539.384.4 : 624.073.12.075.4

周辺上に局部的な等分布荷重をうける長方形板の座屈 (第2報)⁽¹⁾八 卷 昇⁽²⁾Buckling of Rectangular Plates Under Locally Distributed Forces
(2nd Report)

by Noboru YAMAKI

In this report, the buckling problem of rectangular plates under loads distributed uniformly along a certain range of the two opposite edges is solved by using the so-called integration method. For the boundary conditions of the plate, the following three cases are considered, namely, the loaded edges are simply supported and the others are simply supported, clamped or free. Of these, the former two cases have been treated in the previous report, and it is ascertained that the results in each case are in good coincidence. Numerical calculations for the buckling load are carried out and results thus obtained are graphed and discussed.

緒 言

前報においては、相対する二辺上に局部的な等分布荷重をうける長方形板の座屈問題を、Timoshenkoの方法にならって近似的に解いたが、本報においては座屈の際の平衡方程式を直接積分することによって解を導いた。今回も前と同様、長方形板内の応力分布に関しては簡単な仮定に立脚しているため、荷重の幅が小となるに従い誤差の生ずるのをまぬかれないが、一様分布荷重の場合には厳密解と完全に一致する。長方形板の境界条件としては、荷重辺が単純支持で他の二辺がそれぞれ(1)単純支持、(2)固定、(3)自由の3種の場合を考え、そのおのおのについて数値計算並に検討を行った。特に(1)(2)の場合については、前報において既に取り扱っているのものでそれとの比較を行い、また(3)の場合については今まで発表されたものがないように思われるのでやや詳しく論じた。

1. 基礎式

座標軸の原点を長方形板の中心にとり、 x, y 両軸をそれぞれ長さ a, b の二辺と平行するように定める。 x 軸に平行な二辺上に、 l なる幅に亘って等分布荷重 $p = P/l$ (P は全荷重) が板の平面内に図のごとく作用する。長方形板の面分を、荷重状態

第 1 図

によって図のごとく I, II, III に分ち、その応力分布を Timoshenko⁽³⁾ および Sommerfeld⁽⁴⁾ にならって、簡単に面分 I のみが一様圧縮の状態にあるものと仮定する。

今、式を無次元化するため

$$\xi = \frac{2x}{b}, \quad \eta = \frac{2y}{b}, \quad \alpha = \frac{l}{a}, \quad \beta = \frac{a}{b} \quad \dots\dots\dots (1)$$

とおき、長方形板のたわみを w とすれば、座屈の際の平衡方程式は上の仮定によって、面分 I に対しては

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \varphi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

面分 II, III に対しては

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。ただし

$$\varphi^2 = \frac{pb^2}{4D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots\dots\dots (4)$$

で、 D は板の曲げ剛性、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比、 h は板厚である。

次に w の満足すべき条件について考える。まず各面分はその境界 $x = \pm l/2$ において幾何学的並びに力学的に連続でなければならぬから、 $\xi = \pm \alpha\beta$ において板のたわみ、傾斜、曲げモーメント、およびせん断力に対応して次のものが連続となるを要する。

$$w, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} \quad \dots\dots\dots (5)$$

更に w は長方形板の境界 $x = \pm a/2, y = \pm b/2$ において与えられた境界条件を満足せねばならぬから次の諸条件を得る。

$$\xi = \pm \beta : \begin{cases} w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0 \text{ (単純支持の場合)} \cdots \cdots \cdots (6) \\ w=0, \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \text{ (固定の場合)} \cdots \cdots \cdots (7) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} = 0 \text{ (自由の場合)} \cdots \cdots \cdots (8) \end{cases}$$

$$\eta = \pm 1 : w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \text{ (各場合共通)} \cdots \cdots \cdots (9)$$

