結果は第7図に示す。

$r=R_i$ で $\partial p/\partial r=0$ (すなわち $V_r=0$), $r=R_0$ で $p=0$ として解けば

$$\frac{p}{V \frac{3\mu R_0^2}{\delta^3}} = -1 + \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 - 2\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2 \log\left(\frac{r}{R_0}\right)$$

この結果の例を第8図に示す。これらの例により環の形によって、内部圧力がどのように変化するかがわかる。いうまでもなく、板を引き離す場合については、これらの曲線は内部で低下する圧力を示す。

結 論

粘性流体の流れを対象として：

(1) 長方形板を横断面の一樣な流路に側方からおしこむ場合の、圧力分布および流速分布を定める基本式をもとめ、歯車ポンプの閉じ込み部分の流れを論ずる出発点とした。このような状態の圧力分布については、一般に次のようにいえる。

(2) 板を押し込む場合には内圧は外圧より高く、板を引き出す場合には、内圧は外圧より低い。いずれの場合にも、流路に沿う圧力変化は放物線的である。

(3) 任意の外形をもつ二つの平面板または曲板を平行に、あるいはわずかに傾けておしつける場合、その間の流体層に生ずる圧力および流速を定める基本式をもとめた。これは軸受内の油の流れを論ずる基本式とわずかなだけ相違している。

上記(3)の適用例として、軸対称の場合数種の例を計算して示した。それによると

(4) 円板を押しつける場合に、内圧は外圧より高く、円板を引き離す場合に、内圧は外圧より低くなる。

(5) 外圧と内圧との差は、粘性係数と単位時間の体積変化(板面積とその速度の積)とに比例し、流体層の厚さの3乗に反比例する。

本文は文部省科学研究費による研究の一部を報告したもので、計算と図の作製は小西雅和、柴田佳子両氏の助力による。

注：—

(1) 昭和25年4月8日第27期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和27年8月4日。

(2) 正員、東京大学生産技術研究所。

(3) 機械学会論文誌、13巻43号(昭22-1)、102ページ、(4)式。

532.516 : 621.664.01

流体抽出の流体力学とその応用 (第2報)⁽¹⁾

——歯車ポンプの閉じ込み流れと逃げみぞの効果——

宮 津 純⁽²⁾ 村 田 暹⁽³⁾

Hydrodynamics of a Viscous Fluid Pressed-out (or Drawn-in)
by Bounding Wall

(The 2nd Report, Trapping Flow in Gear Pump and the Effect
of Relief Groove on the Delivery)

by Atsushi MIYADZU

As a development of the equation obtained in the 1st Report, the pressed-out (or drawn-in) flow through a channel of rectangular cross-section (Fig. 1) has been studied to see the effect of trapping flow in a gear pump on the pump power and discharge.

(1) Work done for trapping flow is composed of two parts, one being that to overcome friction, which is rather small, in order of 1/20 of the total friction loss of power, and the other that to overcome the pressure at the opening.

(2) The dividing wall, in the relief groove, between the delivery and suction sides has the optimum thickness for the increase of discharge, depending upon the resistance of the groove. Fig. 8. shows the volumetric efficiency, which is defined as $\eta_v = \Delta V/V$, where ΔV = volume of fluid delivered to the pressure side and V = volume of fluid pressed out by the trapping action.

1. 緒 言

歯車ポンプの歯のかみ合い部分で、流体が歯間に閉じ込められ、閉じ込み容積が変化すると、中の流体は端面のすきまを通して無理に押し出されるか、吸い込まれ、それにつれて内部の圧力は変動する。外部との流通に無理があるほど著しく変動する。この作用は歯車ポンプに往復ポンプが干渉するようなものであり、ポンプの振動、脈動の原因となるばかりでなく、吐出し量、効率にも悪影響がある。

これを緩和する方法として、閉じ込み部分と外部との流通を、逃げみぞによって容易にすることは既に実用されているが、その効果を検討するに足る解析法は示されていない。本論文は、粘性流体を対象として、閉じ込みによる動力損失、および逃げみぞの効果に対する解析法を示したものである。実例として、実験中の歯車ポンプを取り、その閉じ込みによる動力損失と閉じ込み内部の圧力変動とがどの程度のものであるかを算定し、また逃げみぞの有無、および逃げみぞ抵抗の有無によって、ポンプ吐出し量にどのような変化があるかを明らかにした。

2. 基礎事項

この問題は第1報中⁽⁴⁾の「I. 一方へ押し出す問題」そのもので、閉じ込み内部の流れの基本式は次のようである。

$$\nu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{1}{z} \frac{\partial p}{\partial z} = \text{一定} (\equiv c) \quad (1)$$

ν は流体の動粘性係数、 ρ は密度、 p は圧力をあらわす。車軸に平行に z 軸をとる、それと直角な平面内に x, y 軸をとっている(第1図)。

W は z 方向の流速 w と $W=w/z$ の関係にあり、 z には無関係である。すなわち、 $z=0$ は $w=0$ の位置(流れの分岐する断面)にとっている。今の場合閉じ込みの中央断面に相当している。したがって $2L$ を歯幅(軸に平行)とすれば、 $z=\pm L$ が圧力 p_0 なる開口部分をあらわす。

