5. 結 論

隅を丸めた正多角形の穴を持つ肉厚管に内圧が作用した場合の応力分布の状態を、二次元弾性問題として解析し、特に正四角形の穴を持つ場合に対し、各点の応力を数値的に求めて、この場合の応力分布を明らかにした。しかして、これを既知の無限に拡がっている板に同じ形の穴がある場合の値と比較して、やや詳細

に検討したものである。なお本論文は著者の東北大学工学部内力及弾性学研究室における研究報告の一部をなすものである。

注：—

- (1) 昭和 27 年 4 月 3 日 第 29 期定期総会講演会において講演，原稿受付 昭和 27 年 7 月 28 日。
- (2) 正員，東北大学工学部機械工学科大学院特別研究生。
- (3) 津村，機械学会誌，32 巻 142 号，77 ページ（昭 4—2）。
- (4) 横田，機械学会誌，18 巻 38 号，1 ページ（大 4—4）。

539.384.6 : 624.074.4—477

円環かくの応力および変形の計算⁽¹⁾

中 村 康 治⁽²⁾

Stresses and Deformations of Circular Ring Shells

by Kōji NAKAMURA

The Love-Meissner Theory is applied to the circular ring shells, which are submitted to the action of uniform normal pressure. The solutions of the basic equations are worked out in a form of power series. The deformation represented by the solution of the first kind is symmetrical with respect to the circumferential line of the utmost parallel circle and the one by the solution of the second kind is symmetrical with respect to the plane involving the above circle. Some numerical calculations have been performed.

1. 緒 論

Love-Meissner 理論を適用して円環かくの問題を最初に解いたのは H. Wissler⁽³⁾ であるが、この解法の詳細はわが国においてはあまり知られていないように思われる。その後 K. Stange⁽⁴⁾ が同心波形板に應用する意図のもとに近似解法を示した。わが国においては、水車ケーシングの問題に関連して鬼頭⁽⁵⁾、大井⁽⁶⁾両氏の研究が発表された。E. Reissner⁽⁷⁾⁽⁸⁾ の最近の研究は注目されてよいものと思われる。

ここに報告する研究も Love-Meissner 理論を用いて解を求めたもので、かく面に均等圧を受けるような場合の應用を主としてとりあつかった。

2. 円環かくの基本方程式とその解法

円環かくの形、大きさはかく中心面の主曲率の一つを r_1 、環の半径を a 、板厚を h とすると、 $\lambda_1 = r_1/h$ 、 $\lambda_2 = r_1/a$ によって規定される。かく材質の縦弾性係数を E 、ポアソン比を ν 、板の曲げこわさを $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ とする。

一般に軸対称かくの軸対称変形に対する基本方程式は次のようになることはよく知られている。

$$\left. \begin{aligned} L(\vartheta) - \nu\vartheta &= -\alpha U, \\ L(U) + \nu U &= \beta\vartheta - \Phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

第 1 図

ϑ はメリディアンに垂直な断面 φ の角変位、 U はその断面張合力のかん数、 α, β はかくの形、材質によりきまる係数、 Φ はかく面荷重および中心軸 A 方向の かく端縁荷重などを含む項、 L は二次の微分演算子である。板厚および第一主曲率 r_1 が一定である場合 (1) 式は

$$L(\vartheta) + iT\vartheta + (\alpha/T) \cdot \Phi = 0 \dots\dots\dots (2)$$

を解くことに帰することもまたよく知られている。

ただし $T = (\alpha\beta - \nu^2)^{1/2}$ である。

(2) 式の同次方程式の 2 個の特解の実、虚部を $\eta_{1R}, \eta_{1I}, \eta_{2R}, \eta_{2I}$ 、また非同次方程式の特解 η_s の実、虚部を η_R, η_I とすれば (1) 式の解は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \bar{C}_1 \gamma_{1R} + \bar{C}_2 \gamma_{1I} + \bar{C}_3 \gamma_{2R} + \bar{C}_4 \gamma_{2I} + \gamma_{S1} \\ U &= \bar{C}_1 (\nu \gamma_{1R} - T \gamma_{1I}) + \bar{C}_2 (T \gamma_{1R} + \nu \gamma_{1I}) \\ &\quad + \bar{C}_3 (\nu \gamma_{2R} - T \gamma_{2I}) + \bar{C}_4 (T \gamma_{2R} + \nu \gamma_{2I}) \\ &\quad + (1/\alpha) (T \gamma_R + \nu \gamma_I) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