なお荷重並びに境界条件が y 軸に関して対称であることから次の関係が得られる。

$$w(-\xi, \eta) = w(\xi, \eta) \cdots \cdots \cdots (10)$$

問題はこれらの条件の下に、微分方程式 (2) の固有値 φ^2 の最小値を求めるにある。

さて長方形板は荷重方向に n 半波形 ($n=1, 2, 3, \dots$) に座屈するものとし、各面分のたわみ w_i ($i=1, 2, 3$) を (9) を考慮して次のごとく仮定する。

$$w_i = X_i(\xi) \sin x(\eta+1) \left. \begin{matrix} x = n\pi/2 \end{matrix} \right\} \cdots \cdots \cdots (11)$$

$X_i(\xi)$ は ξ のみのかん数である。(11) を (2) に代入すれば

$$\frac{d^4 X_i}{d \xi^4} - 2x^2 \frac{d^2 X_i}{d \xi^2} + x^2(x^2 - \varphi^2) X_i = 0 \quad *$$

$$-A \cos \mu_1 \alpha \beta - B \cosh \mu_2 \alpha \beta + E \cosh x \alpha \beta + F \sinh x \alpha \beta + G \alpha \beta \cosh x \alpha \beta + H \alpha \beta \sinh x \alpha \beta = 0 \cdots \cdots \cdots (15)$$

$$A \mu_1 \sin \mu_1 \alpha \beta - B \mu_2 \sinh \mu_2 \alpha \beta + E x \sinh x \alpha \beta + F x \cosh x \alpha \beta + G (\cosh x \alpha \beta + x \alpha \beta \sinh x \alpha \beta) + H (\sinh x \alpha \beta + x \alpha \beta \cosh x \alpha \beta) = 0 \cdots \cdots \cdots (16)$$

$$A \varphi \cos \mu_1 \alpha \beta - B \varphi \cosh \mu_2 \alpha \beta + 2 G \sinh x \alpha \beta + 2 H \cosh x \alpha \beta = 0 \cdots \cdots \cdots (17)$$

$$-A \varphi \mu_1 \sin \mu_1 \alpha \beta - B \varphi \mu_2 \sinh \mu_2 \alpha \beta + 2 G x \cosh x \alpha \beta + 2 H x \sinh x \alpha \beta = 0 \cdots \cdots \cdots (18)$$

また (11), (14) を用いて境界条件から次の関係式が得られる。

(a) 単純支持の場合

$$E \cosh x \beta + F \sinh x \beta + G \beta \cosh x \beta + H \beta \sinh x \beta = 0 \cdots \cdots \cdots (19)$$

$$G \sinh x \beta + H \cosh x \beta = 0 \cdots \cdots \cdots (20)$$

(b) 固定の場合

$$E \cosh x \beta + F \sinh x \beta + G \beta \cosh x \beta + H \beta \sinh x \beta = 0 \cdots \cdots \cdots (21)$$

$$E x \sinh x \beta + F x \cosh x \beta + G (\cosh x \beta + x \beta \sinh x \beta) + H (\sinh x \beta + x \beta \cosh x \beta) = 0 \cdots \cdots \cdots (22)$$

(c) 自由の場合

$$E x (1-\nu) \cosh x \beta + F x (1-\nu) \sinh x \beta + G \{2 \sinh x \beta + (1-\nu) x \beta \cosh x \beta\} + H \{2 \cosh x \beta + (1-\nu) x \beta \sinh x \beta\} = 0 \cdots \cdots \cdots (23)$$

$$E x (1-\nu) \sinh x \beta + F x (1-\nu) \cosh x \beta + G \{-(1+\nu) \cosh x \beta + (1-\nu) x \beta \sinh x \beta\} + H \{-(1+\nu) \sinh x \beta + (1-\nu) x \beta \cosh x \beta\} = 0 \cdots \cdots \cdots (24)$$

さて w の 6 個の未定定数 $A B E F G H$ に対し、式は連続の条件から 4, 各境界条件から 2, 合計 6 ある。これらの定数がすべて 0 とならないためにはその係数に関する行列式が 0 となるを要する。この行列方程式から求めんとする座屈荷重 p および荷重方向の半波数 n が定まる。

2. 両側辺が単純支持の場合

連続条件 (15)~(18) とこの場合の境界条件・(19)

* この式の一般解は、 $\varphi \geq x$ として

$$\mu_1 = \sqrt{x(\varphi-x)}, \mu_2 = \sqrt{x(\varphi+x)} \cdots \cdots \cdots (12)$$