まずこの問題に対し、第1報で既に得た結論を挙げると、次のようである。

(1) 閉じ込み内部の圧力 p は $p=p_1+p_0$ で表わされる。 p_1 は外圧に対する内部の圧力上昇または下降で場所によって異なる。

(2) p_1 は流路に沿って放物線的に変化し、中央断面において最大または最小となる。歯がくい込む場合に最大であり、抜ける場合に最小である。

(3) 上記は流路断面が一様である限り、断面形には無関係である。

3. 流速および圧力

計算を簡単に行うため、閉じ込み断面の形を長方形とし(第1図)、その周壁で $w=0$ (すなわち $W=0$) を条件として(1)を解く。その解⁽⁵⁾は

$$W = -\frac{1}{2} \frac{c}{\nu} x(a-x) + 4 \frac{c}{\nu} \frac{a^2}{\pi^3} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^3} \sin \left(\frac{2s+1}{a} \pi x \right) \frac{\cosh \frac{2s+1}{a} \pi \left(\frac{b}{2} - y \right)}{\cosh \frac{2s+1}{2a} \pi b} \quad (2)$$

断面積に関する W の平均値 $\bar{W}$ は

$$\bar{W} = -\frac{1}{12} K_1 \frac{c}{\nu} a^2 \quad (3)$$

ただし

$$K_1 = 1 - 192 \frac{a}{b \pi^5} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^5} \tanh \frac{2s+1}{2a} \pi b \quad (4)$$

第2図 (4)式および(17)式の計算値

この K_1 の計算値を第2図に示す。

また可動壁の速度(x 方向)を u_0 (第1図)とすれば、単位時間に押し込む体積は $-2bL u_0$ で、これが分れて、片方へは半分 $-bL u_0$ が押し出される。端面 $z=L$ における平均流速は $\bar{w} = \bar{W}L$ 、流量は $\bar{w}ab = \bar{W}Lab$ である。これは $-bL u_0$ に等しいから

$$\bar{W} = -\frac{u_0}{a} \quad (5)$$

したがって(3)と(5)より $c = \frac{12\nu u_0}{K_1 a^3}$

を得る。一方閉じ込んだ流路の断面積を A 、歯車の回転角を θ 、毎秒角速度を ω とすれば

$$b u_0 = \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \omega, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad t = \text{時間}$$

$$\text{よって } c = \frac{12\nu u_0}{K_1 a^3} = \frac{12\nu}{K_1 a^3 b} \frac{dA}{d\theta} \omega \quad (6)$$

となる。第2図より $K_1 > 0$ 、 c の符号は u_0 または $dA/d\theta$ の符号と合致する。(1)の圧力を積分し、 $z=L$ で $p=p_0$ とした結果は

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p-p_0}{\rho} = \frac{1}{2}c(z^2-L^2) = -\frac{1}{2}c(L^2-z^2) \quad \dots\dots\dots(7)$$

となる。閉じ込みの前半では、 $dA/d\theta < 0$ したがって $c < 0$, $p_1 > 0$ となる。閉じ込みの後半では $p_1 < 0$ となる。その最大 (または最小) 値 $p_{1\max}$ は常に $z=0$ で生じ

$$p_{1\max} = -\frac{1}{2}\rho c L^2 = -\frac{6\mu}{K_1 a^3 b} \frac{dA}{d\theta} L^2 \omega \quad \dots\dots\dots(8)$$

である。 μ は粘性係数 ($=\rho\nu$) をあらわす。すなわち圧力上昇または下降の最大値は $\mu L^2 \omega$ に比例し、比例係数は断面の形と断面積の変り方によって定まる。

4. 閉じ込み部分に要する摩擦動力

内部圧力に対して可動壁を押し込み、または引き出すには仕事を要する。内部圧力は $p_1 + p_0$ であるが、まず p_1 の方のみ考える。可動壁に作用する全圧力 (p_1 によるもの) を P_1 とすれば

$$P_1 = b \int_{-L}^L p_1 dz = b \int_{-L}^L \frac{1}{2} \rho c (z^2 - L^2) dz = -\frac{8\mu L^3 \omega}{K_1 a^3} \frac{dA}{d\theta} \quad \dots\dots\dots(9)$$

閉じ込みの中央を $\theta=0$ とし、閉じ込み範囲を $\theta = -\theta_1 \sim +\theta_1$ とする。その間に生ずる仕事 E_1 は

$$E_1 = \int P_1 u_0 dt = \int P_1 \frac{da}{dt} dt = \int P_1 da = -\frac{8\mu L^3}{b} \omega \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \frac{1}{K_1 a^3} \left(\frac{dA}{d\theta} \right)^2 d\theta \quad \dots\dots\dots(10)$$

