第 8 図 加熱時に定常態の円板の熱応力
(温度) の比 ($b = \infty$ の場合)

5. 長円柱の熱応力

軸方向に温度変化のない場合を考える。

(i) $r_1^2 U \neq 0$ の場合 $\partial \xi_0 / \partial x = c(m+1)\beta / (m-1) \cdot \partial^2 U / \partial x^2 = 0$, $F = \phi_2 = 0$ とすれば

$$\partial \xi / \partial x = \text{一定} \dots \dots \dots (73)$$

(14), (20) 式より

$$\sigma_x = c_1 - mE\beta U / (m-1),$$

$$\sigma_r = -mE\beta / (m-1) \cdot 1/r^2 \cdot \int U r dr + c_2 + c_3/r^2$$

$$\sigma_t = mE\beta / (m-1) \cdot [1/r^2 \cdot \int U r dr - U] + c_2 - c_3/r^2$$

$$\dots \dots \dots (74)$$

(ii) $r_1^2 U = 0$ の場合 (16), (20) 式を使う。
 $\partial^2 F / \partial r^2 + 1/r \cdot \partial F / \partial r = -m(2m-3)E\beta U / (3m-4)(m-1)$,
 $2/r \cdot \partial \phi_2 / \partial r = -m^2 E\beta / (m-1)(3m-4) \cdot 1/r^2$
 $\cdot \int U r dr$ とおけば (73), (74) と全く同一の結果となる。
 これは従来得られていた式⁽³⁾と同一である。

6. 結 論

以上により得られた結果を列挙すれば

(1) 熱応力の一般的性質を明らかにし軸対称温度分布をなす円筒体の場合の熱応力を応力かん数の形で示した。

(2) これより定常, 不定常の場合で熱応力は同一にはならぬことを明らかにした。

(3) 薄円板についての従来の解は誤りで鶴戸口氏の解は定常温度のときのみ正しい。この場合は薄肉に限定せずとも周辺の条件が同一とすれば同じ形で表わせる。

(4) 長柱の軸方向に温度こう配のない場合の解は従来の式と同一で, これは $\partial \xi / \partial x = \text{一定}$ の場合に相当する。

(5) 円板の熱応力につき, 定常, 周期的, 加熱の三つの場合につき解を求め, 数値計算例をもって円板の中心, 下面の温度と応力を図示した。定常の場合のほかは板の内部至るところ $\sigma_x = \tau = 0$ になるような解はなく, したがって定常態と同一式で求めると誤差を生じ, それが厚さの大きくなるほど著しいことを明らかにした。また特に厚円板の急加熱の場合には定常態のそれより大きい熱応力がある時刻に発現し, 次で定常態の値まで減少する。その極大値は表面伝熱率の大きいほど大きく, たとえば計算例では $\alpha' = 5000$ の場合は定常態の値の 1.74 倍にもなり, 当然許容応力を超過する。すなわち急加熱の場合に熱応力による破損の危険が最も大きいことを明らかにした。

終りに本研究に対し有益な助言を与えられた樋口教授に対し, また数値計算と製図に助力された新井茂男, 明石幸子両君に対し謝意を表する。

注:—

(1) 昭和 16 年 4 月 3 日 第 19 期定時総会議演会および昭和 27 年 4 月 3 日 第 23 期定時総会議演会において講演, 原稿受付 昭和 27 年 7 月 1 日。

(2) 正員, 東北大学高速力学研究所。

(3) Timoshenko: Theory of Elasticity, pp. 366, 368.

(4) 鶴戸口: 応用力学, 4 巻 23 号 (1951) 10 ページ。

539.384.6 : 621.6.43.2

正多角形の穴を有する肉厚管が内圧を受ける場合の応力分布⁽¹⁾

清 家 政 一 郎⁽²⁾

Stress Distribution in a Thick Cylinder Having a Regular-Polygonal Hole under an Internal Pressure

by Masaichirō SEIKA

In the present paper, as a two dimensional problem of elasticity, the problem of the stress distribution in a thick cylinder having a regular-polygonal hole the corners of which are rounded is solved under the condition of internal pressure.

As an example of the present analysis, the values of stresses at any point in a thick cylinder having a square hole the corners of which are slightly rounded were numerically obtained and the state of stress distribution in it was clarified. And these values of stresses were compared with the results obtained for the case of an infinite plate having a similar hole in it and discussed somewhat in detail.