とおけば、(10) を考慮して次のごとく表わされる。

$$X_1 = A \cos \mu_1 \xi + B \cosh \mu_2 \xi \cdots \cdots \cdots (13)$$

次に (11) を (3) に代入すれば、

$$\frac{d^4 X_i}{d \xi^4} - 2x^2 \frac{d^2 X_i}{d \xi^2} + x^4 X_i = 0, i=2, 3.$$

これから (10) を考慮して次の一般解が得られる。

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= E \cosh x \xi + F \sinh x \xi + G \xi \cosh x \xi \\ &\quad + H \xi \sinh x \xi \\ X_3 &= E \cosh x \xi - F \sinh x \xi - G \xi \cosh x \xi \\ &\quad + H \xi \sinh x \xi \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (14)$$

(11), (13), (14) を用いて連続条件は次のごとく表わされる。

(20) とから $A B E F G H$ の係数に関する行列式を作り、これを 0 とおくと次式が得られる。

	A	B	E	F	G	H
(15)	$-C_1$	$-C_2$	c'	s'	$\alpha \beta c'$	$\alpha \beta s'$
(16)	$\mu_1 S_1$	$-\mu_2 S_2$	$x s'$	$x c'$	$c' + x \alpha \beta s'$	$s' + x \alpha \beta c'$
(17)	φC_1	$-\varphi C_2$	0	0	$2 s'$	$2 c'$
(18)	$-\varphi \mu_1 S_1$	$-\varphi \mu_2 S_2$	0	0	$2 x c'$	$2 x s'$
(19)	0	0	c	s	βc	βs
(20)	0	0	0	0	s	c

$$= 0 \cdots \cdots \cdots (25)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} s &= \sinh x\beta, \quad s' = \sinh x\alpha\beta, \quad S_1 = \sin \mu_1\alpha\beta, \quad S_2 = \sinh \mu_2\alpha\beta \\ c &= \cosh x\beta, \quad c' = \cosh x\alpha\beta, \quad C_1 = \cos \mu_1\alpha\beta, \quad C_2 = \cosh \mu_2\alpha\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

(25)を展開して整理すると

$$4(sc' - s'c)^2 \mu_1 \mu_2 S_1 S_2 - 4(ss' - cc')^2 x^2 C_1 C_2 - \{(\varphi + 4x)(sc' - s'c)(ss' - cc') + \varphi(1 - \alpha)x\beta\} \mu_1 S_1 C_2 \\ - \{(\varphi - 4x)(sc' - s'c)(ss' - cc') + \varphi(1 - \alpha)x\beta\} \mu_2 S_2 C_1 = 0 \dots\dots\dots (27)$$

荷重の幅の比 α , 長方形の二辺の比 β を与えると, (27)の未知数は x, φ のみとなるから, $n=1, 2, \dots$ と仮定して x を定めると φ が求まる. かくして得られた φ の最小値がこの場合の座屈荷重 p に対応し, そのときの n が荷重方向の半波数を与える.

一様分布荷重すなわち $\alpha=1$ の場合には, $s'=s$, $c'=c$, $c^2 - s^2 = c'^2 - s'^2 = 1$ を考慮すると (27) は $C_1 = 0$ となり, これから

$$\varphi = \frac{n\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2\beta^2} \right)$$

したがって前報同様 $\lambda = pb^2/\pi^2 D \dots\dots\dots (28)$

とおけば (4) から

$$\lambda \equiv \frac{4}{\pi^2} \varphi^2 = n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2\beta^2} \right)^2 \dots\dots\dots (29)$$

となり, 既知の式⁽⁶⁾と一致する. また集中荷重す*

* なわち $\alpha \rightarrow 0$ の場合には $c' = C_1 = C_2 = 1$, $s' = x\alpha\beta$, $S_1 = \mu_1\alpha\beta$, $S_2 = \mu_2\alpha\beta$ となるから

$$\psi = \varphi^2 \alpha \beta = Pb/4D \dots\dots\dots (30)$$

とおくと (27) から

$$\psi = \frac{2xc^2}{sc - x\beta} = \frac{2x}{\frac{s}{c} - \frac{x\beta}{c^2}}$$

したがって前報同様 $\chi = Pb/\pi D \dots\dots\dots (31)$

とおけば

$$\chi \equiv \frac{4}{\pi} \psi = \frac{4n}{\tanh \frac{n\pi\beta}{2} - \frac{n\pi\beta/2}{\cosh^2(n\pi\beta/2)}} \dots\dots\dots (32)$$

となり前報の結果と一致する.