となる。ただし $da = (dA/d\theta) (d\theta/b)$ 。

歯車の歯数を n 、歯に背隙はないとすれば、1回転中に生ずる閉じ込み数は $2n$ 、この1回転に要する時間は $2\pi/\omega$ である。したがって単位時間に生ずる閉じ込み数は $n\omega/\pi$ である。よって閉じ込み部の粘性のために要する、単位時間の平均仕事は*

$$W_1 = \frac{c_1}{\nu} \left[-\frac{1}{2}x(a-x) + 4 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^2}{\pi^3} \frac{1}{(2s+1)^3} \sin \frac{2s+1}{a} \pi x \frac{\cosh \frac{2s+1}{a} \pi \left(\frac{b}{2} - y \right)}{\cosh \frac{2s+1}{2a} \pi b} \right] \\ + \frac{c_0}{\nu^2} \left[\frac{1}{24} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \sum_{s=0}^{\infty} \left(-\frac{4a^2}{(2s+1)^5 \pi^5} - \frac{a^3b}{\pi^4 (2s+1)^4} \tanh \frac{2s+1}{2a} \pi b \right) \right. \\ \left. \times \left(\sin \frac{2s+1}{a} \pi x \right) \frac{\cosh \frac{2s+1}{a} \pi \left(\frac{b}{2} - y \right)}{\cosh \frac{2s+1}{2a} \pi b} \right. \\ \left. + \frac{a^3}{\pi^4} (b-2y) \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2s+1)^4} \sin \frac{2s+1}{a} \pi x \right) \frac{\sinh \frac{2s+1}{a} \pi \left(\frac{b}{2} - y \right)}{\cosh \frac{2s+1}{2a} \pi b} \right] \quad \dots\dots\dots(15)$$

閉じ込み断面積に関する W_1 の平均値を $\bar{W}_1$ とすれば、連続の関係より $\bar{W}_1 = 0$ でなければならない。なぜならば、連続の条件は既に W_0 のみで満されているからである。よって次の関係を得る。

$$c_1 = \frac{1}{10} \frac{a^2}{\nu} \frac{K_2}{K_1} c_0$$

$$* E = \frac{n}{\pi} \omega E_1 = -\frac{8\mu n L^3 \omega^2}{b \pi} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \frac{1}{K_1 a^3} \left(\frac{dA}{d\theta} \right)^2 d\theta \quad \dots\dots\dots(11)$$

となる。すなわち平均所要動力は $\mu \omega^2$ に比例する。このことは、歯車の端面、歯先および軸受等に要する動力と同性質である。

5. 加速度に対する補正

回転角 θ に対する閉じ込み断面積 A の変化はインボリュート歯型では放物線的である。角速度 ω を一定とすれば、 θ は時間に比例するから、 A は時間に対して放物線的に、 $dA/d\theta$ は時間に比例して変る。したがって u_0 も W も時間に対して直線的に変る。いま加速度に時間的变化のみを与え、(1) の代りに次式⁽⁶⁾を用いる

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -c + \nu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots(12)$$

' を微分記号として $u_0 = f(t)$

$$W = W_0 f(t) + W_1 f'(t) + W_2 f''(t) + \dots\dots$$

$$c = c_0 f(t) + c_1 f'(t) + c_2 f''(t) + \dots\dots\dots$$

とおけば、インボリュート歯型の場合には $f(t)$ の形から $f''(t)$ 以下は 0 となり、右辺は第2項までとればよい。これを (12) の両辺に代入して $f(t)$, $f'(t)$ の係数をそれぞれ比較することにより、次の関係式をうる。

$$\nu \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right) = c_0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\nu \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} \right) = c_1 + W_0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

(13) は (1) と同一であり、 W_1 , c_1 が加速度による補正項をつくる。(14) の W_0 に (2) の W を入れた上、四辺で $W_1 = 0$ を条件として解けば次式を得る。

c の第1項は $c_0 f(t)$ すなわち $c_0 u_0$ であり、これは (6) 式で与えられる。よって $c_0 = 12\nu/K_1 a^3$ 、したがって

$$c_1 = \frac{1}{10} \frac{a^2}{\nu} \frac{K_2}{K_1} \frac{12\nu}{K_1 a^3} = \frac{12}{10} \frac{K_2}{K_1^2} \frac{1}{a} \quad \dots\dots\dots(16)$$

となる。ただし

$$K_2 = 1 - 480 \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{6a}{b(2s+1)^7 \pi^7} + \frac{1}{(2s+1)^6 \pi^6} \tanh \frac{2s+1}{2a} \pi b \right) \times \tanh \frac{2s+1}{2a} \pi b + 480 \frac{1}{\pi^6} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^6} \dots (17)$$

K_2 は b/a によって決まり, K_1 , K_2/K_1^2 と共に第 2 図に示されている. すなわち加速度を考慮するには, (6)式で計算した c に

$$c_1 f'(t) = \frac{12}{10} \frac{K_2}{K_1^2 a} \frac{du_0}{dt} = \frac{12}{10} \frac{K_2 \omega^2}{K_1^2 ab} \frac{d^2 A}{d\theta^2}$$

を加えればよい. この補正項は常に正である. よって (8)からわかるように, 補正によって圧力はより減少する. またこの c の補正は ω^2 に比例するので, 回転数の大きいとき大きくなる. ただし A は θ に対称に変化 (インポリュート型では $d^2 A/d\theta^2$ は一定) するので, この補正は平均所要動力には無関係となる.