1. 緒 言

隅を丸めた正多角形の穴を持つ肉厚管に内圧が作用した場合の応力分布の状態を、二次元弾性問題として解析し、特に正四角形の穴を持つ場合に対して、各点の応力を数値的に求めた。あわせて、無限に広がっている板に同じ形の穴がある場合の値と比較した。なお津村利光博士が、無限に広がっている板に正多角形の穴を有する場合について計算⁽³⁾されたが、これと比較して完全に一致することを確かめた。

2. 解 析

肉厚管の形として、次の変換式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} z &= a(pe^{-i\omega} + re^{i\omega}), \quad z = x + iy, \quad w = \alpha + i\beta. \\ \text{すなわち} \\ x &= a(pe^{\beta} \cos \alpha + re^{-\beta} \cos p\alpha) \\ y &= a(-pe^{\beta} \sin \alpha + re^{-\beta} \sin p\alpha). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに p は正の整数、 r は隅の丸味を支配する定数で、 $0 \leq r \leq 1$ 、 a は任意の正数とする。また、 β は 0 より ∞ まで、 α は 0 より 2π まで変化する。

β = 一定曲線は、 $(p+1)$ 個の隅を持つ閉曲線になり、 x 軸より始まって、 $2\pi/(p+1)$ の角をへだてて原点より引いたふく射線に対称の位置を取る。 $r=1$ のときは、 $(p+1)$ 個の先端を持つ星形で、他の場合は一つの連続曲線となる。 $r=0$ は円、 $p=1$ はだ円、 $p=2, 3, \dots$ はそれぞれ正三角形、正四角形、……の隅を丸めた形になる。*

$$\begin{aligned} \beta\beta - \alpha\alpha - i2\alpha\beta &= \frac{1}{p\{1 - re^{-(p+1)\beta}(\cos(p+1)\alpha - i\sin(p+1)\alpha)\}} \\ &\times \left[\sum_{n=0}^{\infty} \{(p+1)n/2\} \left[A_n \{pe^{-(p+1)n\beta}(\cos(p+1)n\alpha + i\sin(p+1)n\alpha) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + re^{-(p+1)(n+1)\beta}(\cos(p+1)(n-1)\alpha + i\sin(p+1)(n-1)\alpha)\right\} \right. \\ &\quad \left. - B_n \{pe^{(p+1)n\beta}(\cos(p+1)n\alpha - i\sin(p+1)n\alpha) \right. \\ &\quad \left. + re^{(p+1)(n-1)\beta}(\cos(p+1)(n+1)\alpha - i\sin(p+1)(n+1)\alpha)\right\} \Big] \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n e^{-\{(p+1)n+2\}\beta}(\cos(p+1)n\alpha + i\sin(p+1)n\alpha) \right. \\ &\quad \left. + D_n e^{\{(p+1)n-2\}\beta}(\cos(p+1)n\alpha - i\sin(p+1)n\alpha) \right] \Big] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\beta\beta + \alpha\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n e^{-(p+1)n\beta} + B_n e^{(p+1)n\beta}\} \cos(p+1)n\alpha \dots\dots\dots (9)$$

(8), (9) に含まれる係数は、(4), (5) なる境界条件を満足するように決定されねばならない。

3. 係数 A_n, B_n, C_n, D_n の決定

(4), (5) を (8), (9) に代入して、それぞれ実数部と虚数部とに分け、各部の左右両辺を等置すると、次の4式を得る。

* 二次元応力の一般表示として、周知のように次式⁽⁴⁾が成立する。

$$\beta\beta - \alpha\alpha - i2\alpha\beta = \frac{-1}{\partial(x-iy)/\partial\alpha} \left[iy \frac{d\varphi_1(w)}{dw} + \varphi_2(w) \right] \dots\dots\dots (2)$$

$$\beta\beta + \alpha\alpha = \text{Real part of } [\varphi_1(w)] \dots\dots\dots (3)$$

ここに φ_1, φ_2 はいずれも w のみのかん数である。いま管の内外周辺が、それぞれ $\beta=0$ および $\beta=\beta_1$ で与えられるものとし、これらの周辺に次式で表わされる外力が作用する場合を考える。

$$\begin{aligned} \beta=0 \text{ で, } \beta\beta &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cos(p+1)n\alpha, \\ \alpha\beta &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(p+1)n\alpha \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta=\beta_1 \text{ で, } \beta\beta &= \sum_{n=0}^{\infty} T'_n \cos(p+1)n\alpha, \\ \alpha\beta &= \sum_{n=1}^{\infty} S'_n \sin(p+1)n\alpha \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

