切 下 量 の 計 算 に つ い て⁽¹⁾藤 井 康 治⁽²⁾

On Estimation of the Amount Removed by Undercutting

by Yasuharu FUJII

New formulae of good approximation are given for estimating the amount of the effective involute gear profile removed by rack-shaped cutters. Three cases are considered where the cutting profile and the addendum line of the cutter form a sharp corner, where they have chamfering, and where they are tied together by a circle. It is shown that practically the effect of these tips rounding on the amount of undercutting can be neglected and that it is sufficient to take the first case alone into consideration for the designing of cutters.

The maximum radius of rounding circle free of undercutting is estimated accurately.

緒 論

インボリュート歯車を切削するときに、その歯車の相手歯車よりもカッタの方が歯数が多い場合には適当な歯底円の径を与えるために相手歯車のそれよりも丈の高い歯をもつカッタを用いることが必要である。このためにしばしば切下げによって歯形曲線の有効部分が取り去られる場合が生ずるが、歯形曲線の根元の部分はかみ合に参与しないこともあるので切下げそのものは必ずしも避くべき現象ではない。しかし一組の歯車が互に干渉せずに回転してしかも歯に最大の強度をもたせ、かつ歯の真に必要な部分がそこなわれることがないような設計を可能にするためにはカッタ刃先の寸法および形状と切下量との関係その他の問題を実用的な計算に適する見通しのよい形で取り扱っておく必要がある。

著者はさきにラック型カッタおよび小歯車型カッタによる切下げの問題をカッタの刃先が鋭稜をなす場合について取り扱った⁽³⁾。しかしその後堀内義和氏⁽⁴⁾は刃先が丸味をもつ場合および刃先に面取りを施した場合をも取り扱わねば実際に即しないことを指摘してそれぞれの場合に対して方程式をたてていられる。著者は実際の経験から丸味や面取りの切下量に及ぼす影響は微小であるという見通しと、設計者に必要なものは実用的な数値ないし公式であって理論方程式ではないという見解をもってさきに鋭稜に対する近似公式および数表を与えたのであるが著者のこの見通しを確認し、あわせて前論文を補う意味で計算を行ったのがこの論文である。

今はラック型カッタのみを取り扱う。

1. カッタ刃先が鋭稜をなす場合

筆者はさきの論文⁽³⁾においてこの場合を詳細に論じ

その結果として、被切削歯車の歯形インボリュートの基円半径を長さの単位にとり、圧力角を α 、切下限界を越える刃の高さを u 、切下量を y 、かつ

$$\varphi = \sqrt{(1+y)^2 - 1} \dots \dots \dots (1)$$

とおけば

$$u = A(\varphi) \sin \alpha + B(\varphi) \cos \alpha \dots \dots \dots (2)$$

なる関係が成立つことを見出した。ここに $A(\varphi)$ および $B(\varphi)$ は φ のみのかん数、したがって y のみのかん数で、

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= 2.000\,000\,000\,\varphi - 0.900\,000\,000\,\varphi^3 \\ &\quad + 0.520\,714\,326\,\varphi^5 - 0.364\,498\,907\,\varphi^7 \\ &\quad + 0.279\,723\,379\,\varphi^9 - 0.147\,882\,316\,\varphi^{11} + \dots \\ B(\varphi) &= 1.500\,000\,000\,\varphi^2 - 0.675\,000\,000\,\varphi^4 \\ &\quad + 0.433\,928\,652\,\varphi^6 - 0.318\,935\,350\,\varphi^8 \\ &\quad + 0.251\,607\,789\,\varphi^{10} - \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

である。筆者は (2) に対する詳細な数表をも作成したが、また (2) に対応する近似式も既にいろいろの形で与えられている。しかしそれらはいずれも計算の精度あるいは手数の点で必ずしも満足すべきものではなかった。

ここに切下げに関する新たな公式として

$$u = \frac{4}{3} \left\{ \cos \alpha - \cos \left(\alpha + \frac{3}{2} \varphi \right) \right\} \dots \dots \dots (4)$$