$\bar{C}_1 \sim \bar{C}_4$ は積分定数である。

円環かくの場合 $U = r_2 Q/a$ とすれば $\alpha = r_1 a/D$, $\beta = E h r_1/a$, L は

$$L = \frac{1 + \lambda_2 \sin \varphi}{\lambda_2 \sin \varphi} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} - \frac{\lambda_2 \cos^2 \varphi}{(1 + \lambda_2 \sin \varphi) \sin \varphi}$$

$T^2 = 12(1 - \nu^2) \lambda_1^2 - \nu^2$ である。

また非同次項 Φ はたとえば内圧 p をうけ、かつ端縁 φ_0 に軸方向の荷重 V_0 が作用している場合次のようになる。

$$\Phi = -\frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \left(\frac{2}{\lambda_2 \sin \varphi} + \frac{1}{1 + \lambda_2 \sin \varphi} \right) A + \frac{\lambda_2 \cot \varphi}{1 + \lambda_2 \sin \varphi} \cdot \left(\frac{p r_1}{2} \right) \dots (4)$$

ただし $A = (1 + \lambda_2 \sin \varphi_0) V_0$

$$- (2 + \lambda_2 \sin \varphi_0) \sin \varphi_0 (p r_1/2) \dots (5)$$

(i) 同次方程式の解 (2) 式の同次方程式

$$\left. \begin{aligned} (1 + \lambda_2 \sin \varphi) \frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} - \lambda_2 \cos \varphi \frac{d\eta}{d\varphi} \\ - \left(\frac{\lambda_2^2 \cos^2 \varphi}{1 + \lambda_2 \sin \varphi} - iT \lambda_2 \sin \varphi \right) \eta = 0 \dots (6) \end{aligned} \right\}$$

において $x = \sin \varphi$, $\eta = y/(1 + \lambda_2 x)$

なる変換をおこなえば

$$\left. \begin{aligned} (1 + \lambda_2 x)(1 - x^2) d^2 y/dx^2 - (x + \lambda_2) dy/dx \\ + \lambda_2 (1 + iT) xy = 0 \dots (6a) \end{aligned} \right\}$$

となる。 y は $x = \pm 1$, $-1/\lambda_2$ の 3 個の特異点をもつ。 $x = \pm 1$ は第 1 図の B , D 点に相当する。完全なる環状かくでは $x = -1/\lambda_2$ の点は考える領域内には存在しない。まず $x = 1$ の点附近の解を幅級数の形で求める。

すなわち $\xi = 1 - x$ とすれば (6a) 式は次のようになる。

$$\xi(2 - \xi)(c - \xi) d^2 y/d\xi^2 + \{c - (c - 1)\xi\} dy/d\xi + (1 + iT)(1 - \xi)y = 0 \dots (6b)$$

ただし $c = 1 + 1/\lambda_2$

$$\text{今 } y = \xi^\gamma \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \xi^n \right)$$

とおけば $c \neq 0$ なるとき $\gamma = 0, 1/2$ である。 $c = 0$ は今問題にしている完全な環かくの場合起らない条件である。

第 1 種の解 $y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \xi^n$ の係数 A_n の関係式は、 $R = 1/c$ を用いて次のように整理される。

$$\left. \begin{aligned} (n+1)(2n+1)A_{n+1} &= \{n^2 + (2n^2 - 3n - 1)R \\ &\quad - iT R\} A_n - (n^2 - 3n + 1 - iT) R \cdot A_{n-1} \dots (7) \end{aligned} \right\}$$

今 $A_n = a_n + iT b_n$, したがって $y_1 = y_R + iT y_I$ とおけば

$$y_R = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi^n, \quad y_I = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \xi^n$$