6. 実例計算

実験⁽⁷⁾に使用した歯車ポンプに対し, 閉じ込み部分の圧力変化と所要動力を計算してみる. 歯車の寸法は次の通りである. 歯数 $n=18$, 圧力角 $\theta=25^\circ$, モジュール $M=3$, 歯車の幅 $2L=44.92$ mm, 頂隙 $a_0=0.86$ mm, 背隙はないとする. この数値からベース円半径 R_B は 24.47 mm となる. さらに幾何学的計算から, 閉じ込み断面積 A は回転角 θ に対し $A = R_B^2 \frac{\pi}{n} \theta^2$ となり, 閉じ始めおよび終りの回転角度 θ は ± 0.1493 rad となる. また長方形に近似した場合の閉じ込み断面の幅 b としては歯底円とピッチ円の間にあるベース円にそったものを取り $b=2.81$ mm とする.

これらの値を用い (6), (7), (8) 式から閉じ込み内部の最大圧力上昇 $p_1 \max$ を計算した例を第 3 図に示す. ただしこの計算では, かみ合い初期の流体の

第 3 図 実例の歯車ポンプに対する最大圧力上昇の計算値

急激な加速による圧力上昇, かみ合い後期の低圧による空気遊離等は考えていない.

(11) の図式積分によって, 所要動力を計算すれば $0.0177 \times 10^{-6} \text{ } \gamma \nu \text{ N}^2 \text{ HP}$ となる. ただし γ , ν の単位はそれぞれ g/cm^3 , cm^2/s で, N は毎分回転数である.

また端面, 歯先, 軸受, かみ合い部分を含めた所要動力の実験結果は $0.365 \times 10^{-6} \text{ } \gamma \nu \text{ N}^2 \text{ HP}$ である. 上の計算値はこれの $1/20$ の程度である.

7. 逃げみぞのない端面の影響

第 4 図(a)は閉じ込みの全期間を吸込み側に開く逃げみぞを示す. このみぞが理想的に働くと, p_0 は常に

吸込みの圧力になると考えられるから, 閉じ込み部分は仕事をする必要はない. しかし

初めに閉じ込んだ流体は吐出し側から吸込み側へもどされてむだになる. 第 4 図(b)は閉じ込みの前半を吐出し側に後半を吸込み側に通じる逃げみぞを示す. これでは閉じ込みの前半には吐出し圧力, 後半には吸込み圧力が開口に作用し, しかも前半ではこの p_0 に対して液を押し出すので仕事をし, 後半では圧力 p_s の液を押し込まれるので仕事をされる. その差は, 閉じ込みのために特にした仕事となる.

しかし吐出し側から吸込み側へ持ち込む量は (a) の場合に比べて減少し, ポンプの吐出し量は増加する. 流体摩擦を考えないと, この吐出し量の増加に相当する水馬力が閉じ込み部分のした仕事になる.

しかし実際の流体には摩擦が作用するので事情が変わる. 閉じ込み部から押し出される流体は, 続いて端面に沿って流れる. この流れを二次元の層流とみなし, 次のように考える.

第 5 図 逃げみぞのない端面流路の模型図

第 5 図で, 閉じ込み部の流体が, 位置 x で流出 (または流入) し, 隔壁は存在しない. A と B とを閉じ始めと閉じ終りの位置とすれば, x は A から B へと動く. 抵抗となる流路の長さを $2l$, 端面すきまを δ , その奥行 (紙面に直角) を δ' とする. 閉じ込み部からの流量を (δ' の単位幅について) Q_1' , A の側

の流量を (δ' の単位幅について) Q_1' , B の側のそれを Q_2 とすれば, 二次元層流の圧力と流量との関係をそれぞれの区間に適用して次式をうる.

$$\left. \begin{aligned} p_0 - p_s &= 12\mu \frac{(l-x)}{\delta^3} \left(Q_2 - \frac{1}{2} U \delta \right) \\ p_s - p_0 &= 12\mu \frac{(l+x)}{\delta^3} \left(Q_1 - \frac{1}{2} U \delta \right) \\ Q_2 &= Q_1 + Q' \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

ただし U は歯車端面の速度で, これは高圧側から低圧側へ向かっている.

$2L$ を歯幅 (軸に平行) としているが, 一つの端面にはこの半分に相当するものが押し出され

$$Q' = -\frac{L}{\delta'} \frac{dA}{dt}$$

である. 閉じ込み面積 A は, 歯車の回転角 θ に対して $A = A_0 + A_1 \theta^2$ の関係で変化する. 閉じ込み面積 (の中心) も歯車と同速度で回転すると考えれば, この θ は閉じ込み面積 (の中心) の座標 (閉じ込み中央位置からの) を示すとみられる. よって歯車軸の中心から閉じ込み面積 (の中心) までの距離を R とすると, $x = R\theta$ は閉じ込み面積 (の中心) の位置となる. ゆえに

$$\begin{aligned} Q' &= -\frac{L(dA/dt)}{\delta'} = -\frac{L\omega}{\delta'} \frac{dA}{d\theta} = -\frac{2L\omega A_1}{\delta'} \theta \\ &= -\frac{2L\omega A_1 x}{\delta' R} \equiv -qx \dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$q = (2L\omega A_1)/(\delta'R) \dots\dots (20)$$

さて閉じ込み部のする仕事は次のものからなる.