を提案する。 α はラジアンで表わされねばならないが現在この種の数表は容易に入手できるので簡単に利用することができる。この公式において省略されている最大の項は $-0.15 \sin \alpha \cdot \varphi^3$ である。

たとえば非常に極端な切下げの場合として $\alpha = 20^\circ$ において $y = 0.03$ なる値を与えると公式は $u = 0.2498$ を与え、真値は $u = 0.2479$ である。 y が小さければ誤差はほぼその 1.5 乗に比例して小さくなり、この公

式は既存のどの近似公式よりも精度がよい。

もう一つの利点は y から u を求める場合ばかりでなく u から逆に y を求める場合にもそのまま使えることである。(4)の証明および誤差の程度の評価は(4)を φ のべき級数に展開して(2)と比較すればよい。

2. カッタ刃先に面取りを施す場合

第1図 ラック型カッタによる切下げ

第1図はラック型カッタの切刃 TSQ が歯形インボリュート曲線 $\widehat{LP}$ を創成し、更に進んで点 P までの切下げを生じ、まさに被切削歯車を離れようとするところを示している。歯形曲線上の一点 P はカッタに固定して考えた平面の上に図の $\widehat{TQR}$ のごとき曲線を描く。これがトロコイドであることはよく知られているが、この曲線は P に対応する接点 T においてカッタの歯形直線 TSQ と接し、更に Q 点において再びこの歯形直線を截る。 Q は歯車上の点 P と重っているカッタ上の点で、 P までの高さの切下げを与えるカッタの稜に相当する。

さてカッタに Q を越えて更に $\widehat{QR}$ なる曲線部分を追加しても切下量 y には関係がない。また $\widehat{QR}$ よりも内側にカッタ刃先の丸味を与えれば y より大きな切下げを起すことはない。それでまず曲線 $\widehat{QR}$ について調べてみる。切下げを生じない限界点に相当する点 S をカッタ上の座標の原点にとり、ラック型カッタのピッチ線と平行に ξ 軸、これと垂直にカッタ刃先の方に η 軸をとる。

Q の座標は $(u \tan \alpha, u)$ である。 α は圧力角である。今 y が与えられているとすると u は前掲公式(1)および(4)から、あるいは前論文の数表から容易に求められる。 $\angle POO'$ を β とすると

$$\angle POO' = \beta = \cos^{-1} \left(\frac{\cos \alpha - u}{1+y} \right) \quad (5)$$

によって β も計算される。

歯車が図の位置から更に θ だけ回転するとカッタは $\theta/\cos \alpha$ だけ $-\xi$ 方向に動くので、 P 点がカッタ上に描く軌跡 $\widehat{QR}$ の方程式は θ をパラメータとして

$$\xi = u \tan \alpha - (1+y) \left\{ \sin(\beta + \theta) - \sin \beta \right\} + \frac{\theta}{\cos \alpha} \quad (6)$$

$$\eta = \cos \alpha - (1+y) \cos(\beta + \theta) \quad (7)$$

または

$$\eta - u = -(1+y) \{ \cos(\beta + \theta) - \cos \beta \} \quad (7')$$

となる。

(7')において $(\eta - u)$ を与えるとパラメータ θ が求められ、これを(6)に入れて ξ を出せば ξ, η の関係が得られる。すなわち

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\cos \alpha - \eta}{1+y} \right) - \beta, \quad \beta = \cos^{-1} \left(\frac{\cos \alpha - u}{1+y} \right)$$

であるから

$$\begin{aligned} \xi = & u \tan \alpha - \sqrt{(1+y)^2 - (\cos \alpha - \eta)^2} \\ & + \sqrt{(1+y)^2 - (\cos \alpha - u)^2} \\ & + \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{\cos \alpha - \eta}{1+y} \right) - \beta \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