となり、係数 a_n , b_n は

$$\left. \begin{aligned} (n+1)(2n+1)a_{n+1} &= \{n^2 + (2n^2 - 3n - 1)R\} a_n \\ &\quad + RT^2 b_n - (n^2 - 3n + 1) R a_{n-1} - RT^2 b_{n-1}, \\ (n+1)(2n+1)b_{n+1} &= \{n^2 + (2n^2 - 3n - 1)R\} b_n \\ &\quad - R a_n - (n^2 - 3n + 1) R b_{n-1} + R a_{n-1} \end{aligned} \right\} \dots (7a)$$

によって計算される。かん数 y の数値を系統的に算出する目的にてさらにこれらの係数を

$$A_n = \{2^n/(2n)!\} (\alpha_n + iT \beta_n)$$

のようにあらわした。 α_n , β_n は R , T^2 を含んでいて、 n が 2 進むごとに T^2 の次数が 1 だけ上る。

第 2 種の解に対しては $y = z \cos \varphi$ として (6b) 式を変換すれば

第 1 表 (a) 第 1 種の解の係数

$\frac{n}{m}$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7
0	1	-1							0	-1						
1			2	2	18	288	7 200	259 200			3					
2				2	4	126	4 032	165 600				1	-8	-90	-1 728	-50 400
3					16	52	3 604	185 436					6	-144	-2 646	-69 696
4						304	1 448	177 932						98	-4 748	-130 762
5							10 336	67 624							3 028	-246 912
6								547 808								150 148
7																
2			-1	2	18	288	7 200	259 200								
3				2	4	126	4 032	165 600				1	-8	-90	-1 728	-50 400
4					17	32	3 374	181 368					6	-144	-2 646	-69 696
5						329	484	162 976						97	-4 708	-130 412
6							11 284	8 094							2 969	-243 048
7								601 080								146 073
4					1	-20	-230	-4 068								
5						25	-964	-14 956						-1	.40	350
6							947	-59 460							-59	3 864
7								53 160								-4 074
6							-1	70								
7								-112								1

第1表 (b) 第 2 種の解の係数

$T^n R^n$	$\bar{\alpha}_0$	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\alpha}_3$	$\bar{\alpha}_4$	$\bar{\alpha}_5$	$\bar{\alpha}_6$	$\bar{\alpha}_7$	$\bar{\beta}_0$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$	$\bar{\beta}_3$	$\bar{\beta}_4$	$\bar{\beta}_5$	$\bar{\beta}_6$	$\bar{\beta}_7$
n	m															
0	0	1	1	4	36	576	14 400	518 400	25 401 600	0						
	1		-2	-6	-48	-720	-17 280	-604 800	-29 030 400	-1	-2	-12	-144	-2 880	-86 400	-3 628 800
	2			2	14	230	6 036	226 728	11 489 832		3	15	216	5 400	-3 456	9 979 200
	3				8	100	2 936	124 988	6 976 656			10	68	1 650	72 492	4 299 624
	4					104	2 032	94 900	6 007 588				122	1 046	40 110	2 976 606
	5						2 704	76 040	5 203 176					3 068	31 624	1 814 160
	6							116 272	4 447 440						129 220	1 550 772
	7								7 441 408							8 153 808
2	2			-1	-1	14	636	28 008	1 570 632							
	3				-1	28	1 136	47 228	2 440 656				1	-4	-150	-5 268
	4					-3	757	44 750	2 588 990				14	-214	-9 570	-425 394
	5						44	31 606	2 658 882					367	-11 542	-679 674
	6							4 960	1 958 616						15 737	-825 903
	7								446 660							1 002 208
	7															
4	4					1	-15	-470	-16 598							
	5						40	-1 234	-49 494					-7	34	966
	6							2 087	-107 367						-83	4 725
	7								149 305							-7 399
6	6							-1	63							
	7								-147							1

$$\xi(2-\xi)(c-\xi)d^2z/d\xi^2 + \{3c - (1+3c)\xi + 2\xi^2\}dz/d\xi + \{2-c-\xi+iT(1-\xi)\}z=0 \dots\dots\dots (8)$$