(1) 閉じ込み内部の摩擦に抵抗して, 流体を出し入れするに要する仕事, これは前項において考えたもので, 圧力 p_1 に対してした仕事がそれである.

(2) p_0 に打勝って押し出すに要する仕事, これを E_0 とすると

$$E_0 = -\int p_0 L dA = \delta' \int p_0 Q' dt = -\frac{q\delta'}{R\omega} \int_{-l_1}^{l_1} p_0 x dx \dots\dots (21)$$

しかるに (18), (19) より

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{2} p_s \left(1 + \frac{x}{l} \right) + \frac{1}{2} p_a \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{6\mu ql^2}{\delta^3} \\ &\quad \times \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{ql^2(p_a - p_s)\delta'}{R\omega} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{l_1}{l} \right)^3 + \frac{ql}{2Q - U\delta} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{l_1}{l} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{l_1}{l} \right)^5 \right\} \right] \\ &= \frac{2}{3} (p_a - p_s) \frac{LA_1 l_1^2}{R^2} \left(\frac{l_1}{l} \right) + \frac{48\mu}{\delta^3} \left(\frac{LA_1 l^2}{R^2} \right)^2 \\ &\quad \times \frac{R\omega}{\delta'} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{l_1}{l} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{l_1}{l} \right)^5 \right\} \dots\dots (22) \end{aligned}$$

ただし Q は閉じ込みのない状態の下で, このすきまを吸込み側へ逆流する流量 (単位幅) で, 次式で与え

られる.

$$Q = \frac{(p_a - p_s)\delta^3}{24\mu l} + \frac{1}{2} U \delta \dots\dots (23)$$

閉じ込み期間に吸込み側へ流入する量は

$$\delta' \int Q_2 dt = \frac{\delta'}{R\omega} \int_{-l_1}^{l_1} Q_2 dx$$

しかるに (18) および (23) から

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q - \frac{q}{2l} (l+x)x \\ \delta' \int Q_2 dt &= \frac{\delta'}{R\omega} \int_{-l_1}^{l_1} Q_2 dx = \frac{2\delta' l_1}{R\omega} Q - \frac{1}{3} \frac{q\delta' l_1^3}{R\omega l} \dots\dots (24) \end{aligned}$$

この式の第1項は閉じ込みのない状態の下で, 閉じ込み期間に吸込み側へ逆流する量である. 第2項は, 閉じ込みのための逆流量の減少, いいかえれば, 閉じ込み作用で吐出し側へ送り込んだ量であり, 次のようになる.

$$\frac{q\delta' l_1^3}{3R\omega l} = \frac{LA_1 l_1^2}{R^2} \times \frac{2}{3} \left(\frac{l_1}{l} \right) = LA_1 \theta_1^2 \times \frac{2}{3} \left(\frac{l_1}{l} \right)$$

さて閉じ込み面積は $A = A_0 + A_1 \theta^2$ で, その最大の変化は $A_1 \theta_1^2$, これに相当して押し出した体積は $LA_1 \theta_1^2$ である. このすべてが吐出し側へもどされる状態を基準にとり, それとの比で吐出し側への押し込み効果⁽⁸⁾を表わす. それを容積効率とし, η_v と書けば

$$\eta_v = (2/3)(l_1/l) \dots\dots (25)$$

となる. これは (18) 式について成立するもので, 適用範囲は $l_1 \leq l$ に限られる. したがって $\eta_v \leq 2/3$ である. すなわち容積効率は端面部分の短いほど大きい. この結果は次項に述べる一般の場合の一部分に該当している. なお第4図(a)の場合の効率は0で同図(b)の場合の効率は1である.

(22) 式右辺の第1項は (24) 式の第2項に $(p_a - p_s)$ を乗じたものである. これは逆流量を減らすために閉じ込み部のしたポンプ仕事に相当する. (22) 式の第2項は, このみぞを通して閉じ込み部へ流体を出入させるための損失仕事で, p_a , p_s に無関係である.

8. 逃げみぞの影響

逃げみぞの抵抗が容積効率にどのように影響するかを考える. みぞの形を第6図のようにし, それが隔壁で仕切られている. 隔壁と歯車端面とのつくるすきま

第6図 逃げみぞのある端面流路の模型図
($l_2 > l_1$ の場合)

を δ , 逃げみぞのすきまをその f 倍とし, 他の記号にはこれまでと同じものを用いる. 隔壁の長さ $2l_2$ が閉じ込みの範囲 $2l_1$ より大きい小さいかによって式の扱いがわかる.