によって ξ が任意の y, η に対して計算される。このとき逆余弦かん数がしばしば出てくるが、計算器が利用できる場合ならば表を使うよりも $x = 0.87 \sim 0.97$, ($14.5^\circ \sim 30^\circ$) に対する近似式

$$\cos^{-1} x = \sqrt{2.354285 - 2.710185x + 0.355938x^2} \quad (9)$$

は小数第6位に1以下の誤差をもつだけなので便利に使える。

精度は落ちるが念のため ξ を $(\eta - u)$ のべき級数で表わした近似式をつくると

$$\begin{aligned} \xi = & u \tan \alpha + \left\{ \frac{\eta - u}{(1+y) \sin^2 \beta} \right\} \left\{ \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} - (1+y) \sin \beta \cos \beta \right\} \\ & - \left\{ \frac{\eta - u}{(1+y) \sin^2 \beta} \right\}^2 \left\{ \frac{\cos \beta \sin \beta}{2 \cos \alpha} - \frac{(1+y) \sin \beta}{2} \right\} \\ & + \dots \quad (10) \end{aligned}$$

となる。

この曲線は切刃が外方に凸になるような曲線であるから (ξ, η) なる点と $(u \tan \alpha, u)$ なる点を結ぶ直線を切刃として与えればその切下量は y であり、これよりも内側に切刃の曲線を与えれば切下量は y よりも小さい。

非常に悪い場合について数値例をとろう。 $\alpha = 20^\circ$, $y = 0.02$, $\eta = 0.30$ とすると、この y に対する u は $u = 0.190984$ となり β は 0.746562 となる。相当する θ は $\theta = 0.146346$ で結局

$$\xi = u \tan \alpha + 0.053963$$

がえられる。近似式(10)によると

$$\xi = u \tan \alpha + 0.054004$$

で比較的良好な近似を与える。切刃をこの η まで直線的に延長した点 C の座標は $\eta \tan \alpha$ で、 $\xi - \eta \tan \alpha$ は今の場合 0.014 284 となる。堀内氏が指摘されたように

第2図 面取りをした場合

面取りした部分が二等辺三角形になるようにすると第2図においてこの例の場合に

$$CQ = CD = (\eta - u) / \cos \alpha = 0.116 013$$

となって曲線 $\widehat{QR}$ は D よりもはるかに外方

にある。すなわちこのような悪い条件の場合にすらも図のような面取りをすると切下げは Q によって起り、 D は関与しない。したがって堀内氏の指摘はかえって実際に意味がないことがわかる。

3. カッタ刃先に丸味をつける場合

次にカッタ刃先に丸味をつけたときに切下量がどう変わるかを調べる。カッタの菌形直線上で切下限界をこえる高さが u_0 なる点において半径 R の丸味をつけてピッチ線に平行な刃先直線に結ぶものとする。この場合を考えるために、まず切下量 y を与えられたものとしてこれに対応する鋭稜の場合の u の値を求め、この u に相当する点をとるトロコイド曲線を前節と同様に考えその上のパラメータの値 θ に相当する任意の一点において、この曲線とカッタの菌形直線の両方に接する円を考える。するとこの円の半径が R に、またこの円が刃の直線に接する点が u_0 に相当するわけである。この考え方によって対応する一組の (y, u_0, R) の値を得ることができ、それらは近似公式の精度を調べるのに役立つ。

今、しばらく y を単なる縦座標の意味に用いて

$$y = y(x)$$

なる曲線に (x_0, y_0) なる点において接し、かつ x 軸に接する円の中心の座標を計算しておく。 x_0 における接線の式はこの点における dy/dx を y' と略記して

$$y - y_0 = y'(x - x_0)$$

である。これと x 軸すなわち $y=0$ のなす角の二等分線の方程式は

$$(\sqrt{1+y'^2}-1)y + y'x - (x_0 y' - y_0) = 0$$

である。他方 (x_0, y_0) における曲線の法線の式は

$$y'y + x - (y'y_0 + x_0) = 0.$$

この最後の2個の式を連立して解くと円の中心の座標 (x, y) として

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 - \frac{y_0(1+\sqrt{1+y'^2})}{y'} \\ y &= y_0 + \frac{y_0(1+\sqrt{1+y'^2})}{y'^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