いま、(4), (5) なる境界条件を満足させるために、(2), (3) における φ_1, φ_2 を次のように置くことにする。

$$\varphi_1(w) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n e^{i(p+1)n\omega} + B_n e^{-i(p+1)n\omega}] \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(w) &= -\frac{z}{2} \frac{d\varphi_1(w)}{dw} + iae^{i\omega} \sum_{n=0}^{\infty} [C_n e^{i(p+1)n\omega} \\ &\quad + D_n e^{-i(p+1)n\omega}] \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

(2), (3) に (1), (6), (7) を代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}
& -2pT_0(1-r\cos(p+1)\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2pT_n \cos(p+1)n\alpha - pr(T_n - S_n)\cos(p+1)(n-1)\alpha \right. \\
& \quad \left. - pr(T_n + S_n)\cos(p+1)(n+1)\alpha \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \left\{ \left(\frac{p(p+1)n}{2} + p \right) \cos(p+1)n\alpha \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(p+1)n-p}{2} r \cos(p+1)(n-1)\alpha - \frac{p}{2} r \cos(p+1)(n+1)\alpha \right\} \right. \\
& \quad \left. - B_n \left\{ \left(\frac{p(p+1)n}{2} - p \right) \cos(p+1)n\alpha + \frac{p}{2} r \cos(p+1)(n-1)\alpha \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(p+1)n+p}{2} r \cos(p+1)(n+1)\alpha \right\} - C_n \cos(p+1)n\alpha - D_n \cos(p+1)n\alpha \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2prT_0 \sin(p+1)\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2pS_n \sin(p+1)n\alpha + pr(T_n - S_n)\sin(p+1)(n-1)\alpha \right. \\
& \quad \left. - pr(T_n + S_n)\sin(p+1)(n+1)\alpha \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \left\{ \frac{p(p+1)n}{2} \sin(p+1)n\alpha \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(p+1)n-p}{2} r \sin(p+1)(n-1)\alpha + \frac{p}{2} r \sin(p+1)(n+1)\alpha \right\} \right. \\
& \quad \left. - B_n \left\{ -\frac{p(p+1)n}{2} \sin(p+1)n\alpha + \frac{p}{2} r \sin(p+1)(n-1)\alpha \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{(p+1)n+p}{2} r \sin(p+1)(n+1)\alpha \right\} - C_n \sin(p+1)n\alpha + D_n \sin(p+1)n\alpha \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -6T_0'(1-re^{-(p+1)\beta_1} \cos(p+1)\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2pT_n' \cos(p+1)n\alpha - pre^{-(p+1)\beta_1}(T_n' - S_n')\cos(p+1)(n-1)\alpha \right. \\
& \quad \left. - pre^{-(p+1)\beta_1}(T_n' + S_n')\cos(p+1)(n+1)\alpha \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \left\{ \left(\frac{p(p+1)n}{2} + p \right) e^{-(p+1)\beta_1} \cos(p+1)n\alpha \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(p+1)n-p}{2} re^{-(p+1)(n+1)\beta_1} \cos(p+1)(n-1)\alpha - \frac{p}{2} re^{-(p+1)(n+1)\beta_1} \cos(p+1)(n+1)\alpha \right\} \right. \\
& \quad \left. - B_n \left\{ \left(\frac{p(p+1)n}{2} - p \right) e^{-(p+1)n\beta_1} \cos(p+1)n\alpha + \frac{p}{2} re^{(p+1)(n-1)\beta_1} \cos(p+1)(n-1)\alpha \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(p+1)n+p}{2} re^{(p+1)(n-1)\beta_1} \cos(p+1)(n+1)\alpha \right\} - C_n e^{-\{(p+1)n+2\}\beta_1} \cos(p+1)n\alpha \right. \\
& \quad \left. - D_n e^{\{(p+1)n-2\}\beta_1} \cos(p+1)n\alpha \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2pre^{-(p+1)\beta_1} T_0' \sin(p+1)\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2pS_n' \sin(p+1)n\alpha + pre^{-(p+1)\beta_1}(T_n' - S_n')\sin(p+1)(n-1)\alpha \right. \\
& \quad \left. - pre^{-(p+1)\beta_1}(T_n' + S_n')\sin(p+1)(n+1)\alpha \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \left\{ \frac{p(p+1)n}{2} e^{-(p+1)n\beta_1} \sin(p+1)n\alpha \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(p+1)n-p}{2} re^{-(p+1)(n+1)\beta_1} \sin(p+1)(n-1)\alpha + \frac{p}{2} re^{-(p+1)(n+1)\beta_1} \sin(p+1)(n+1)\alpha \right\} \right. \\
& \quad \left. - B_n \left\{ -\frac{p(p+1)n}{2} e^{-(p+1)n\beta_1} \sin(p+1)n\alpha + \frac{p}{2} re^{(p+1)(n-1)\beta_1} \sin(p+1)(n-1)\alpha \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{(p+1)n+p}{2} re^{(p+1)(n-1)\beta_1} \sin(p+1)(n+1)\alpha \right\} - C_n e^{-\{(p+1)n+2\}\beta_1} \sin(p+1)n\alpha \right. \\
& \quad \left. + D_n e^{\{(p+1)n-2\}\beta_1} \sin(p+1)n\alpha \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (13)
\end{aligned}$$