【1】 $l_1 \leq l_2$ の場合 (第6図) Q' の位置を x とし, その時の特定断面の圧力を図のように表わせば次の関係が成立する⁽²⁾.

$$\left. \begin{aligned} p_a - p_1 &= 12 \mu \frac{l-l_2}{f^3 \delta^3} \left(Q_1 - \frac{1}{2} U f \delta \right) \\ p_1 - p_0 &= 12 \mu \frac{l_2+x}{\delta} \left(Q_1 - \frac{1}{2} U \delta \right) \\ p_0 - p_2 &= 12 \mu \frac{l_2-x}{\delta} \left(Q_2 - \frac{1}{2} U \delta \right) \\ p_2 - p_s &= 12 \mu \frac{l-l_2}{f^3 \delta^3} \left(Q_2 - \frac{1}{2} U f \delta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

また一般に $Q_1 = Q_2 - Q' = Q_2 + qx$

閉じ込みがない場合に, この逃げみぞを通して吸込み側へ逆流する量を Q とし, その場合のそれぞれの断面の圧力に ' をつけて書けば次式が成立する.

$$\left. \begin{aligned} p_a - p_1' &= 12 \mu \frac{l-l_2}{f^3 \delta^3} \left(Q - \frac{1}{2} U f \delta \right) \\ p_1' - p_2' &= 12 \mu \frac{2l_2}{\delta^3} \left(Q - \frac{1}{2} U \delta \right) \\ p_2' - p_s &= 12 \mu \frac{l-l_2}{f^3 \delta^3} \left(Q - \frac{1}{2} U f \delta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26')$$

(26) より次の関係をうる.

$$\begin{aligned} p_a - p_s &= 24 \mu \left[\frac{m}{\delta^3} Q_2 - \frac{1}{2} \frac{n}{\delta^2} U \right] \\ &+ 12 \mu \frac{q}{\delta^3} (m+x)x \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

(26') より次の関係をうる.

$$p_a - p_s = 24 \mu \left[\frac{m}{\delta^3} Q - \frac{1}{2} \frac{n}{\delta^2} U \right] \dots\dots\dots (27')$$

ただし

$$m = \frac{l+l_2(f^3-1)}{f^3}, \quad n = \frac{l+l_2(f^2-1)}{f^2} \dots\dots\dots (28)$$

(27) と (27') より

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q - \frac{q}{2m} (m+x)x \\ Q &= \frac{(p_a - p_s) \delta^3}{24 \mu m} + \frac{1}{2} U \frac{n}{m} \delta \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

となる. 閉じ込み部分が一行程を終える間に, 吸込み側へ流入する量は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{\delta'}{R\omega} \int_{-l_1}^{l_1} Q_2 dx &= \frac{\delta'}{R\omega} \left(2l_1 Q - \frac{q}{3m} l_1^3 \right) \\ &= \frac{2\delta' l_1}{R\omega} Q - LA_1 \theta_1^2 \times \frac{2}{3} \frac{f^3 l_1}{(f^3-1)l_2+l} \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

$$\text{ただし } \frac{\delta' q}{R\omega} = LA_1 \theta_1^2 \frac{2}{l_1^2} \dots\dots\dots (31)$$

この式の右辺の第1項は閉じ込みがない場合, 逃げみぞからの漏れの全量 (閉じ込み1期間中の) であって, 第2項は漏れの減少量である. よって容積効率

$$\eta_v = \frac{2}{3} \frac{f^3 l_1}{(f^3-1)l_2+l} = \frac{2}{3} \frac{f^3 s}{(f^3-1)e+1}, \quad s \leq e \dots\dots\dots (32)$$

ただし $s = l_1/l$, $e = l_2/l$ となる.

この計算結果は第8図中 $s \leq e$ の範囲の曲線部分を形作っている.

【2】 $l_1 \geq l_2$ の場合 (第7図) 閉じ込みの位置によって, 扱いが三つの段階にわかる.

第7図 逃げみぞのある端面流路の模型図

($l_2 < l_1$ の場合)

(1) $-l_1 \leq x \leq -l_2$, 第7図中 (1) の位置にある状態

$$\left. \begin{aligned} p_a - p_0 &= 12 \mu \frac{l+x}{f^3 \delta^3} \left(Q_1 - \frac{1}{2} U f \delta \right) \\ p_0 - p_1 &= 12 \mu \frac{-x-l_2}{f^3 \delta^3} \left(Q_2 - \frac{1}{2} U f \delta \right) \\ p_1 - p_2 &= 12 \mu \frac{2l_2}{\delta^3} \left(Q_2 - \frac{1}{2} U \delta \right) \\ p_2 - p_s &= 12 \mu \frac{l-l_2}{f^3 \delta^3} \left(Q_2 - \frac{1}{2} U f \delta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

$$Q_1 = Q_2 - Q' = Q_2 + qx$$

閉じ込みがないとする場合の流量を Q とし, その場合, 接合部のそれぞれの圧力に ' をつけて書けば

$$\left. \begin{aligned} p_a - p_1' &= 12 \mu \frac{l-l_2}{f^3 \delta^3} \left(Q - \frac{1}{2} U f \delta \right) \\ p_1' - p_2' &= 12 \mu \frac{2l_2}{\delta^3} \left(Q - \frac{1}{2} U \delta \right) \\ p_2' - p_s &= 12 \mu \frac{l-l_2}{f^3 \delta^3} \left(Q - \frac{1}{2} U f \delta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33')$$