第3図 丸味の影響

を得る。 y はまたこの円の半径に等しく x はこの円が x 軸に接する点の座標に等しい。

本論にもどって前節で用いた (ξ, η) 座標を変換してカッタの菌形直線を X 軸、 S 点をとおり

これに垂直に Y 軸をとる。 y は再び切下量の意味に用いる。

$$\left. \begin{aligned} X &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \\ Y &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

であるからトロコイド曲線の式は θ を媒介に

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{u}{\cos \alpha} - (1+y) \left\{ \cos(\beta - \alpha + \theta) - \cos(\beta - \alpha) \right\} + \theta \tan \alpha \\ Y &= -(1+y) \left\{ \sin(\beta - \alpha + \theta) - \sin(\beta - \alpha) \right\} + \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

となり

$$\left. \begin{aligned} dX/d\theta &= (1+y) \sin(\beta - \alpha + \theta) + \tan \alpha \\ dY/d\theta &= -(1+y) \cos(\beta - \alpha + \theta) + 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

で $Y' = dY/dX = (dY/d\theta) / (dX/d\theta)$ であるから (13), (14) と公式 (11) を用いて θ なるパラメータの値に対応する点でトロコイド曲線に接し、かつ菌形直線に接する円の中心の座標、したがって u_0 および R を求めることができる。

次にこの関係に対する近似式を導こう。準備として第1図にもどって β なる量の幾何学的意味を考えてみる。定義式 (5) によって β は $\angle POO'$ であるから、 $(\beta - \alpha)$ は $\angle POM$ に等しい。したがって $(1+y) \sin(\beta - \alpha)$ および $\{1 - (1+y) \cos(\beta - \alpha)\}$ はそれぞれ $\overline{MP}$ の OM 上およびこれと垂直な方向への正射影に他ならない。他方 $\overline{MP}$ の OO' 上への正射影が u に等しいことを考慮して式 (2) を参照すると

$$\left. \begin{aligned} (1+y) \sin(\beta - \alpha) &= A(\varphi) = 2\varphi - 0.9\varphi^3 + \dots \\ 1 - (1+y) \cos(\beta - \alpha) &= B(\varphi) = 1.5\varphi^2 - 0.675\varphi^4 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

なることが知られる。これを利用して (13), (14) を θ について展開すると

$$X = \frac{u}{\cos \alpha} + (A(\varphi) + \tan \alpha) \theta + (1 - B(\varphi)) \frac{\theta^2}{2} + \dots$$

$$Y = B(\varphi) \theta - A(\varphi) \frac{\theta^2}{2} + (1 - B(\varphi)) \frac{\theta^3}{6} + \dots$$

したがって

$$\frac{dX}{d\theta} = (A(\varphi) + \tan \alpha) + (1 - B(\varphi)) \theta + \dots$$

$$\frac{dY}{d\theta} = B(\varphi) + A(\varphi) \theta + (1 - B(\varphi)) \frac{\theta^2}{2} + \dots$$

となる。すぐ後に知られるように θ は φ^2 以下の程度の量で、このことを考慮に入れて φ の 4 次の程度まで採ると、

$$\left. \begin{aligned} Y &\doteq \frac{3}{2} \varphi^2 \theta + \varphi \theta^2 + \frac{\theta^3}{6} \\ \frac{dX}{d\theta} &\doteq (\tan \alpha + 2\varphi) + \theta, \\ \frac{dY}{d\theta} &\doteq \frac{3}{2} \varphi^2 + 2\varphi \theta + \frac{\theta^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

としてよい。

前の (11) 式を y が小さいとして変形すると

$$\left. \begin{aligned} x &\doteq x_0 - y_0 \left(\frac{2}{y'} + \frac{y'}{2} \right) \\ y &\doteq y_0 \left(\frac{2}{y'^2} + \frac{3}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)'$$

となるので、この y が丸味に相当することを考えて (16) の近似値を用いると (11)' の第 2 式から

$$R \cdot \frac{9}{4} \varphi^4 \left(1 + \frac{8}{3} \frac{\theta}{\varphi} \right) \doteq \left(\frac{3}{2} \varphi^2 \theta + 4 \theta^2 + \dots \right) \times (2 \tan^2 \alpha + 8 \varphi \tan \alpha + \dots)$$

