任意の非線型復原力特性を有する一要素を含む自由度 2 の振動系の強制振動に対する図式解法⁽¹⁾

榎 木 義 一⁽²⁾ 四十宮 竜 吉⁽³⁾

Graphical Solution of the Forced Vibration of a System of Two Degrees of Freedom containing One Element with Arbitrary Non-linear Restoring Force

by Yoshikazu SAWARAGI and Ryūkichi YOSOMIYA

The study of the forced vibration of non-linear characteristic has so far been restricted to the system of one degree of freedom. It is indeed typical of the non-linear vibration that the computation becomes very complicated as the degrees of freedom is increased.

In the present paper, the graphical method is obtained to find the periodic solution of the forced vibration of a system of two degrees of freedom with a symmetrical or non-symmetrical non-linear restoring force, and the satisfactory coincidence between the results of experiment and the calculation is reported.

1. 緒 言

非線型振動の研究は最近各方面において盛んに行われるようになった。しかしこれらの研究はそのほとんどが自由度 1 なる振動系を対象としている。今後非線型振動論の発展に当っては、多自由度系についての研究が必要であることは言うまでもない。さて自由度 1 の場合における非線型振動の基本的性質は自由度の増加により変化しないことは容易に想像しうが、自由度が増すとともに、その数式的取り扱いがきわめて複雑化して実際に数値を求めることが困難となる。すでに自由度が 2 になっただけでもその取扱いは複雑となり、これに関する論文も筆者等の知る範囲ではほとんど見られないようである。本論文では自由度 2 の振動系として第 1 図に示されるようなものを取り扱った。すなわち二つの質量 m_1, m_2 , 粘性減衰係数 c_1, c_2 , 任意の非線型復原力 $f_1(x_1), f_2(x_r)$ を有する二つのばね, および k_3 なる剛性係数を有する線型ばねからなり, さらに k_3 の下端に $a_0 \sin \omega t$ なる振動変位が外部から与えられるような場合を考える。しかし本文ではこれらの場合の比較的簡単な場合として,

第 1 図

$c_1=0, f_1(x_1)=k_1x_1$ (k_1 は定数) でしかも $f_2(x_r)$ が x_r の任意のかん数である場合を取り扱うことにする。

2. 図式解法の誘導

この場合の運動方程式は

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - f_2(x_r) - c_2\dot{x}_r = 0 \quad (1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_3x_2 + f_2(x_r) + c_2\dot{x}_r = k_3a_0 \sin \omega t \quad (2)$$

となる。ただし上記の微分演算記号は時間 t に関するものであり, x_1, x_2 はそれぞれ質量 m_1, m_2 の平衡位置からの振動変位とし, $x_r = x_2 - x_1$ とする。

まず $f_2(x_r)$ が $x_r=0$ に関して非対称なる場合の一例として

$$f_2(x_r) = k_2x_r + \alpha x_r^2 \quad (3)$$

の場合を考えよう。この場合の運動方程式は

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2x_r - \alpha x_r^2 - c_2\dot{x}_r = 0 \quad (4)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_3x_2 + k_2x_r + \alpha x_r^2 + c_2\dot{x}_r = k_3a_0 \sin \omega t \quad (5)$$

となり, 定常解として近似的に

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{10} + a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t \\ &= b_{10} + x_{1\max} \sin(\omega t - \varphi_1) \\ x_2 &= b_{20} + a_2 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t \\ &= b_{20} + x_{2\max} \sin(\omega t - \varphi_2) \end{aligned} \quad (6)$$

と仮定し, なお

$$x_r = x_2 - x_1 = b_{r0} + a_r \sin \omega t + b_r \cos \omega t \quad (7)$$

とすれば $b_{r0} = b_{20} - b_{10}$, $a_r = a_2 - a_1$, $b_r = b_2 - b_1$ となる。(6)(7)を(4)(5)に代入して係数比較を行うと

$$k_1b_{10} - k_2b_{r0} - \alpha \left(b_{r0}^2 + \frac{x_{r\max}^2}{2} \right) = 0 \quad (8)$$

として b_{10} は求められ, 同様にして

$$\left. \begin{aligned} (a_2 - K)^2 + b_2^2 &= (N+1)^2 \cdot x_{r \max}^2 \\ \tan \varphi &= -\frac{b_2}{a_2 - K} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

が成立し, 既知の $x_{r \max}$ および φ を用いて a_2, b_2 の値を第4図のようにして求めることができる. また(14)式から b_{20} が求められる.

