omega$ を入れて形を変えると, 二つの条件(20)から τ_1 と τ_2

を求める問題になる。あるいは始めから

$$\tau=0, \dot{\xi}_1=0; \tau=\tau_1, \dot{\xi}_1=\eta, \xi_0=\eta, \dot{\xi}_1=\dot{\xi}_0;$$

$$\tau=\tau_2, \dot{\xi}_{-1}=-\eta, \xi_0=-\eta, \dot{\xi}_{-1}=\dot{\xi}_0; \tau=\pi/\Omega,$$

$$\dot{\xi}_{-1}=0$$

と置いて (16), (17), (18) を解いても同じことである。

$$\left. \begin{aligned} f(\tau_1) &= f(\tau_2) + g(\tau_2) \\ 2\eta + h(\tau_1) &= h(\tau_2) + \tau_2 \cdot g(\tau_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

ただし

$$f(\tau) = \tau - \tan \tau \left\{1 + \frac{f \cos \Omega \tau}{1 - \Omega^2}\right\} + \frac{f \sin \Omega \tau}{\Omega(1 - \Omega^2)}$$

$$g(\tau) = \left(1 + \frac{f \cos \Omega \tau}{1 - \Omega^2}\right) \sec^2 \tau \left/ \left(\cot \frac{\pi}{\Omega} + \tan \tau\right)\right.$$

$$h(\tau) = f \frac{\cos \Omega \tau}{\Omega^2} - \frac{\tau^2}{2} + \tau \cdot f(\tau)$$

$\alpha\beta$ 範囲の最大振幅 B , $\gamma\delta$ 範囲の最大振幅 C は

第 7 図

$$\left. \begin{aligned} B &= \gamma + 1 + \frac{f}{1-\Omega^2} - \sec \tau_1 \left(1 + \frac{f}{1-\Omega^2} \cos \Omega \tau_1 \right) \\ C &= -\gamma + 1 - \frac{f}{1-\Omega^2} \\ &\quad - \left(1 + \frac{f}{1-\Omega^2} \cos \Omega \tau_2 \right) / \cos \left(\frac{\pi}{\Omega} - \tau_2 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$f = \pm 0.2$, $\gamma = 0.5$ について (20) を解いたが, 第 7 図のやり方であつて, きわめて厄介である. その結果を (21) に入れたのが第 4 図の ci , fj である. 安定性の計算もしていないが, 模型実験によつて $f = +0.2$ が安定, $f = -0.2$ が不安定であることを確かめた. 以上から, よくわかるように両ばね系の振動は対称がた系の振動に似ている.

6. 各状態の移り変り

第 4 図のうち実線で示したのが安定な振幅曲線であつて実際に起り得る. いま f が一定のまま Ω の値が

変るとすれば, $\Omega = 1$ の近くで振幅および位相がこれらの曲線の間を飛び移る現象が起る. f に比べて γ が小さくて f 点の Ω が b 点の Ω より大きいときには必ず

第 8 図 a

ず両ばね系の振動を経るが (第 8 図 a), f に比べて γ が大きいときには必ずしも両ばね系の振動は起らない (第 8 図 b) の

第 8 図 b

であつて, 特別に初期状態を作つてやれば始めて現われる.

もし減衰があれば振幅は有限の値に止まるわけで, i 点の Ω と振幅および e 点の振幅は減衰の大きいほど小さくなり, e 点の Ω は大きくなる. 特別に減衰または g が大きくなるときには e 点の振幅が g より

り小さくなつて両ばねの振動は起らない. さらに実際の発動機系では Ω とともに f も γ も変ると考えるべきだろう.

7. 2 質量 1 ばね系

第 9 図の系において M と m が 2ϵ によつて離れているときに添字 0, ついてるときに 1 と書くことにすれば片ばね系振動の場合運動方程式は次のようになる.

第 9 図

$$M\ddot{X}_1 + k(X_1 - x_1 - \epsilon) = F \cos \omega t + F_0 \quad (0 < t < t_1)$$

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - X_1 + \epsilon) = -F_0 \quad (0 < t < t_1)$$

$$M\ddot{X}_0 = F \cos \omega t + F_0 \quad (t_1 < t < \pi/\Omega)$$

$$m\ddot{x}_0 = -F_0 \quad (t_1 < t < \pi/\Omega)$$

それぞれ $\frac{1}{M}$ および $\frac{1}{m}$ を掛けて引き算をすれば

$$\begin{aligned} (\ddot{X}_1 - \ddot{x}_1) + k \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) (X_1 - x_1 - \epsilon) \\ = \frac{F}{M} \cos \omega t + F_0 \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \quad (0 < t < t_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\ddot{X}_0 - \ddot{x}_0) = \frac{F}{M} \cos \omega t + F_0 \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \\ \left(t_1 < t < \frac{\pi}{\omega} \right) \end{aligned}$$

これは 1 質量 1 ばね系の方程式と同じ形であり, したがつて相対運動は前の結果で定まる. しかし絶対運動はていねいに解かなければいけない. 一般解を求めてから接続条件

$$t=0, \dot{X}_1 - x_1 = 0; t=t_1, X_1 - x_1 = \epsilon, X_1 = X_0,$$

$$x_1 = x_0, \dot{X}_1 = \dot{X}_0, \dot{x}_1 = \dot{x}_0; t=\pi/\omega, \dot{X}_0 - \dot{x}_0 = 0$$