となる。この式をみると第 1 近似で

$$\theta \doteq \frac{3}{4} R \varphi^2 / \tan^2 \alpha \quad (\text{第 1 近似})$$

とおいてよいことがわかり、更にこれを用いて

$$\theta \doteq \frac{3 R \varphi^2}{4 \tan^2 \alpha} \left\{ 1 + \left(\frac{3 R - 8 \tan \alpha}{2 \tan^2 \alpha} \right) \varphi \right\} \quad (\text{第 2 近似})$$

が知られる。

この θ を (16) に入れてえられる Y および $(dY/d\theta) / (dX/d\theta)$ の値をそれぞれ (11)' の y_0, y' として用いると円の中心の X 座標すなわち $(u_0/\cos \alpha)$ に相当するものとして次の式がえられる。

$$\frac{u_0}{\cos \varphi} = \frac{u}{\cos \alpha} - \frac{3 \varphi^2 R}{4 (\tan \alpha + 2\varphi)} \dots\dots\dots (17)$$

この式が刃先における丸味の影響を与える式である。この式の意味は切下限界をこえる高さが u_0 の点から更に R なる半径の丸味をもって高さを延ばしたときの切下量は、あたかも u が

$$3 \cos \alpha \cdot \varphi^2 R / 4 (\tan \alpha + 2\varphi)$$

だけ増したように変化するということである。この補正項は $\varphi^2 R$ の程度の大きさであるから、その中の φ の値は u に対するもの、あるいは u_0 に対するもののいずれを用いてもよく、切下げの表または近似式を用

いて計算される。

なおこの式から知られることは R が小さいときにはこの補正項は非常に小さく、実際問題としてはあまり考慮の必要がないということである。この点からも前述堀内氏の指摘はかえって実際に遠いことかといわれる。

数値例について検討してみよう。 $\alpha = 15^\circ$ とし、切下げの比較的大きい場合として $y = 0.01$ をとってみる。まず (11), (13), (14) によって一組の正確な解を求めてみるとこの y に対する u は 0.101594 となり $\beta = 31^\circ 15' 46.7$ である。いま $\theta = 0.01 = 0^\circ 57' 29.58$ にとってみるとこの θ に相当する点では

$$X = 0.110716, \quad Y = 0.000313$$

$$dX/d\theta = 0.553650, \quad dY/d\theta = 0.032739$$

となる。これらの値を (11) に入れると

$$u_0/\cos \alpha = 0.100025, \quad R = 0.182750$$

が得られる。

この R は実際の例としては過大であるが、そのままで近似式を使ってみる。 $\alpha = 15^\circ, y = 0.01$ にとったから $\varphi = 0.141774, \tan \alpha = 0.267949$ である。

今、上の例を用いて $R = 0.182750$ にとって式 (17) に入れてみると $u = 0.101594$ で

$$u_0/\cos \alpha = 0.10518 - 0.00500 = 0.10018$$

となり上に計算した真値との差は 0.00015 すなわち約 0.15% の誤差しかない。この例では φ も R もかなり大きくとったので補正項が割合に大きくなっているが通常はこれよりもはるかに小さく、またそれに対して補正項の誤差ももっと小さくなるのである。

4. 切下げを起さぬための丸味の限界

第 4 図 切下げを起さぬ丸味半径

の条件を調べてみる。

被切削歯車のインボリュート曲線の根元 S がカッ

ラック型カッタに切下限界まで有効歯形直線を与え、更にそこから丸味をつけ加えることによって刃を長くするとき、切下げを起さないためには、この丸味の半径が許容されるものであるか、その

タの上に描くトロコイドの式は前の (6), (7) 式において $u=0, y=0, \beta=\alpha$ とおいた式で

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\left\{ \sin(\alpha+\theta) - \sin \alpha \right\} + \frac{\theta}{\cos \alpha} \\ \eta &= -\left\{ \cos(\alpha+\theta) - \cos \alpha \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

となる.

切下げを起さぬためには丸味の円はこのトロコイドよりも内側になければならない.