(10), (11) および (12), (13) において, $\cos(p+1)n\alpha$ および $\sin(p+1)n\alpha$ の各項の係数の和は, それぞれ 0 でなければならぬから, 次の関係が得られる. ただし, $A_0+B_0 \equiv A_0$, $C_0+D_0 \equiv C_0$ とする.

$$-2pT_0 + pr(T_1 - S_1) + pA_0 + (1/2)rA_1 - (1/2)prB_1 - C_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned}
& 2prT_0 - 2pT_1 + pr(T_2 - S_2) - prA_0 + \{p(p+3)/2\}A_1 + \{(p+2)/2\}rA_2 \\
& \quad - \{p(p-1)/2\}B_1 - (p/2)rB_2 - C_1 - D_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2prT_0 + 2pS_1 + pr(T_2 - S_2) + prA_0 + \{p(p+1)/2\}A_1 + \{(p+2)/2\}rA_2 \\
& \quad + \{p(p+1)/2\}B_1 - (p/2)rB_2 - C_1 + D_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2pT_k + pr(T_{k+1} - S_{k+1}) + pr(T_{k-1} + S_{k-1}) - (p/2)rA_{k-1} + \{p(kp+k+2)/2\}A_k \\
& \quad + \{(kp+k+1)/2\}rA_{k+1} - \{(kp+k-1)/2\}rB_{k-1} - \{p(kp+k-2)/2\}B_k - (p/2)rB_{k+1} \\
& \quad - C_k - D_k = 0 \quad \dots\dots\dots (17)
\end{aligned}$$

$$2pS_k + pr(T_{k+1} - S_{k+1}) - pr(T_{k-1} + S_{k-1}) + (p/2)rA_{k-1} + \{kp(p+1)/2\}A_k$$

$$+\{(kp+k+1)/2\}rA_{k+1}+\{(kp+k-1)/2\}rB_{k-1}+\{kp(p+1)/2\}B_k-(p/2)rB_{k+1}-C_k+D_k=0 \quad \dots(18)$$

$$2pT_0'+pre^{-(p+1)\beta_1}(T_1'-S_1')+pA_0+(1/2)re^{-2(p+1)\beta_1}A_1-(p/2)rB_1-e^{-2\beta_1}C_0=0 \quad \dots(14')$$

$$2pre^{-(p+1)\beta_1}T_0'-2pT_1'+pre^{-(p+1)\beta_1}(T_2'-S_2')-pre^{-(p+1)\beta_1}A_0+\{p(p+3)/2\}e^{-(p+1)\beta_1}A_1 \\ +\{(p+2)/2\}re^{-3(p+1)\beta_1}A_2-\{p(p-1)/2\}e^{(p+1)\beta_1}B_1-(p/2)re^{(p+1)\beta_1}B_2-e^{-(p+3)\beta_1}C_1-e^{(p-1)\beta_1}D_1=0 \\ \dots(15')$$

$$-2pre^{-(p+1)\beta_1}T_0'+2pS_1'+pre^{-(p+1)\beta_1}(T_2'-S_2')+pre^{-(p+1)\beta_1}A_0+\{p(p+1)/2\}e^{-(p+1)\beta_1}A_1 \\ +\{(p+2)/2\}re^{-3(p+1)\beta_1}A_2+\{p(p+1)/2\}e^{(p+1)\beta_1}B_1-(p/2)re^{(p+1)\beta_1}B_2-e^{-(p+3)\beta_1}C_1+e^{(p-1)\beta_1}D_1=0 \\ \dots(16')$$