なお前報と比較するため, 正方形すなわち $\beta=1$ において荷重の幅 α を種々に変えた場合の λ の値を示

第 1 表

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
λ_I	19.32	9.999	7.017	5.620	4.860	4.422	4.176	4.052	4.006	4.000
λ_T	19.35	10.002	7.019	5.620	4.863	4.422	4.176	4.052	4.006	4.000

すと第1表を得る. ただし λ_I は (27) から求めた値, λ_T は前に求めた値 (第4近似値) である. きわめてよく一致していることがわかる.

3. 両側辺固定の場合

連続条件 (15)~(18) とこの場合の境界条件 (21) (22) とから前と同様に行列方程式を作り, これを展開して整理すると次式が得られる.

$$4\{(sc' - s'c)(ss' - cc') + (1 - \alpha)x\beta\} \mu_1 \mu_2 S_1 S_2 - 4\{(sc' - s'c)(ss' - cc') - (1 - \alpha)x\beta\} x^2 C_1 C_2 \\ + [\varphi\{(1 - \alpha)^2 x^2 \beta^2 - (sc' - s'c)^2\} - 4x(sc' - s'c)^2 + 4x^2/\varphi] \mu_1 S_1 C_2 \\ + [\varphi\{(1 - \alpha)^2 x^2 \beta^2 - (sc' - s'c)^2\} + 4x(sc' - s'c)^2 + 4x^2/\varphi] \mu_2 S_2 C_1 = 0 \dots\dots\dots (33)$$

一様分布荷重の場合にはこの式から

$$\mu_1 S_1 C_2 + \mu_2 S_2 C_1 = 0$$

すなわち

$$\sqrt{x(\varphi - x)} \tan \sqrt{x(\varphi - x)} \beta$$

$$+ \sqrt{x(\varphi + x)} \tanh \sqrt{x(\varphi + x)} \beta = 0 \dots\dots\dots (34)$$

記号の差違を考慮するとこの式は Timoshenko の厳密解⁽⁶⁾と一致することが確かめられる. この式から求めた λ の値を前に求めた値 (第3近似値) と比較すると

第 2 表

β	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	∞
λ_I	20.13	10.93	7.687	5.183	3.585	2.733	2.236	1.921	1.000
λ_T	20.22	10.98	7.725	5.206	3.601	2.746	2.246	1.931	1.000

第2表を得る.

集中荷重の場合には (33) から

$$\psi = \frac{2x(sc + x\beta)}{s^2 - x^2\beta^2}$$

したがって

$$\chi = 2n \cdot \frac{\sinh n\pi\beta + n\pi\beta}{\sinh^2(n\pi\beta/2) - (n\pi\beta/2)^2} \dots\dots\dots (35)$$

となり前報の結果と一致する.

なお正方形において荷重の幅を逐次変えた時の λ の値を (33) から求めて, 前に得た値 (第3近似値) と比

第 3 表

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
λ_I	29.12	15.59	11.43	9.529	8.550	8.036	7.796	7.708	7.690	7.687
λ_T	29.23	15.65	11.46	9.557	8.572	8.059	7.820	7.739	7.725	7.725