第 4 図

さて以上の議論は $f_2(x_r) = k_2 x_r + \alpha x_r^2$ の場合に対*

$$\begin{aligned} \Phi(x_{r \max}) &= (k_2 - Q)x_{r \max} + Q \left(1 - \frac{2\alpha^2}{Q^2} x_{r \max}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot x_{r \max} \\ &= -\frac{k_1 k_3}{k_1 + k_3} x_{r \max} + Q \left(1 - \frac{2\alpha^2}{Q^2} x_{r \max}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot x_{r \max} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

であり, 一方自由度1の場合にこれに相当する式としては右辺第1項はなく, 第2項の Q が k_2 になっている. すなわち自由度1の場合には(21)式に相当する式として

$$\Phi_1(x_{r \max}) = m \omega^2 x_{r \max} \pm \sqrt{P^2 - (c_2 \omega x_{r \max})^2} \dots\dots\dots (28)$$

ただし, $f_2(x_r) = k_2 x_r + \alpha x_r^2$ に対しては

$$\Phi_1(x_{r \max}) = k_2 \left(1 - \frac{2\alpha^2}{k_2^2} x_{r \max}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot x_{r \max}$$

であった. しかして任意に与えられた $f_2(x_r)$ に対してこの $\Phi_1(x_{r \max})$ を求めるには(28)式で $P=0, c_2=0$ とおいたいわゆる自由振動に対して

$$\Phi_1(x_{rn \max}) = m \cdot \omega_n^2 x_{rn \max} \dots\dots\dots (29)$$

なる関係の成立つことを利用した. ただし添字 n を附したのは自由振動のときの振幅, 角振動率の意味である. すなわち自由度1の場合には任意の非対称復原力特性から ω_n と $x_{rn \max}$ との関係を求め(29)式を用いて $\Phi_1(x_{rn \max})$ が求められたのである. 自由度2の場合には上にのべた $\Phi(x_{r \max})$ と $\Phi_1(x_{r \max})$ との相違点に着目して, ω_n と $x_{rn \max}$ との関係を求めるには与えられた非対称復原力曲線から直接ではなくこれに対して次のような修正をして求める. すなわち任意の非対称復原力特性をあらわす曲線が第5図に示すように $f_2(x_r)$ であるとする. 上にのべたように

$$Q = k_2 + \frac{k_1 k_3}{k_1 + k_3}$$

なる関係に着目して第5図上において

$$f_2(x_r) + \frac{k_1 k_3}{k_1 + k_3} x_r \text{ をえがく. かくしてえられた曲}$$

線に対して任意の質量 m を仮定し自由振動数と振幅

*するものであるが, $f_2(x_r)$ が任意に与えられたかん数の場合に上記の図的操作がいかに行われるべきかを説明しよう. さて(21)式を見ると, この式は $x_{r \max}$ を求める式であるが, この右辺には非線型復原力特性を示す係数は全然入っておらない. したがって右辺はいかなる非線型特性に対しても成立つ式であるのに反して, 左辺は非線型復原力特性や線型ばねの係数 k_1, k_3 に応じてえられる $x_{r \max}$ に関する奇かん数である. 任意の非対称型復原力特性の場合にこれに相当するかん数を $\Phi(x_{r \max})$ とすれば, この $\Phi(x_{r \max})$ を何らかの方法で求めうるならば $x_{r \max}$ は(21)式を用いて求められる. 以下にこの $\Phi(x_{r \max})$ の求め方をのべよう. それには任意の非対称型復原力を有する自由度1の場合に榎木⁽⁴⁾が自己振動利用による方法を誘導した際の経過を参考にして考える.

さて(21)からもわかるように

第 5 図

第 6 図

との関係を求める. (これは自由度1の場合と全く同じ操作である).