さて歯形直線に S において法線を立て, その上で S から r なる距離にある点 C を中心として半径 r の円を考える. この円の方程式は

$$(\xi - r \cos \alpha)^2 + (\eta + r \sin \alpha)^2 = r^2 \dots\dots\dots (19)$$

である. この円が S 以外ではトロコイドと交わらないということは, (18), (19) を同時に満足するような (ξ, η) が S 点以外にないということで, (18) を (19) に代入してできる方程式が θ について 0 以外の実根をもたなければよい. (18) を (19) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} 2 - 2 \cos \theta + \frac{\theta^2}{\cos^2 \alpha} - 2 \frac{\theta}{\cos \alpha} \left\{ \sin(\alpha+\theta) - \sin \alpha \right\} \\ + 2r(\sin \theta - \theta) = 0 \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

となる. これが $\theta=0$ 以外の実根をもたぬように r をきめる. そのために次のように考える.

$\theta=0$ は除いて, (20) を r と θ の関係を表わす式と見なすと, θ のある値に対して r は極小になるであろう. この極小値を $r_{\min}$ とすると (20) においても r がこの $r_{\min}$ より大きければその r に対する θ の実数値が存在し, また r が $r_{\min}$ より小さければ θ の実根は存在しないはずである. よって (20) をといて r を θ のかん数として表わし, $dr/d\theta=0$ と連立して r を求めるとこれが $r_{\min}$ を与える. 丸味の半径がこれより小さければ切下げを生じないことになる.

この考えで (20) を変形すると

$$r = \frac{2 - 2 \cos \theta + \frac{\theta^2}{\cos^2 \alpha} - 2 \frac{\theta}{\cos \alpha} \left\{ \sin(\alpha+\theta) - \sin \alpha \right\}}{2(\theta - \sin \theta)} \dots\dots\dots (21)$$

これから $dr/d\theta$ を求める. $\theta \neq 0$ として $dr/d\theta=0$ とおくと

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{2\theta}{\cos^2 \alpha} - 2 \cos \theta \cdot \tan \alpha + 2 \tan \alpha - \frac{2\theta}{\cos \alpha} \cos(\alpha+\theta) \right\} \\ \times (\theta - \sin \theta) \\ - \left\{ 2 - 2 \cos \theta + \frac{\theta^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{2\theta}{\cos \alpha} \left\{ \sin(\alpha+\theta) - \sin \alpha \right\} \right\} \\ \times (1 - \cos \theta) = 0 \end{aligned}$$

となり整理すると

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha \{ \theta^2 - 2 \theta \sin \theta + \theta^2 \cos \theta \} + \tan \alpha \\ \times \{ 2 \theta^2 \sin \theta - 2 \sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \theta + 2 \theta \cos \theta \} \end{aligned}$$

$$+ \{ \theta^3 - \theta^2 \cos \theta - 2 + 4 \cos \theta - 2 \cos^2 \theta \} = 0$$

がえられる. この θ に対して r が極小になる.

これを $\tan \alpha$ について解くと結局

$$\tan \alpha = \frac{-\{ \theta^2 \sin \theta - \sin \theta + \sin \theta \cos \theta - \theta + \theta \cos \theta \} \pm (1 - \cos \theta)(\theta - \sin \theta)}{(\theta^2 - 2 \theta \sin \theta + \theta^2 \cos \theta)}$$

となる. 重号のいずれをとるかきめるために分母の符号を調べてみる. $\tan \theta/2 = t$ とおくと

$$\begin{aligned} \text{分母} &= \theta(\theta - 2 \sin \theta + \theta \cos \theta) = \theta \left(\theta - \frac{4t}{1+t^2} + \theta \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \\ &= \frac{4\theta}{1+t^2} \left(\frac{\theta}{2} - \tan \frac{\theta}{2} \right) < 0 \quad (\theta > 0). \end{aligned}$$

よって $\theta > 0$ に対して $\tan \alpha$ が正であるためには下号をとらねばならない. 下号をとって整理すると

$$\tan \alpha = - \frac{\sin \theta (\theta^2 - 2 + 2 \cos \theta)}{\theta(\theta - 2 \sin \theta + \theta \cos \theta)} \dots\dots\dots (22)$$