となり、解 $z=1+\sum_{n=1}^{\infty} B_n \xi^n$ とすればこの解からえられる y は前の $\gamma=1/2$ に対する解 y_2 に相当するものである。係数 B_n の関係は

$$(n+1)(2n+3)B_{n+1} = \{(n+1)^2 + (2n^2 - n - 2 - iT)R\}B_n - (n^2 - n - 1 - iT)R B_{n-1} \dots\dots (9)$$

となる。 A_n の場合と同様に

$B_n = \bar{a}_n + iT\bar{b}_n = \{2^n/(2n+1)!\}(\bar{\alpha}_n + iT\bar{\beta}_n)$ として係数のようすを調べた (第1表)。解 z は

$$z_R = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \xi^n, \quad z_I = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \xi^n$$

として計算されることも前の場合同様である。

係数 $a_n, b_n, \bar{a}_n, \bar{b}_n$ は n が十分大きくなるとその逐次の係数比が $1/2$ になる。これは $\xi=1$ の点 (C点) は B 点に最も近い特異点 D のちょうど中間に位することに対応する。このことはこの幅級数解は第1図の $\widehat{BC}$ の領域のかん数値を実際に計算することができる見込みを与える。

(ii) $x=-1$ 附近の解 この場合 $\bar{\xi}=1+x$ として (6a) 式を書きかえれば (6b) 式と全く同じ形の式がえられる。ただしこのときの c は $1-1/\lambda_2$ である。 $\widehat{CD}$ においては $\varphi < 0$ であるから $\bar{\xi}=1-\sin|\varphi|$ である。今 $\widehat{CD}$ を A 軸に対して対称な $\widehat{B'C'}$ と考え、環半径 a を O 点の座標と考えると脊面かく $\widehat{CD}$ は a が負の値をもった $\widehat{C'D'}$ を考えることと全く同じである。 $x=-1$ の点 D はこのように考えた $\widehat{B'C'}$ の $x=+1$ の点に相当する。一般に円環かくの問題はかくの主要部 $\widehat{BC}$ を $a=-\infty$ より $+\infty$ まで変動させることによってすべての場合を実現することができる。

る。 $|\lambda_2| > 1$ なるときかくの主要部は中心軸 A と交叉する。この交叉かくの中心が第3の特異点 $x=-1/\lambda_2$ である。また $\lambda_2=-1$ なるとき主要部は中心軸 B 点において接する。これは前述の $c=0$ の場合である。これらの かく についてはここでは述べない⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

(iii) 内圧 p を受ける場合の特解 かく面に圧力 p が働くときは必然的に かく端縁 には軸方向荷重が作用する。この場合前述の主要部全領域にわたる解を求めるには C 点においてかん数 U が ∞ となって工合が悪いが、

$$\eta_s = (ar_1/TD)(\eta_\varphi + A \cot \varphi) \dots\dots\dots (10)$$

とし、

$$L(\cot \varphi) = \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \left\{ \frac{2}{\lambda_2 \sin \varphi} + \frac{1}{1 + \lambda_2 \sin \varphi} \right\} + \frac{\lambda_2 \cos \varphi}{1 + \lambda_2 \sin \varphi}$$

の關係を用いて (2) 式を整理し、さらに

$$\eta_\varphi = z_\varphi \cos \varphi / (1 + \lambda_2 \sin \varphi)$$

とすれば次の非同次方程式がえられる。

$$\xi(2-\xi)(c-\xi)d^2z_\varphi/d\xi^2 + \{3c - (1+3c)\xi + 2\xi^2\}dz_\varphi/d\xi + \{2-c-\xi+iT(1-\xi)\}z_\varphi + \lambda_2\{1-\xi+iT(c-\xi)\}A + \lambda_2(p r_1/2) = 0 \dots (11)$$

この式の同次式は (8) 式と同じである。この解 z_φ を前同様

$$z_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \xi^n$$

とすれば係数 K_n の關係は (9) 式と同じである。ただ K_1, K_2 は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (1-R)K_1 &= (1/3)\{-R(R+iT)A - R^2(p r_1/2)\} \\ (1-R)K_2 &= (1/30)[\{-R+R^2 - T^2 R + iT(-4 + 4R+R^2)\}RA + (-4R+R^2+iTR)R(p r_1/2)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