$$\bullet -2pT_k'+pre^{-(p+1)\beta_1}(T_{k+1}'-S_{k+1}')+pre^{-(p+1)\beta_1}(T_{k-1}'+S_{k-1}')-(p/2)re^{-k(p+1)\beta_1}A_{k-1} \\ +\{p(kp+k+2)/2\}e^{-k(p+1)\beta_1}A_k+\{(kp+k+1)/2\}re^{-(k+2)(p+1)\beta_1}A_{k+1} \\ -\{(kp+k-1)/2\}re^{(k-2)(p+1)\beta_1}B_{k-1}-\{p(kp+k-2)/2\}e^{k(p+1)\beta_1}B_k-(p/2)re^{k(p+1)\beta_1}B_{k+1} \\ -e^{\{k(p+1)+2\}\beta_1}C_k-e^{\{k(p+1)-2\}\beta_1}D_k=0 \quad \dots(17')$$

$$2pS_k'+pre^{-(p+1)\beta_1}(T_{k+1}'-S_{k+1}')-pre^{-(p+1)\beta_1}(T_{k-1}'+S_{k-1}')+(p/2)re^{-k(p+1)\beta_1}A_{k-1} \\ +\{kp(p+1)/2\}e^{-k(p+1)\beta_1}A_k+\{(kp+k+1)/2\}re^{-(k+2)(p+1)\beta_1}A_{k+1}+\{(kp+k-1)/2\}re^{(k-2)(p+1)\beta_1}B_{k-1} \\ +\{kp(p+1)/2\}e^{k(p+1)\beta_1}B_k-(p/2)re^{k(p+1)\beta_1}B_{k+1}-e^{\{k(p+1)+2\}\beta_1}C_k+e^{\{k(p+1)-2\}\beta_1}D_k=0 \quad \dots(18')$$

ただし、(17)、(18) および (17')、(18') において、 $k \geq 2$ なる整数とする。

(14) ないし (18)、および (14') ないし (18') を用いて、 A_n 、 B_n 、 C_n 、 D_n を決定すれば、問題が解決したことになる。

4. 例 題

【1】肉厚管の場合 $p=3$ 、 $r=0.4$ 、 $\beta_1=1.0$ とすれば、第1図に示すような肉厚管が得られる。図に

第1図 肉厚管の断面

において、標準外径 $D=16.35a$ 、穴の対角距離 $d=6.80a$ となる。穴の対辺距離を b 、隅の曲率半径を ρ_0 とすれば、次の関係がある。

$$d/D=0.416, \quad b/D=0.318, \quad \rho_0/D=0.0298, \\ \rho_0/b=0.0937. \quad *$$

$$(4k+1)rA_{k+1}-3rB_{k+1}-2C_k=-(12k+3)A_k-3B_k$$

$$(4k+1)re^{-4(k+2)\beta_1}A_{k+1}-3re^{4k\beta_1}B_{k+1}-2e^{-(4k+2)\beta_1}C_k=-(12k+3)e^{-4k\beta_1}A_k-3e^{4k\beta_1}B_k$$

$$3A_{k+1}-(12k+9)B_{k+1}-2D_{k+1}=3rA_k+(4k+3)rB_k$$

$$3e^{-4(k+1)\beta_1}A_{k+1}-(12k+9)e^{4(k+1)\beta_1}B_{k+1}-2e^{4(k+1)\beta_1}D_{k+1}=3re^{-4(k+1)\beta_1}A_k+(4k+3)re^{4(k+1)\beta_1}B_k$$

ただし、 $k \geq 1$ なる整数とする。

(20) より、 A_0 、 A_1 、 B_1 、 C_0 をそれぞれ T_0 、 D_1 で

* なお、外径の標準外径に対する偏差 δ を求めれば、第1表のようになる。この肉厚管の内周に沿って、一

第1表 外径の偏差

α	0°	15°	30°	45°
δ	0 %	-0.24%	-0.49%	-0.61%

様な圧力が作用した場合を考える。この場合には、(4)、(5) の係数は次のように置くことができる。

$$\left. \begin{aligned} T_0 < 0, \quad T_1 = T_2 = \dots = 0, \quad S_1 = S_2 = \dots = 0, \\ T_0' = T_1' = T_2' = \dots = 0, \quad S_1' = S_2' = \dots = 0. \end{aligned} \right\} \quad \dots(19)$$