となる. $\tan \alpha$ を θ のべき級数で表わすために分子分母をそれぞれ θ で展開すると

$$\begin{aligned} \text{分母} &= \theta(\theta - 2 \sin \theta + \theta \cos \theta) \\ &= -\frac{1}{3!} \theta^4 + \frac{3}{5!} \theta^6 - \frac{5}{7!} \theta^8 + \frac{7}{9!} \theta^{10} - \frac{9}{11!} \theta^{12} + \frac{11}{13!} \theta^{14} - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{分子} &= \sin \theta (\theta^2 - 2 + 2 \cos \theta) \\ &= \frac{10}{5!} \theta^5 - \frac{84}{7!} \theta^7 + \frac{438}{9!} \theta^9 - \frac{1936}{11!} \theta^{11} + \frac{8034}{13!} \theta^{13} \\ &\quad - \frac{32556}{15!} \theta^{15} + \dots \end{aligned}$$

となり, したがって分子分母の θ^4 が約されて

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\theta}{2} (1 - 0.05 \theta^2 + 0.001031746 \theta^4 \\ &\quad - 0.000013889 \theta^6 + 0.000000118 \theta^8 \\ &\quad - 0.000000001 \theta^{10} + \dots) \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

がえられる.

他方この $\tan \alpha$ を用いて r の値を計算すると, r と $\tan \alpha$ の関係が θ をパラメータとして表わされることになる. (21) を書き直すと

$$r = \frac{2 - 2 \cos \theta + \theta^2 (1 + \tan^2 \alpha) - 2 \theta \{ \tan \alpha \cos \theta + \sin \theta - \tan \alpha \}}{2(\theta - \sin \theta)}$$

となり, この式中の $\tan \alpha$ を (22) でおきかえると相当に長い式になるが結局整理されて

$$r = \frac{(1 + \cos \theta)(\theta - \sin \theta) \{ \theta^2 - 2 \theta \sin \theta + 2(1 - \cos \theta) \}}{(\theta - 2 \sin \theta + \theta \cos \theta)^2} \dots\dots\dots (24)$$

がえられる. r をも θ のべき級数で表わそう.

$$\begin{aligned} (1 + \cos \theta)(\theta - \sin \theta) \\ &= \frac{\theta^3}{3} \left[1 - \frac{36}{5!} \theta^2 + \frac{174}{7!} \theta^4 - \frac{744}{9!} \theta^6 + \frac{3042}{11!} \theta^8 \right. \\ &\quad \left. - \frac{12252}{13!} \theta^{10} + \frac{49110}{15!} \theta^{12} - \dots \right] \\ (\theta^2 - 2 \theta \sin \theta + 2 - 2 \cos \theta) \\ &= \frac{\theta^4}{4} \left[1 - \frac{40}{6!} \theta^2 + \frac{56}{8!} \theta^4 - \frac{72}{10!} \theta^6 + \frac{88}{12!} \theta^8 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{104}{14!}\theta^{10}+\frac{120}{16!}\theta^{12}-\dots \Big] \\
& (\theta-2\sin\theta+\theta\cos\theta) \\
& =-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{3}{5!}\theta^5-\frac{5}{7!}\theta^7+\frac{7}{9!}\theta^9-\frac{9}{11!}\theta^{11} \\
& \quad +\frac{11}{13!}\theta^{13}-\frac{13}{15!}\theta^{15}+\dots \\
& (\theta-2\sin\theta+\theta\cos\theta)^2 \\
& =\frac{\theta^3}{36}\left[1-\frac{3}{10}\theta^2+\frac{1734}{10\times 7!}\theta^4-\frac{732}{9!}\theta^6\right. \\
& \quad \left.+\frac{20352}{7\times 11!}\theta^8-\frac{112392}{10\times 13!}\theta^{10}+\dots\right]
\end{aligned}$$