(33) より次の関係をうる.

$$\begin{aligned} p_a - p_s &= 24 \mu \left[\frac{m}{\delta^3} Q_2 - \frac{1}{2} \frac{n}{\delta^2} U \right] \\ &+ 12 \mu \frac{q}{f^3 \delta^3} (l+x)x \end{aligned}$$

(33') より次の関係をうる.

$$\begin{aligned} p_a - p_s &= 24 \mu \left[\frac{m}{\delta^3} Q - \frac{1}{2} \frac{n}{\delta^2} U \right] \\ m &= \frac{l+l_2(f^3-1)}{f^3}, \quad n = \frac{l+l_2(f^2-1)}{f^2} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q - \frac{q}{2f^3 m} (l+x)x \\ \int_{-l_1}^{-l_2} Q_2 dx &= (l_1-l_2)Q \\ &- \frac{q}{2f^3 m} \left\{ \frac{1}{3} (l_1^3-l_2^3) - \frac{1}{2} l (l_1^2-l_2^2) \right\} \end{aligned}$$

Q は (29) 式に与えてある。

(2) $-l_2 \leq x \leq l_2$, 第7図中(2)の位置にある状態

$$\begin{aligned} p_a - p_1 &= 12 \mu \frac{l-l_2}{f^3 \delta^3} \left(Q_1 - \frac{1}{2} U f \delta \right) \\ p_1 - p_0 &= 12 \mu \frac{l_2+x}{\delta^3} \left(Q_1 - \frac{1}{2} U \delta \right) \\ p_0 - p_2 &= 12 \mu \frac{l_2-x}{\delta^3} \left(Q_2 - \frac{1}{2} U \delta \right) \\ p_2 - p_s &= 12 \mu \frac{l-l_2}{f^3 \delta^3} \left(Q_2 - \frac{1}{2} U f \delta \right) \\ Q_1 &= Q_2 + qx \end{aligned}$$

前同様にして

$$Q_2 = Q - \frac{q}{2m}(m+x)x$$

$$\int_{-l_2}^{+l_2} Q_2 dx = 2l_2 Q - \frac{q}{3m} l_2^3$$

(3) $l_2 \leq x \leq l_1$, 第7図中(3)の位置にある状態

$$\begin{aligned} p_a - p_1 &= 12 \mu \frac{l-l_2}{f^3 \delta^3} \left(Q_1 - \frac{1}{2} U f \delta \right) \\ p_1 - p_2 &= 12 \mu \frac{2l_2}{\delta^3} \left(Q_1 - \frac{1}{2} U \delta \right) \\ p_2 - p_0 &= 12 \mu \frac{x-l_2}{f^3 \delta^3} \left(Q_1 - \frac{1}{2} U f \delta \right) \\ p_0 - p_s &= 12 \mu \frac{l-x}{f^3 \delta^3} \left(Q - \frac{1}{2} U f \delta \right) \\ Q_1 &= Q_2 + qx \end{aligned}$$

前と同様にして

$$Q_2 = Q - \frac{qx(x+2mf^3-l)}{2mf^3}$$

$$\begin{aligned} \int_{l_2}^{l_1} Q_2 dx &= (l_1-l_2)Q - \frac{q}{2mf^3} \left\{ \frac{1}{3} (l_1^3-l_2^3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (2mf^3-l)(l_1^2-l_2^2) \right\} \end{aligned}$$

以上を加算して

$$\begin{aligned} \int_{-l_1}^{l_1} Q_2 dx &= 2l_1 Q - \frac{q}{mf^3} \left\{ \frac{1}{3} (l_1^3-l_2^3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (l_1^2-l_2^2)(mf^3-l) + \frac{1}{3} f^3 l_2^3 \right\} \end{aligned}$$

ゆえに閉じ込み期間中に吸込み側に流入した全量は次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta'}{R\omega} \int_{-l_1}^{l_1} Q_2 dx &= \frac{2\delta' l_1}{R\omega} Q - \frac{\delta' q}{R\omega} \\ &\quad \times \frac{l_1^3 + \frac{1}{2}(3l_1^2-l_2^2)l_2(f^3-1)}{3\{(f^3-1)l_2+l\}} = \frac{2\delta' l_1}{R\omega} Q \\ &\quad - LA_1 \theta_1^2 \times \frac{2}{3} \frac{l_1^3 + \frac{1}{2}(3l_1^2-l_2^2)l_2(f^3-1)}{\{(f^3-1)l_2+l\}l_1^2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(34)$$

よって容積効率

$$\eta_v = \frac{2}{3} \frac{l_1^3 + \frac{1}{2}(f^3-1)l_2(3l_1^2-l_2^2)}{l_1^2\{(f^3-1)l_2+l\}}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{s^3 + \frac{1}{2}(f^3-1)e(3s^2-e^2)}{s^2\{(f^3-1)e+1\}}, \quad s \geq e$$