(19) の関係を用いて、(14)、(14') なる二式、(15) と (16) の差および (15') と (16') の差を組合せると、(20) を得る。次に、(15) と (16) の和、(15') と (16') の和、およびその次のそれぞれの差同志を組合せると、(21) を得る。以下順次この手続きを繰り返せば、漸化式 (22) により、逐次連立方程式を立てて行くことができる。

$$\left. \begin{aligned} 3A_0+(1/2)rA_1-(3/2)rB_1-C_0 &= -6T_0 \\ 3A_0+(1/2)re^{-8\beta_1}A_1-(3/2)rB_1-e^{-2\beta_1}C_0 &= 0 \\ -6rA_0+3A_1-9B_1 &= 2D_1+12rT_0 \\ -6re^{-4\beta_1}A_0+3e^{-4\beta_1}A_1-9e^{4\beta_1}B_1 &= 2e^2D_1 \end{aligned} \right\} \quad \dots(20)$$

$$\left. \begin{aligned} 5rA_2-3rB_2-2C_1 &= -15A_1-3B_1 \\ 5re^{-12\beta_1}A_2-3re^{4\beta_1}B_2-2e^{-6\beta_1}C_1 &= -15e^{-4\beta_1}A_1-3e^{4\beta_1}B_1 \\ 3A_2-21B_2-2D_2 &= 3rA_1+7rB_1 \\ 3e^{-8\beta_1}A_2-21e^{8\beta_1}B_2-2e^{6\beta_1}D_2 &= 3re^{-8\beta_1}A_1+7rB_1 \end{aligned} \right\} \quad \dots(21)$$

$$\left. \begin{aligned} (4k+1)rA_{k+1}-3rB_{k+1}-2C_k &= -(12k+3)A_k-3B_k \\ (4k+1)re^{-4(k+2)\beta_1}A_{k+1}-3re^{4k\beta_1}B_{k+1}-2e^{-(4k+2)\beta_1}C_k &= -(12k+3)e^{-4k\beta_1}A_k-3e^{4k\beta_1}B_k \\ 3A_{k+1}-(12k+9)B_{k+1}-2D_{k+1} &= 3rA_k+(4k+3)rB_k \\ 3e^{-4(k+1)\beta_1}A_{k+1}-(12k+9)e^{4(k+1)\beta_1}B_{k+1}-2e^{4(k+1)\beta_1}D_{k+1} &= 3re^{-4(k+1)\beta_1}A_k+(4k+3)re^{4(k+1)\beta_1}B_k \end{aligned} \right\} \quad \dots(22)$$

表わし、これらを (21) の右辺に入れて、 A_2 、 B_2 、 C_1 、 D_2 をそれぞれ T_0 、 D_1 で表わす。順次この手続きを

経て、 A_n, B_n, C_n, D_n をそれぞれ T_0, D_1 で表わすことができる。

この場合に、応力は有限でなければならぬということから、 $B_{k+1}=B_k=D_{k+1}=0$ なることが誘導され、転

じてまず D_1 が決まり、結局 A_n, B_n, C_n, D_n が決まり、問題は解けたことになる。

得られた係数の値を第2表に示す。これらの係数の値を用いて、(8), (9) により各応力分値を求めれば、

第2表 A_n, B_n, C_n, D_n の値

$p=3, r=0.4, \beta_1=1.0$				
n	A_n/T_0	B_n/T_0	C_n/T_0	D_n/T_0
0	0.332 499		7.383 78	
1	1.923 13	$-2.766 38 \times 10^{-3}$	15.186 0	$9.814 58 \times 10^{-2}$
2	0.766 706	-6.6×10^{-7}	10.902 5	6.1×10^{-5}
3	0.306 681	0	6.299 2	0
4	0.122 673	0	3.285	0
5	0.049 0	0	1.628	0
6	0.019 6	0	0.77	0
7	0.007	0	0.36	0
8	0.003	0	0.1	0

第3表 $\hat{\alpha}\alpha/T_0$ の値

$\beta \backslash \alpha$	0°	15°	30°	45°
0	4.53	1.59	0.22	-0.04
0.1	2.21	1.39	0.54	0.29
0.2	1.39	1.12	0.67	0.50
0.4	0.79	0.76	0.64	0.58
0.6	0.53	0.53	0.53	0.52
0.8	0.37	0.39	0.43	0.44
1.0	0.21	0.27	0.39	0.44