であるから、これらを (24) の分母と分子にそれぞれ用いると θ^3 が約せて結局

$$\begin{aligned}
r &= 3\theta(1-0.055555556\theta^2+0.001507937\theta^4 \\
& \quad -0.000023809\theta^6+0.000000250\theta^8 \\
& \quad -0.000000002\theta^{10}+\dots) \dots\dots\dots (25)
\end{aligned}$$

がえられる。

(25) の級数を逆展開して θ を r の級数として表わすと

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{1}{3}\left[r+0.006172840r^3+0.000095695r^5\right. \\
& \quad +0.000003775r^7+0.000000045r^9 \\
& \quad \left.+0.000000001r^{11}+\dots\right] \dots\dots\dots (26)
\end{aligned}$$

となる。これのべきを計算し (23) に代入すると $\tan\alpha$ を r で表わす式として

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= 0.166666667r+0.000102881r^3 \\
& \quad +0.000000925r^5+0.000000021r^7 \\
& \quad +0.000000001r^9+\dots \dots\dots\dots (27)
\end{aligned}$$

がえられる。あるいは更に r を $(6\tan\alpha)$ の級数で表わせば

$$\begin{aligned}
r &= (6\tan\alpha)-0.000617284(6\tan\alpha)^3 \\
& \quad -0.000004409(6\tan\alpha)^5-0.000000101(6\tan\alpha)^7 \\
& \quad -0.000000008(6\tan\alpha)^9-\dots\dots\dots (28)
\end{aligned}$$

となる。式 (28) によって切下げを起さぬ限界の丸味半径が与えられる。 r は $(6\tan\alpha)$ に等しいと見なしてほとんど誤りがない。切下限界点からさきをこの r 以下の半径の丸味で延長して刃の丈を長くしても切下げを起さないのである。

誤解を避けるために一二の注意を述べておけば、上

式はカッタあるいは歯車の歯の片側の歯形曲線のみを問題にしているので、両側を考えれば、丸味によって歯丈を無制限に延長しうるのはではなく、実質部分のもちうる高さには制限があることはもちろんである。また今取り扱った問題はカッタに丸味を与えても切下げを起さないということであって、ラックとピニオンのかみ合いにおいてラックの歯先に丸味を与えて干渉を避けるという問題とはやや異なる点があるということに注意しておく。 $(6\tan\alpha)$ という量は普通の歯車では相当大きい量だから、要するに切下限界点において丸味をつける限りにおいては切下げに対する考慮は通常不要であるということがいわれる。

結 論

ラック型カッタによる切下げの問題を詳細に論じ、カッタ刃先が鋭稜の場合に対して精度がよく計算も容易な新しい近似公式

$$u = \frac{4}{3} \left\{ \cos\alpha - \cos\left(\alpha - \frac{3}{2}\varphi\right) \right\}, \quad \varphi = \sqrt{(1+y)^2 - 1}$$

を提案する。ここに u は切下限界をこえるカッタ刃の高さ、 y は切下量でインボリュート基円半径を単位長さとして表わしてある。またカッタ刃先に面取りを施した場合、丸味を与えた場合を扱い、実用上では面取りや丸味はほとんど考慮を要しないことを示し、かつ丸味の影響に対して精度のよい近似式 (17) を与えた。なお切下限界点において丸味を与えた場合に切下げを生じないための丸味半径の上限を精密に求め、それがほぼ $(6\tan\alpha)$ に等しいことを示した。これから切下限界点からさきを丸味によって切刃を延長する場合には切下げに対する心配は通常不要であることがわかった。

この研究は昭和 24 年度文部省科学研究費によるものである。終りにいろいろ御助言を賜った東北大学成瀬教授に感謝する。

注：—

(1) 昭和 25 年 4 月 8 日 第 27 期定時総会講演会において講演。

原稿受付 昭和 27 年 11 月 1 日。

(2) 正員、東北大学。

(3) 藤井、機械学会論文集、9 卷 35 号、IV-36 ページ (昭 18-5)、同号 IV-50 ページ。

(4) 堀内、機械学会論文集、10 卷 39 号、IV-113 ページ、(昭 19-5)。