第2表 内圧を受ける場合の特解の係数

		$AZ_p = \frac{AZ_y}{1-R}, \quad A\bar{Z}_p = -AR \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!} (\alpha_n + iT \cdot A\beta_n)$												$pZ_p = \frac{pZ_y}{1-R}, \quad p\bar{Z}_p = -\left(\frac{pR}{2}\right) R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!} (p\alpha_n + iT \cdot p\beta_n)$											
$\frac{T}{\pi}$	$\frac{R}{\pi}$	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	$p\alpha_1$	$p\alpha_2$	$p\alpha_3$	$p\alpha_4$	$p\alpha_5$	$p\alpha_6$	$p\beta_1$	$p\beta_2$	$p\beta_3$	$p\beta_4$	$p\beta_5$	$p\beta_6$
0	0							1	4	36	576	14400	518400	1	4	36	576	14400	518400	0					
	1	1	1	9	144	3600	129600		-4	-30	-432	-10080	-345600	-1	-3	0	720	43200		-1	-3	0	720	43200	
	2		-1	-15	-228	-5520	-194400		-1	-18	-214	-4522	-140472		-4	2	1238	75528			-3	0	1080	69120	
	3			-4	-154	-3838	-137268			-3	-157	-3465	-102578			-52	336	63240				-35	167	51324	
	4				-52	-3720	-138024				-35	-3759	-124886				-1352	20116					-858	9672	
	5					-1352	-154292					-858	-155090					-58136						-35542	
6						-58136						-35542													
2	1		1	3	0	-720	-43200									-1	2	158	6408						
	2			0	-12	-840	-47520			-1	2	158	6408			-1	2	158	6408						
	3			-1	-11	-225	-24432				-13	135	9744				-16	156	11400				1	-13	-516
	4				-18	-339	-5214				1	-338	6842					-451	9284				42	-1128	-2257
	5					-451	-15927					42	-14608						-20251						
	6					-20251						2257													
4	3				-1	68	516																		
	4					-94	1050						-32					1	-32						
	5					1	-2094						82						85						-1
	6						85						-1												
	5						1																		
	6	5						1																	

$K_n = \{2^n/(2n+1)!\} (A\alpha_n + iT \cdot A\beta_n + p\alpha_n + iT \cdot p\beta_n)$
 とした場合の係数の関係を第2表に要約する。なお、
 平板その他との接続により中心部に穴のない場合、 A
 $= pa/2$ となる。(第2表正誤本誌 72 ページ参照)

$\eta_{2R} = \pi/2 - \varphi$, その他のかん数は容易に求められる。

	η_{1R}	η_{1I}	η_{2R}	η_{2I}
η	1	0	$\pi/2 - \varphi$	0
η'	0	0	-1	0

3. 張合力, 張合モーメントおよび変位

$\xi=0$ において y と η との値を等しくさせることを
 考えて同次方程式の解を

$$\eta_{1R,I} = y_{R,I} (1 - R\xi), \quad \eta_{2R,I} = z_{R,I} \cos \varphi / (1 - R\xi) \quad \dots\dots\dots (13)$$

とし, また非同次式の特解については $\bar{z}_\varphi = (1-R)z_\varphi$
 を考えて

$$\eta_{\varphi R,I} = \bar{z}_{\varphi R,I} \cos \varphi / (1 - R\xi) \quad \dots\dots\dots (14)$$

とすれば, これらの φ についての一次微係数は

$$\left. \begin{aligned} \eta'_{1R,I} &= -(R\eta_{1R,I} + \dot{y}_{R,I}) \cos \varphi / (1 - R\xi), \\ \eta'_{2R,I} &= -\{\tan \varphi + R \cos \varphi / (1 - R\xi)\} \eta_{2R,I} \\ &\quad - \cos^2 \varphi \cdot \dot{z}_{R,I} / (1 - R\xi), \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\eta'_{\varphi R,I} = -\{\tan \varphi + R \cos \varphi / (1 - R\xi)\} \eta_{\varphi R,I} - \cos^2 \varphi \cdot \dot{z}_{\varphi R,I} / (1 - R\xi) \quad \dots\dots\dots (16)$$