較すると第3表を得る。第2表, 第3表に見るごとく
両者の値はだいたいよく一致することがわかる。

4. 両側自由の場合

この場合には荷重方向の半波数 n は常に 1, したが
って $\kappa = \pi/2$ となる。また今までの場合には $\varphi \geq \kappa$ で

$$\begin{aligned}
 & 4(1-\nu)\{(3+\nu)(sc'-s'c)(ss'-cc')-(1-\nu)(1-\alpha)\kappa\beta\}\mu_1\mu_2 S_1S_2 \\
 & -4(1-\nu)\{(3+\nu)(sc'-s'c)(ss'-cc')+(1-\nu)(1-\alpha)\kappa\beta\}\kappa^2 C_1C_2 \\
 & -[\varphi\{2(1+\nu)+(1-\nu^2)(sc'-s'c)^2+2(1-\nu)(ss'-cc')^2+(1-\nu)^2(1-\alpha)^2\kappa^2\beta^2\} \\
 & +4\kappa(1-\nu)\{2+(3+\nu)(sc'-s'c)^2\}+4\kappa^2(1-\nu)^2/\varphi]\mu_1 S_1C_2 \\
 & -[\varphi\{2(1+\nu)+(1-\nu^2)(sc'-s'c)^2+2(1-\nu)(ss'-cc')^2+(1-\nu)^2(1-\alpha)^2\kappa^2\beta^2\} \\
 & -4\kappa(1-\nu)\{2+(3+\nu)(sc'-s'c)^2\}+4\kappa^2(1-\nu)^2/\varphi]\mu_2 S_2C_1=0 \dots\dots\dots(36)
 \end{aligned}$$

次に $\varphi < \kappa$ の場合には

$$\left. \begin{aligned}
 \mu_1 &= \sqrt{\kappa(\varphi-\kappa)} = i\sqrt{\kappa(\kappa-\varphi)} \equiv i\mu_1' \\
 S_1 &= \sin \mu_1 \alpha \beta = \sin i\mu_1' \alpha \beta = i \sinh \mu_1' \alpha \beta \equiv iS_1' \\
 C_1 &= \cos \mu_1 \alpha \beta = \cos i\mu_1' \alpha \beta = \cosh \mu_1' \alpha \beta \equiv C_1'
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

の関係をもつことを (36) に代入して次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & 4(1-\nu)\{(3+\nu)(sc'-s'c)(ss'-cc')-(1-\nu)(1-\alpha)\kappa\beta\}\mu_1'\mu_2 S_1'S_2 \\
 & +4(1-\nu)\{(3+\nu)(sc'-s'c)(ss'-cc')+(1-\nu)(1-\alpha)\kappa\beta\}\kappa^2 C_1'C_2 \\
 & -[\varphi\{2(1+\nu)+(1-\nu^2)(sc'-s'c)^2+2(1-\nu)(ss'-cc')^2+(1-\nu)^2(1-\alpha)^2\kappa^2\beta^2\} \\
 & +4\kappa(1-\nu)\{2+(3+\nu)(sc'-s'c)^2\}+4\kappa^2(1-\nu)^2/\varphi]\mu_1' S_1'C_2 \\
 & +[\varphi\{2(1+\nu)+(1-\nu^2)(sc'-s'c)^2+2(1-\nu)(ss'-cc')^2+(1-\nu)^2(1-\alpha)^2\kappa^2\beta^2\} \\
 & -4\kappa(1-\nu)\{2+(3+\nu)(sc'-s'c)^2\}+4\kappa^2(1-\nu)^2/\varphi]\mu_2 S_2C_1'=0 \dots\dots\dots(38)
 \end{aligned}$$

α, β が与えられると (36) または (38) によって φ , したがって λ が定まる。計算の結果 (38) は α が 1
に近い場合のみ φ の実根をもつことがわかった。

一様分布荷重の場合には (38) から

$$\mu_1' S_1' C_2 \{\varphi + \kappa(1-\nu)\}^2 - \mu_2 S_2 C_1' \{\varphi - \kappa(1-\nu)\}^2 = 0$$

すなわち

$$\{\varphi + \kappa(1-\nu)\}^2 \sqrt{\kappa(\kappa-\varphi)} \tanh \sqrt{\kappa(\kappa-\varphi)} \beta - \{\varphi - \kappa(1-\nu)\}^2 \sqrt{\kappa(\varphi+\kappa)} \tanh \sqrt{\kappa(\varphi+\kappa)} \beta = 0 \dots\dots(39)$$