ただし, $s=l_1/l$, $e=l_2/l$(35)

第8図 逃げみぞの形と容積効率との関係

計算の結果は第8図中 $s \geq e$ の範囲の曲線部分を形成している。第8図より、容積効率に対するみぞの影響につき次のように言う。

- (1) みぞの長さは閉じ込み範囲に対して短いほど (s の小さいほど) 効果がある。
- (2) みぞは深いほど (f の大きいほど) 効果がある。すなわちみぞの抵抗の小なるほど効果的である。
- (3) みぞの抵抗が全然なければ ($f=\infty$)、隔壁はうすいほど効果がある。しかし抵抗があれば ($1 \leq f < \infty$)、隔壁の厚さに最良値がある。その最良値は、みぞの長さで変るが、だいたいみぞの長さの 0.1~0.4 倍 ($e=0.1 \sim 0.4$) である。

9. 結 論

第1報につづき、歯車ポンプの閉じ込みに要する仕事、およびポンプ吐出し量に対する逃げみぞの効果を解析したもので、結論を列挙すれば次のようである。

- (1) 閉じ込めが歯車端面に開口する部分の圧力 p_0 は歯車の回転につれて変動する。それには逃げみぞが影響する。
- (2) 閉じ込めの圧力上昇または下降 (p_0 基準) は

$\mu L^2 \omega$ に比例する。比例定数は閉じ込み断面の形と、断面積の変り方に関係して定まる。 μ は粘性係数、 L は歯幅(車軸に平行)の半分、 ω は歯車の角速度である。

(3) 閉じ込めに要する仕事を、内部の摩擦に対抗して流体を出し入れするに要する仕事と、外圧 p_0 に対して要する仕事とに分けると、前者は割に小さい。実例計算では、全摩擦損失動力の実験値のうち、20分の1の程度を占めるに過ぎない。

(4) 逃げみぞがないと、最初閉じ込んだ体積のうち、その (2/3) (l_1/l) がポンプの吐出し側へもどされる。ただし $2l_1$ は閉じ初めと閉じ終りの距離、 $2l$ は端面の抵抗長さをあらわす。

(5) 逃げみぞに抵抗がなければ、吐出し側と吸込み側とを仕切る隔壁はうすいほど効果がある。しかしみぞに抵抗があれば隔壁の厚さに最良値がある。それを計算し第8図に示した。

もっとも上記は隔壁すきまからの漏れを別にした結

論である。この漏れも考慮した容積効率を考えると、隔壁の厚さの最良値は、上に求めたものと変るが、それについては改めて述べる。

本文は文部省科学研究費の補助による研究の一部を報告したものである。

注:—

- (1) 昭和 25 年 4 月 8 日 第 27 期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和 27 年 8 月 4 日。
- (2) 正員、東京大学生産技術研究所。
- (3) 正員、山梨大学工学部。
- (4) 本論文集 20 ページ。
- (5) 機械学会論文集, 13 巻 43 号(昭 22—1) 102 ページ。
- (6) (4) に同じ。
- (7) 機械学会論文集 18 巻 73 号(昭 27)。
- (8) (24) 式右辺の第 1 項は閉じ込みの有無にかかわらず存在する漏れである。
- (9) 扱いを簡単にするため、断面の急変する部分で壓力は共通であるとする。これでは連続の条件を満足させれば、エネルギーは不連続となるが、流速またはその変化が小さいとすれば問題はない。

532.516 : 621.6.01

流体抽出の流体力学とその応用 (第3報)⁽¹⁾

——層内の圧力分布と壁面の圧力分布——

宮 津

純⁽²⁾

Hydrodynamics of a Viscous Fluid Pressed-out (or Drawn-in) by Bounding Wall
(The 3rd Report, Pressure Distributions over the Fluid Layer
and on the Boundary Wall)

by Atsushi MIYADZU

This paper supplements to the 1st Report (1) the discussion of the pressure distribution over the fluid layer, and (2) the illustrative treatments for the layer of non-uniform thickness.

(1) The pressure distribution over the section of layer is parabolic, in assumption that the fluid velocity in the direction normal to the wall is proportional to the distance from the fixed wall.

(2) When the walls are drawn apart, the pressure on them is lower than that in mid-layer, and when pressed close, it is higher.

(3) The assumption of uniform pressure within the layer does not satisfy the continuity for any point, but can do only for any section, that is no other than the basic equation obtained in the 1st report.

(4) The pressure rise or fall on the bounding wall is noticeable when the thickness of the layer is not uniform with narrow opening.

1. 緒 言

第1報⁽³⁾において取り上げた「四方へ押し出す問題」では、流体の層の内部で圧力に不同はないとした。ま

た、連続の条件は層として満足させるに止め、各点については不問に附した。本文では同じ問題を、他の妥当と思われる前提で解き、連続の条件も各点について満足させてみて、この両考を比較することにより、前