第4表 $\hat{\beta}\beta/T_0$ の値

$\beta \backslash \alpha$	0°	15°	30°	45°
0	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00
0.1	-0.08	-0.68	-0.95	-0.99
0.2	-0.01	-0.47	-0.82	-0.89
0.4	-0.03	-0.24	-0.52	-0.61
0.6	-0.04	-0.13	-0.27	-0.33
0.8	-0.03	-0.06	-0.10	-0.12
1.0	0	0	0	0

第5表 $\hat{\alpha}\beta/T_0$ の値

$\beta \backslash \alpha$	0°	15°	30°	45°
0	0	0	0	0
0.1	0	-0.28	-0.10	0
0.2	0	-0.32	-0.16	0
0.4	0	-0.18	-0.13	0
0.6	0	-0.13	-0.11	0
0.8	0	-0.05	-0.04	0
1.0	0	0	0	0

第3表、第4表、第5表のようになる。これらを図示すれば、第2図、第3図、第4図のようになる。なお同図で点線は無限板の場合の値を示す。

この応力分布で注目すべきことをあげれば

(i) $\hat{\alpha}\alpha$ の値 穴の隅において応力の集中がおこり、隅より遠ざかるにしたがって、その大きさがすみやかに減ずる。隅における値は、無限板で $3.66 T_0$ 、この肉厚管では $4.53 T_0$ となり、無限板の場合の 1.2

第2図 $\hat{\alpha}\alpha$ の分布

倍の大きさを示す。内周の $\alpha=45^\circ$ の点では、無限板も、この肉厚管も共にわずかであるが圧力となる。なお穴より遠ざかるにしたがって、 β = 一定曲線に沿う $\hat{\alpha}\alpha_{\max}$ の点が、 $\alpha=45^\circ$ の線の方に寄って来る。

(ii) $\hat{\beta}\beta$ の値 $\alpha=0^\circ$ の線に沿うては、穴から少し離れると、その大きさがすみやかに減ずる。 $\alpha=45^\circ$ の線に沿うては、その大きさが、ゆるやかに減じ、かつ $\hat{\beta}\beta_{\max}$ の点がこの線上にある。無限板の場合もまったく同じ傾向である。

第3図 $\hat{\beta}\beta$ の分布 第4図 $\hat{\alpha}\beta$ の分布

【2】薄肉管の場合 $p=3, r=0.4, \beta_1=0.4$ とすれば、第5図に示すような薄肉管が得られる。図において、 $D'=9.19a, d=6.80a$ であり、それぞれ次の関係がある。

$$\begin{aligned} d/D' &= 0.740, \\ b/D' &= 0.566, \\ \rho_0/D' &= 0.0530, \\ \rho_0/b &= 0.0937. \end{aligned}$$

第5図 薄肉管の断面

また偏差 δ を求めれば第6表のようになる。

第6表 外径の偏差

α	0°	15°	30°	45°
δ	0 %	-1.31%	-3.92%	-5.27%

これに一樣な内圧が作用した場合を考えると、再び(19)の関係を用いて、例[1]とまったく同じ手続を経て求めた係数の値を第7表に示す。これらの値を用いて各応力分値を求め、これらを図示すれば、第6図、第7図、第8図のようになる。なお、同図で点線は無限板の場合の値を示す。

この応力分布で注目すべきことをあげれば、

(i) $\hat{\alpha}\alpha$ の値 この場合には、穴の隅において集中した $\hat{\alpha}\alpha$ の値は $11.09 T_0$ で、無限板の値の3倍の大きさである。内周の $\alpha=45^\circ$ の点では、 $-1.02 T_0$ で、無限板の値の7.1倍の大きさとなる。外周に沿う

第7表 A_n, B_n, C_n, D_n の値

$p=3, r=0.4, \beta_1=0.4$				
n	A_n/T_0	B_n/T_0	C_n/T_0	D_n/T_0
0	1.789 79		12.923 0	
1	5.818 90	-0.649 805	44.581 5	7.104 73
2	1.905 25	-0.015 24	27.042	0.436 3
3	0.746 5	-0.000 35	15.32	0.016
4	0.297	0	8.00	0
5	0.119	0	3.9	0
6	0.04	0	1.5	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0