のようになる。 $d\eta/d\varphi = \eta'$, $dy/d\xi = \dot{y}$ と略記す。

$R=0$ に対する η の値を調べておくことは補間によ
 りかん数値を求める場合に必要である。(この解は薄肉
 円筒の曲げの場合にも利用される。)

$$(z_R)_{\xi=1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (n!)^2 / (2n+1)! = \pi/2.$$

また (15) 式より $\eta_{2R}' = -1$ である。したがって

第2図 (a) かん数 η_I

第2図 (b) かん数 η

η かん数のようすを示すため、一例を第2図 (a) (b) に示す。

以上の η かん数より基本方程式の解 ϑ , U は (3), (10) 式より次式で計算される。

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= C_1 \eta_{1R} + C_2 \eta_{1I} + C_3 \eta_{2R} + C_4 \eta_{2I} \\ &\quad + (ar_1/D)(A\eta_{\varphi I} + \nu\eta_{\varphi I}), \\ U_{\varphi} &= C_1(\nu\eta_{1R} - T^2\eta_{1I}) + C_2(\eta_{1R} + \nu\eta_{1I}) \\ &\quad + C_3(\nu\eta_{2R} - T^2\eta_{2I}) + C_4(\eta_{2R} + \nu\eta_{2I}) \\ &\quad + A\eta_{\varphi R} + \nu\eta_{\varphi R} + \nu(A\eta_{\varphi I} + \nu\eta_{\varphi I}). \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

したがってせん断力 Q は U の定義より直ちに、また N_{φ} は第1図より、 N_{θ} はかく要素の力のつり合式より求められる。 M_{φ} , M_{θ} と ϑ との関係はよく知ら*

* れている。半径方向の変位 k , 軸方向の変位 l については

$$\begin{aligned} k &= r(N_{\theta} - \nu N_{\varphi})/Eh, \quad \vartheta = (l' \cos \varphi - k' \sin \varphi)/r_1 \\ \text{の関係より求められる。これらの結果を次に要約する。} \\ Q &= U_{\varphi} \sin \varphi / (1 + \lambda_2 \sin \varphi) + A \cos \varphi / (1 + \lambda_2 \sin \varphi), \\ N_{\varphi} &= -U_{\varphi} \cos \varphi / (1 + \lambda_2 \sin \varphi) + A \sin \varphi / (1 + \lambda_2 \sin \varphi) \\ &\quad + (pr_1/2) \{1 + 1/(1 + \lambda_2 \sin \varphi)\}, \\ N_{\theta} &= -U_{\varphi}' / \lambda_2 + pr_1/2, \\ M_{\varphi} &= -(D/r_1) \{ \vartheta' + \nu \lambda_2 \cos \varphi \cdot \vartheta / (1 + \lambda_2 \sin \varphi) \}, \\ M_{\theta} &= -(D/r_1) \{ \nu \vartheta' + \lambda_2 \cos \varphi \cdot \vartheta / (1 + \lambda_2 \sin \varphi) \}, \\ k &= (a/Eh) [\nu U_{\varphi} \cos \varphi - U_{\varphi}' / (1 + \lambda_2 \sin \varphi) \\ &\quad - \nu A \sin \varphi + (pr_1/2) \{1 - 2\nu + (1 - \nu) \lambda_2 \sin \varphi\}, \\ l' &= r_1 \vartheta \cos \varphi + \nu (a/Eh) (U_{\varphi} \sin \varphi)' \\ &\quad - (a/Eh) U_{\varphi} \{1 + \nu - 1/(1 + \lambda_2 \sin \varphi)\} \cos \varphi \\ &\quad - (a/Eh) A \{ \cos \varphi + \varphi / \lambda_2 - 1/\lambda_2 (1 + \lambda_2 \sin \varphi) \} \\ &\quad - (a/Eh) (pr_1/2) \{ (1 - \nu) \lambda_2 \cos \varphi \\ &\quad - \varphi + 1/(1 + \lambda_2 \sin \varphi) \}. \end{aligned}$$

4. 境界条件

第 3 図

$\xi=0$ における η かん数値よりこの点 B における条件は次表のようになる。

	ϑ	M_{φ}	Q	k
η_1	C_1	0	$(\nu C_1 + C_2)REh/(T^2 + \nu^2)$	0
η_2	0	$C_3 \cdot D/r_1$	0	$(\nu C_3 + C_4)r_1/R(T^2 + \nu^2)$