を入れ, 置きかえ

$$k \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) = \omega_0^2, \quad \frac{F}{F_0} \cdot \frac{m/M}{1+m/M} = f,$$

$$\omega/\omega_0 = \Omega, \quad \tau = \omega_0 t$$

をして, A を始めの位相, B を平均角速度と定めれば

$0 < \tau < \tau_1$ の間は

$$\left\{ \begin{aligned} \{x_1 - (A+B\tau)\} \frac{m\omega_0^2}{F_0} &= \frac{1+f \frac{\cos \Omega \tau_1}{1-\Omega^2}}{\cos \tau_1} \cos \tau - \frac{f \cos \Omega \tau}{\Omega^2(1-\Omega^2)} \\ \{X_1 - \epsilon - (A+B\tau)\} \frac{m\omega_0^2}{F_0} &= 1 + \frac{m}{M} - \frac{m}{M} \left(1 + f \frac{\cos \Omega \tau_1}{1-\Omega^2} \right) \frac{\cos \tau}{\cos \tau_1} \\ &\quad - \left(1 + \frac{m}{M} \right) \frac{f}{\Omega^2} \left(1 - \frac{1}{1-\Omega^2} \frac{m/M}{1+m/M} \right) \cos \Omega \tau \end{aligned} \right.$$

$\tau_1 < \tau < \pi/\Omega$ の間は

$$\begin{cases} \{x_0 - (A+Bt)\} \frac{m\omega_0^2}{F_0} = 1 - \frac{f}{\Omega^2} \cos \Omega\tau_1 + (\tau_1 - \tau) \left(\frac{\tau_1 + \tau}{2} - \frac{\pi}{\Omega} \right) \\ \{X_0 - \varepsilon - (A+Bt)\} \frac{m\omega_0^2}{F_0} = 1 + \frac{m}{M} \frac{f}{\Omega^2} \cos \Omega\tau_1 - \left(1 + \frac{m}{M} \right) \frac{f}{\Omega^2} \cos \Omega\tau \\ \quad - \frac{m}{M} (\tau_1 - \tau) \left(\frac{\tau_1 + \tau}{2} - \frac{\pi}{\Omega} \right) \end{cases}$$

見ると x_1 , x_0 の値は m/M と関係ないことがわかる。ここで $f = \pm 0.2$, $f = 0$ を与え, $\Omega = 0.8, 0.6, 0.4$; $m/M = 1, 0.5$ の場合に, これらの右辺を計算してみた。 $\Omega = 0.4$, $f = \pm 0.2$ を第 10 図に示す。 M または m に, わねり振動計を付けて実験すれば, このような波形を示すはずである。両ばね系の場合にも式は求めたが省く。

8. むすび

できるだけ簡単な系について解析をし, 動力伝達系にがたがある場合を本質的に調べた。ここでは外力による強制振動だけを考えたが, 歯車伝動軸の歯形にもとづく強制振動であつても似た考え方をすることがで

きる。しかし, これは後に報告する。なお変動トルクがひずんでいる場合について厳密に解くことを少し試みたが, 西原, 榎木等の実験結果⁽¹⁷⁾ を知つたので止めた。

また模型を作つて実験を行い, 定性的に上の結果が正しいことを知つたが, これについては第 2 報の一部に述べる。第 2 報では速度比例形減衰力が働く場合の振幅について主に述べる。

おわりに, この計算の動機を作つて下さつた八田桂三先生と芹沢良夫氏, また計算を手伝つて下さつた桜井孝俊氏に厚く御礼申し上げ, また文部省科学研究費および試験研究費のお世話になつたことを書き加えます。

注:—

- (1) 昭和 26 年 2 月 24 日 第 515 回講演会において講演, 原稿受付 昭和 26 年 11 月 24 日。
- (2) 正員, 東京大学工学部。
- (3) 芹沢良夫, 自動車技術会報 3, No. 384 (昭 24)。
- (4) 大友基蔵外 2 名, 第 513 回講演会 (昭 25)。
- (5) 芹沢良夫, 第 521 回講演会 (昭 26)。
- (6) Buchhold, Darmstadt 大学における学位論文, (J.P. Den Hartog & Heiles, A.S.M.E., 58 A 127 (1936) に引用)。
- (7) 二見格男, 振動 (航空学術研究報告集) 75 (昭 21)。
- (8) H. Reissner, Z.A.M.M. 4-1-53 (1924)。
- (9) W.A. Tuplin, Engineer 160-4154-199, (1935)。
- (10) 山室宗忠, 航空誌, 4 巻 32 号, 1235 ページ (昭 12), 7 巻 57 号, 42 ページ (昭 15)。
- (11) 丸山浩一, 機械学会誌, 54 巻 386 号, 84 ページ (昭 26)。
- (12) 小野遼正, 機械学会誌, 35 巻 182 号, 624 ページ (昭 7)。
- (13) 中田孝, 機械学会誌, 40 巻 248 号, 736 ページ (昭 12)。

第 10 図 a

第 10 図 b

第 10 図 c

- (14) M. Rausher, A.S.M.E., 60, A 169 (1938)。
- (15) 対称性について討論して下さいと芹沢良夫氏と 八田桂三先生に御礼申し上げます。
- (16) E.V. Appleton, Phil. Mag 47-609 (1924)。
- (17) 西原, 榎木, 中村, 西田, 機械学会論文集, 17 巻 57 号, 37 ページ (昭 26)。