ては、 $\alpha=0^\circ$ の点で、無限板では張力であるが、この薄肉管では圧力となり、ほぼ同じ値 $-0.59 T_0$ を示す。

また $\alpha=45^\circ$ の点では、その値が $3.57 T_0$ となり、無限板の値の9.3倍の大きさである。

(ii) $\hat{\beta}\beta$ の値 $\alpha=0^\circ$ の線上では、最初は圧力ですぐ張力になる。この原因としては、穴の隅における $\hat{\alpha}\alpha$ の値が非常に大きいということからだいたいの説明ができる。

結局、この薄肉管では、無限板および例[1]の肉厚管における応力分布とその様相が異なっているが、これは薄肉の場合に穴の隅に非常に大きな応力集中がおこる影響として解釈されるように思う。

第6図 $\hat{\alpha}\alpha$ の分布 第7図 $\hat{\beta}\beta$ の分布 第8図 $\hat{\alpha}\beta$ の分布

5. 結 論

隅を丸めた正多角形の穴を持つ肉厚管に内圧が作用した場合の応力分布の状態を、二次元弾性問題として解析し、特に正四角形の穴を持つ場合に対し、各点の応力を数値的に求めて、この場合の応力分布を明らかにした。しかして、これを既知の無限に拡がっている板に同じ形の穴がある場合の値と比較して、やや詳細

に検討したものである。なお本論文は著者の東北大学工学部内力及弾性学研究室における研究報告の一部をなすものである。

注：—

- (1) 昭和 27 年 4 月 3 日 第 29 期定期総会講演会において講演，原稿受付 昭和 27 年 7 月 28 日。
- (2) 正員，東北大学工学部機械工学科大学院特別研究生。
- (3) 津村，機械学会誌，32 巻 142 号，77 ページ（昭 4—2）。
- (4) 横田，機械学会誌，18 巻 38 号，1 ページ（大 4—4）。

539.384.6 : 624.074.4—477

円環かくの応力および変形の計算⁽¹⁾

中 村 康 治⁽²⁾

Stresses and Deformations of Circular Ring Shells

by Kōji NAKAMURA

The Love-Meissner Theory is applied to the circular ring shells, which are submitted to the action of uniform normal pressure. The solutions of the basic equations are worked out in a form of power series. The deformation represented by the solution of the first kind is symmetrical with respect to the circumferential line of the utmost parallel circle and the one by the solution of the second kind is symmetrical with respect to the plane involving the above circle. Some numerical calculations have been performed.

1. 緒 論

Love-Meissner 理論を適用して円環かくの問題を最初に解いたのは H. Wissler⁽³⁾ であるが、この解法の詳細はわが国においてはあまり知られていないように思われる。その後 K. Stange⁽⁴⁾ が同心波形板に應用する意図のもとに近似解法を示した。わが国においては、水車ケーシングの問題に関連して鬼頭⁽⁵⁾、大井⁽⁶⁾両氏の研究が発表された。E. Reissner⁽⁷⁾⁽⁸⁾ の最近の研究は注目されてよいものと思われる。

ここに報告する研究も Love-Meissner 理論を用いて解を求めたもので、かく面に均等圧を受けるような場合の應用を主としてとりあつかった。

2. 円環かくの基本方程式とその解法

円環かくの形、大きさはかく中心面の主曲率の一つを r_1 、環の半径を a 、板厚を h とすると、 $\lambda_1 = r_1/h$ 、 $\lambda_2 = r_1/a$ によって規定される。かく材質の縦弾性係数を E 、ポアソン比を ν 、板の曲げこわさを $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ とする。

一般に軸対称かくの軸対称変形に対する基本方程式は次のようになることはよく知られている。

$$\left. \begin{aligned} L(\vartheta) - \nu\vartheta &= -\alpha U, \\ L(U) + \nu U &= \beta\vartheta - \Phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

第 1 図

ϑ はメリディアンに垂直な断面 φ の角変位， U はその断面張合力のかん数， α, β はかくの形，材質によりきまる係数， Φ はかく面荷重および中心軸 A 方向の かく端縁荷重などを含む項， L は二次の微分演算子である。板厚および第一主曲率 r_1 が一定である場合 (1) 式は

$$L(\vartheta) + iT\vartheta + (\alpha/T) \cdot \Phi = 0 \dots\dots\dots (2)$$

を解くことに帰することもまたよく知られている。

ただし $T = (\alpha\beta - \nu^2)^{1/2}$ である。

(2) 式の同次方程式の 2 個の特解の実，虚部を η_{1R} ， η_{1I} ， η_{2R} ， η_{2I} ，また非同次方程式の特解 η_s の実，虚部を η_R ， η_I とすれば (1) 式の解は次のようになる。