第3表 境界条件

	$\varphi=0$	$\varphi=\varphi_0$	$\varphi=\pi/2$
ϑ	ϑ_C	ϑ_0	ϑ_B
ϑ'	$-(r_1/D)M_C - \nu\lambda_2\vartheta_C$	$-(r_1/D)M_{\varphi_0} - \nu\lambda_2\vartheta_0\cos\varphi_0/(1 + \lambda_2\sin\varphi_0)$	$-(r_1/D)M_B$
U_{φ}	$pr_1 - N_C$	$(1 + \lambda_2\sin\varphi_0)H_0 + (pr_1/2)(2 + \lambda_2\sin\varphi_0)\cos\varphi_0$	$(1 + \lambda_2)Q_B$
U_{φ}'	$\lambda_2[(pr_1/2) - Ehk_C/a - \nu N_C]$	$\lambda_2[(pr_1/2) - Ehk_0/a(1 + \lambda_2\sin\varphi_0) - \nu N_{\varphi_0}]$	$\lambda_2(pr_1/2) - \nu\lambda_2N_B - EhRk_B/a$

これより解 η_1 によって生ずる変形は $\widehat{BC}$ と $\widehat{BE}$ とにおけるものが B 点に対して点対称であり、 η_2 によって生ずる変形は $\widehat{OB}$ に対して線対称であるものに相当することを知る。前者を奇の変形、後者を偶の変形と名づけることとする。非同次式の特解 η_{φ} によるものは偶の変形条件をもっている。

主要部に対する境界条件を第3表に要約する。

5. 数値計算例

主要部の偶、奇の変形の計算結果の二例を第4, 5図に示す。これは C 点に N_C なる半径方向力を作用させた場合である。また完全に密閉された環かくが内圧

を受ける場合の結果を第6図に示す。この場合の変形は偶、軸方向張合力は不静定である。内圧の効果は膜理論による解を重ねたもので、膜理論の意義もここにあると主張される場合⁽¹⁾もあるが、均等圧を受ける場合にこのことが厳密に正しいのは(1)式の Φ が0になる場合で、この条件は球かくおよび円筒の場合成

立つ。

円環かくが構造の一部をなしているような場合には適当な境界条件をもって接続すればよいであろう。円筒と中心に穴のない円板との間に円環かくのある場合、この円環かくが接続部で満足すべき条件は $\varphi=0$ において

$$\bar{\vartheta} = \vartheta / (r_1 a N_c / D), \quad \bar{M}_\varphi = 10^2 \times M_\varphi / (a N_c), \quad \bar{M}_\theta = 10^3 \times M_\theta / (a N_c), \quad \bar{N}_\varphi = N_\varphi / N_c, \\ \bar{N}_\theta = 10^{-1} \times N_\theta / N_c, \quad \bar{Q} = Q / N_c$$

第4図 半径方向荷重 N_c による奇の変形

第5図 半径方向荷重 N_c による偶の変形

$$\bar{Q} = Q / (p r_1 / 2), \quad \bar{N}_\varphi = (N_\varphi - N_{m\varphi}) / (p r_1 / 2), \\ \bar{N}_\theta = (N_\theta - N_{m\theta}) / (p r_1 / 2), \quad \bar{M}_{\varphi,\theta} = M_{\varphi,\theta} / (p r_1 a / 2), \\ N_{m\varphi,\theta} \text{ は膜理論による張合力}$$

第6図 内圧を受ける密閉円環かく

第7図 平板、円環、円筒の接続(内圧 p)

$$\lambda_2 U_\varphi - U_\varphi' = \lambda_2 (pr_1/2),$$

$$\lambda_2 \vartheta - \vartheta' = (1/4\lambda_2)(r_1 a/D)(pr_1/2).$$

$\varphi = \pi/2$ において

$$(\nu - \ell^2)C_1 + C_2 + t\sqrt{2/R} \cdot C_3 = 0,$$

$$-\ell^2\sqrt{2RC_1} + (\nu + \ell^2)C_3 + C_4 = (2 + \lambda_2)(ar_1/D)(pr_1/2)$$