これを第6図とする. なお自由度1の場合と同じく b_{rn0} と $x_{rn \max}$ との関係は第7図のように求

められる。第 6 図から (29) の関係を用いてえられる第 8 図の曲線は (27) 式の右辺第 2 項に相当するもので

$$\text{これに } -\frac{k_1 k_3}{k_1 + k_3} x_r \max$$

を附加すれば所要の

$\Phi(x_r \max)$ が求められる。

かくして (21) 式による図

式解を行うことによって

$x_r \max$ および φ が求めら

る。次に b_{r0} と $x_r \max$ と

の関係は自由振動における

b_{r0} と $x_{rn \max}$ との関係

と全く同じであることを利用

すれば b_{r0} は第 7 図を利

第 7 図

第 8 図

用して直ちにえられる。かくして b_{r0} , $x_r \max$, φ の三つの値が求められると第 3 図, 第 4 図の図式操作ならびに (14), (25) 式によって b_{10} , a_1 , b_1 , b_{20} , a_2 , b_2 が求められ, x_1 , x_2 に対する所求の近似解がえられる。

次に $f_2(x_r)$ が対称型復原力である場合を論ずる。このとき一例として

$$f_2(x_r) = k_2 x_r + \beta x_r^3$$

に対して上述の計算を行えば (21) 式に相当して

$$k_2 x_r \max + \frac{3}{4} \beta x_r^3 \max = AN x_r \max$$

$$\pm \sqrt{P^2 - (c_2 \omega x_r \max)^2} \dots \dots \dots (21a)$$

をえ, さらに (23) (24) (26) については全く同じ式をうる。しかも b_{10} , b_{20} はこの場合は 0 と見てよい。したがって, この場合も任意の対称型復原力に対して (21a) 式の左辺 $\Phi(x_r \max)$ が図的に見出されるならば, 近似解は見出されることになる。このとき $\Phi(x_r \max)$ は自由度 1 の場合の $\Phi_1(x_r \max)$ と全く同じ形をとるから, $f_2(x_r)$ から直接, 任意の m を仮定し, 振幅と自己振動数の関係 (第 6 図に相当する) を求め, これから (29) 式を用いて $\Phi(x_r \max)$ がえら

れる。したがって対称型復原力の場合ははるかに非対称型の場合にくらべ, その操作は簡単となる。

3. 応 用 例

上の図式解法の妥当性を検証するためある系について実験を行うとともに, このときの数値を用いて実際上記の解法を行い, 両者の結果を比較することにする。実験装置は第 9 図に示すように, 二つの質量 m_1 ,

第 9 図 実験装置

m_2 をばね E , G , H で連結するとともに, m_1 と m_2 との間にはばね F を図のように挿入することにより非線型復原力特性をもたせた。ばね G と質量 m_2 との接着点には 20 mm の可動範囲を設け, $f_2(x_r)$ が奇関数になるよう調節できるようにした。 m_1 , m_2 の運動は完全に垂直方向の運動のみをするよう, 適当な案内を設けている。このときの数値は次のようである。

$$m_1 = 0.715, m_2 = 1.21 \text{ gs}^2/\text{cm}, a_0 = 1.15 \text{ cm}$$

第 10 図

第 11 図 (a)

第 12 図 (a)

第 11 図 (b)

第 12 図 (b)

第 11 図 (c)

$c_2 = 0.585 \text{ g/cm}$ (減衰器なし)
 $= 7.95 \text{ "}$ (減衰液として水の場合)
 $= 18.1 \text{ "}$ (モビール油とガソリンの混合液 3:1 の場合)
 $= 69.5 \text{ "}$ (モビール油の場合)

$k_1 = 500 \text{ g/cm}$, $k_3 = 60 \text{ g/cm}$

である。いま $f_2(x_r)$ が第 10 図で示されるものについての実験結果 (共振曲線, 位相差曲線) を示そう。

x_1, x_2 の正の側の最大の変位をそれぞれ $x_{1a \text{ max}}$,

$x_{2a \text{ max}}$, 負の側の変位を $x_{1b \text{ max}}$, $x_{2b \text{ max}}$ としたときこれらの値の外力振動数 $\left(= \frac{30}{\pi} \omega \right)$ による変化の模様を示したのが第 11 図であり, 位相差 φ_1, φ_2 についてのものが第 12 図である。いずれにおいても実線および点線であらわされるものは上記の解法によるものである。かくしてその妥当性が確かめられる。

注:—

- (1) 昭和 26 年 4 月 3 日 第 28 期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 27 年 8 月 4 日。
- (2) (3) 正員, 京都大学。
- (4) 榎木, 京都大学工学部紀要, 12 巻 4 号, (昭 25-7)。