第 4 表

β	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	4.0	∞
λ	0.910	0.914	0.923	0.934	0.944	0.952	0.966	0.973	0.985	0.992

この式から, $\nu=0.3$ として β に対する λ の値を計
算して表示すると第4表を得る。特に $\beta \rightarrow 0$ すなわち
 y 方向の無限帯板の場合には (39) から

$$\varphi = \kappa \sqrt{1-\nu^2}, \lambda = 1-\nu^2$$

したがって座屈の際の全荷重 P は, 板の断面二次モ
ーメントを I とすれば

$$P = pa = (1-\nu^2) \frac{\pi^2 Da}{b^2} = \frac{\pi^2 Eah^3}{12b^2} = \frac{\pi^2 EI}{b^2} \dots\dots(40)$$

となり両端単純支持の棒の Euler 荷重に一致する。
また $\beta \rightarrow \infty$ すなわち x 方向の無限帯板の場合には
(39) から

$$\lambda = (1-\nu)\{3\nu-1+2\sqrt{2\nu^2-2\nu+1}\} \dots\dots\dots(41)$$

が得られる。 ν の種々の値に対応する λ の値を第5
表に示す。なおこの値が両側自由単純支持または固定の
場合の値 ($\lambda=1$) と異なるのは注目に値する。これは
座屈波形の差違に基づくものと思われる。

第 5 表

ν	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
λ	1.000	1.000	0.999	0.992	0.971	0.957

次に集中荷重の場合には (36) から

$$\psi = \frac{2\pi\{(1-\nu)(3+\nu)sc - (1-\nu)^2\pi\beta\}}{2(1+\nu) + (1-\nu^2)s^2 + 2(1-\nu)c^2 + (1-\nu)^2\pi^2\beta^2}$$

したがって

$$\chi = 2 \cdot \frac{(1-\nu)(3+\nu)\sinh \pi\beta - (1-\nu)^2\pi\beta}{2(1+\nu) + (1-\nu^2)\sinh^2 \frac{\pi\beta}{2} + 2(1-\nu)\cosh^2 \frac{\pi\beta}{2} + (1-\nu)^2\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)^2} \dots\dots\dots (42)$$

第 6 表

β	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	4.0	∞
χ	0.579	1.190	1.815	2.396	2.882	3.615	3.883	3.991	4.000

β に対する χ の計算値 ($\nu=0.3$ とする) を第 6 表に示す。

特に $\beta \rightarrow 0$ のときは (42) から $\chi = (1-\nu^2)\pi\beta$,
したがって

$$P = \chi \frac{\pi D}{b} = \frac{\pi^2 EI}{b^2}$$

となって棒の場合に一致し、また $\beta \rightarrow \infty$ のときは

$$\chi = \frac{4(1-\nu)(3+\nu)}{1-\nu^2+2(1-\nu)} = 4$$

となって、両側辺単純支持または固定の場合の値と一致する。

なお正方形において荷重の幅を逐次変えた場合の λ の値を (36) または (38) から求めて表示すると第 7 表を得る。ただし ν は 0.3 とする。

第 7 表

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
λ	9.210	4.649	3.137	2.383	1.928	1.621	1.396	1.220	1.077	0.952

結 言

荷重辺が単純支持で、他の二辺がそれぞれ単純支持、固定または自由の長方形板において、相対する二辺上に局所的な等分布荷重が作用する場合の座屈問題を直接平衡方程式を積分することによって解いた。この中始めの二つの場合は既に前報で取り扱っているが、ここで得られた結果とよく一致することを確認した。また第三の場合については未だ発表されたものを見ないようと思われるのでややくわしく論じた。

最後に終始御指導を賜った樋口盛一教授に深甚の謝意を表する。

注:-

- (1) 昭和 26 年 4 月 4 日 第 28 期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和 27 年 11 月 10 日。
- (2) 正員、東北大学高速力学研究所。
- (3) S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, p. 365.
- (4) A. Sommerfeld, Z. f. Math. u. Phys., Bd. 54, S. 113 (1907).
- (5) S. Timoshenko, 前掲書 p. 328.
- (6) 同上 p. 345.