である。ただし

$$t = (T^2 + \nu^2)^{1/4} = \{12(1 - \nu^2)\lambda_1^2\}^{1/4}$$

である。計算例を第 7 図に示す。

6. 結 言

Love-Meissner 理論を適用して円環かくの基本方程式を出し、その幅級数による解法を述べた。

(1) 主要部 $\widehat{BC}$ を考えることによってすべての場合をとくことができる。(2) 同次方程式の第 1 種の解は奇の変形、第 2 種の解は偶の変形に対応する。

(3) かく面に均等圧を受ける場合の特解を求めた。この解は偶の変形の特性をもつ。(4) 数値計算結果の二三のものを最後に示した。

一般円環かくとしてはドーナツ形以外のかさ形あるいは紡錘形が考えられるが、これらについては全然触れなかった⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾。設計計算等に利用するためには η -かん数値表の作成が望ましいが、このことは本論文

に述べた解法に普通の数値計算手段をもってしては容易なことではない。系統的に計算を実行する準備として係数の整理、計算様式の整序等が必要である。目下筆者は η かん数値の蓄積に努力しつつある。

終りにのぞみ筆者を常にはげまして下さる丹羽重光先生に心からの感謝の意を表します。また本研究の途中兼重寛九郎先生にいろいろ御配慮をわづらわしたことを深く感謝致します。数値計算の一部を助けていただいた河西明君の努力に感謝します。

注：一

- (1) 昭和 26 年 4 月 4 日 第 28 期定時総会議演会において講演、原稿受付 昭和 27 年 10 月 7 日。
- (2) 正員、横浜国立大学。
- (3) H. Wisler, "Festigkeitsberechnung von Ringflächenschalen" Diss. Zürich (1916).
- (4) K. Stange, Ing.-Arch., Bd. 2, S. 47 (1931).
- (5) 鬼頭, 慶応大学工学部研究報告, 1 巻 3 号別冊 (昭 23).
- (6) 大井, 日本応用力学会講演 (昭 25).
- (7) E. Reissner, Proc Symposia in Appl. Math., Vol. III, p. 27 (1950).
- (8) R. A. Clark, T. L. Gilroy and E. Reissner, Appl. Mech., J. Vol. 19, No.1, p. 37 (1952).
- (9) 中村, Proc. 1st. Japan Nat. Congress Appl. Mech., p. 87 (1951).
- (10) 中村, 横浜国立大学紀要, 2 巻 (昭 27).
- (11) G. W. Watts and W. R. Burrows, Appl. Mech., J. Vol. 16, No.1, p.55 (1949).

539.384.6 : 621.532.1

圧力容器の応力の計算 (第 1 報)⁽¹⁾

中 村 康 治⁽²⁾

Stress Calculation of Pressure Vessel Heads (Report I)

by Kōji NAKAMURA

This paper is concerned with the stress calculation of pressure vessels, which are made up by connecting spherical-, toroidal- and cylindrical shells. Love-Meissner's theory is applied to these shells. The equations of connection of such shells may be obtained by assuming the continuity of the angular displacement ϑ , radial displacement k , meridional stress resultant N_φ and meridional stress couple M_φ at the junction. Some numerical calculations are given.

1. 結 論

圧力容器の隅部および端板における応力については理論的にも実験的にもその研究は少くない。特に最近においてはひずみ計の進歩により精密な応力測定が行われている。ここに報告する試みは曲面板の曲げ理論による解法をできるだけ精密に用いて不連続部分を接続し、張合および変形を求めようとするものである。圧力容器端板部構造としては最も普通である球面かく一円環かく一円筒かくの接続により形成されるものを

まずとり上げた。これら 3 種の曲面板はいずれもメリディアン断面の曲率が一定であり、したがってその断面の曲率の不連続は接続部にある。

2. 曲面板に対する基本方程式

中心軸に対して対称な曲面板のメリディアン断面を第 1 図に示す。

r = 断面 φ までの半径方向距離。

r_1, r_2 = 曲面板の主曲率,

h = 板厚,