し無視し得るから、略近的にこの関係式を

$$\sqrt{2gH} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{p_1}{H} \right] a_4 \psi(t) = v_2 a_2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

とおく。更にサージタンク水面に対して

$$A_0 \frac{dh}{dt} = v_3 a_3 \quad \dots\dots\dots (3)$$

が成立たなくてはならない。これらの方程式は未知数 $v_1, v_2, v_3, p_1, p_2, h$ に対する 6 個の方程式である。まず

$$\left\{ 1 + \frac{p_1}{2H} \right\} \psi(t) = \xi \quad \dots\dots\dots (4)$$

とおけば上の関係式より

$$v_1 = \frac{A}{a_1} \frac{dh}{dt} + \frac{a_4}{a_1} \sqrt{2gH} \xi$$

$$v_2 = \frac{a_4}{a_2} \sqrt{2gH} \xi, \quad v_3 = \frac{A}{a_3} \frac{dh}{dt}$$

が得られるから、これらの値を (1) から導びかれるところの関係式

$$p_1 = -\frac{l_1}{g} \frac{dv_1}{dt} - \frac{l_2}{g} \frac{dv_2}{dt}, \quad h = -\frac{l_1}{g} \frac{dv_1}{dt} - \frac{l_3}{g} \frac{dv_3}{dt}$$

に代入し、かつ整理すれば次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{d^2 h}{dt^2} + h + \beta \frac{d\xi}{dt} &= 0 \\ \lambda \frac{d^2 h}{dt^2} + \mu \frac{d\xi}{dt} + \frac{\xi}{\psi(t)} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし簡単のために

$$\alpha = \frac{A_0}{g} \left(\frac{l_1}{a_1} + \frac{l_3}{a_3} \right)$$

$$\beta = \frac{l_1}{g} \frac{a_4}{a_1} \sqrt{2gH} = \frac{l_1}{g a_1} Q_0$$

$$\lambda = \frac{l_1}{2gH} \frac{A_0}{a_1}, \quad \mu = \frac{a_4}{\sqrt{2gH}} \left(\frac{l_1}{a_1} + \frac{l_2}{a_2} \right)$$

$$= \frac{Q_0}{2gH} \left(\frac{l_1}{a_1} + \frac{l_2}{a_2} \right)$$

$$Q_0 = a_4 \sqrt{2gH}$$

とおいてある。更に (5) の両式から h を消去すれば

$$\frac{1}{\lambda} \left[\alpha \frac{d^2}{dt^2} + 1 \right] \left[1 - \frac{\xi}{\psi(t)} \right] + \left(\beta - \frac{\alpha \mu}{\lambda} \right) \frac{d^3 \xi}{dt^3} - \frac{\mu}{\lambda} \frac{d\xi}{dt} = 0$$

となるが、これは (4) により p_1 に関する次の第 3 階線型常微分方程式に書き直される。

$$-\frac{1}{2H\lambda} \left[\alpha \frac{d^2 p_1}{dt^2} + p_1 \right] + \left(\beta - \frac{\alpha \mu}{\lambda} \right) \left[\frac{\psi(t)}{2H} \frac{d^3 p_1}{dt^3} + \frac{3\psi'(t)}{2H} \frac{d^2 p_1}{dt^2} + \frac{3\psi''(t)}{2H} \frac{dp_1}{dt} + \left(1 + \frac{p_1}{2H} \right) \psi'''(t) \right] - \frac{\mu}{\lambda} \left[\frac{\psi(t)}{2H} \frac{dp_1}{dt} + \left(1 + \frac{p_1}{2H} \right) \psi'(t) \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

4. 直線的閉鎖の場合

導羽根の閉鎖が直線的に行われるなれば $\psi(t) = 1 - t/T$ であり、この場合は p_1 に対する常微分方程式 (6) は下記の形になる。ただし自変数として $x = 1 - t/T$ をとってある。

$$x \frac{d^3 p_1}{dx^3} + A \frac{d^2 p_1}{dx^2} + Bx \frac{dp_1}{dx} + Cp_1 = D \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし

$$A = 3 + \frac{\alpha T}{\beta \lambda - \alpha \mu}, \quad B = -\frac{\mu T^2}{\beta \lambda - \alpha \mu},$$

$$C = \frac{(T - \mu) T^2}{\beta \lambda - \alpha \mu}, \quad D = \frac{\mu T^2}{\beta \lambda - \alpha \mu} \cdot 2H,$$

とおく。常微分方程式 (7) は未知数 p_1 に関し第 3 階の線型常微分方程式であり、その係数は自変数に関する一次かん数である。かような線型常微分方程式に対しては、Laplace 積分の形にその厳密解を表わし得ることが知られている。しかし無限ベキ級数の形に解を作っておけば実用上便利である。実際のある水力発電所の場合の数値をあてはめてみると、その無限級数の始め 1, 2 項をとれば実用上十分であり、ことに略近公式としては始め 1 項だけでもよいことが知られた。

常微分方程式 (7) において右辺を 0 とおいて得られるところの同次線型常微分方程式の基本解は、無限ベキ級数の形で

$$A(x) = x^{2-A} \left[1 - \frac{C + (2-A)B}{(4-A)(3-A) \cdot 2} x^2 + \frac{[C + (2-A)B][C + (4-A)B]}{8 \cdot (6-A)(5-A)(4-A)(3-A)} x^4 - \dots \right]$$

$$B(x) = x - \frac{B+C}{6(A+1)} x^3 + \frac{(B+C)(3B+C)}{120(3+A)(1+A)} x^5 + \dots$$

$$C(x) = 1 - \frac{C}{2A} x^2 + \frac{C(2B+C)}{24A(A+2)} x^4 + \dots$$

のごとく書き表わされる。そして非同次方程式 (7) の一般解は

$$p_1 = \frac{D}{C} + C_1 A(x) + C_2 B(x) + C_3 C(x) \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし C_1, C_2, C_3 は任意定数であり、初期条件によって定めるべきものである。

初期条件は $t=0$ ($x=1$) において

$p_1=0, p_2=0, v_3=0, v_2=v_{10}, v_1=v_{10}, h=0$ とならなくてはならない。したがって運動の方程式により $t=0$ ($x=1$) に対して $dv_1/dt=0, dv_3/dt=d^2 h/dt^2=0, dv_2/dt=0, dh/dt=0$ なることを知る。また関係式

$$\sqrt{2gH} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{p_1}{H} \right] a_4 \psi(t) = v_2 a_2$$

の両辺を微分すれば

$$\sqrt{2gH} \left[-\frac{1}{T} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p_1}{H} \right) + \left(1 - \frac{t}{T} \right) \frac{1}{2H} \frac{dp_1}{dt} \right] a_4 = a_2 \frac{dv_2}{dt}$$

ゆえに $t=0$ に対して

$$dp_1/dx = -2H$$

次に関係式 (5) において d^2h/dt^2 を消去すれば

$$\lambda h + (\lambda\beta - \alpha\mu) \frac{d\xi}{dt} - \alpha \left(\frac{\xi}{\psi(t)} - 1 \right) = 0$$

あるいは

$$\lambda \frac{dh}{dt} + (\lambda\beta - \alpha\mu) \frac{d^2}{dt^2} \left[\psi(t) \left(1 + \frac{p_1}{2H} \right) \right] - \frac{\alpha}{2H} \frac{dp_1}{dt} = 0$$

となるから、ここにおいて $t=0$ とおけば

$$\frac{d^2p_1}{dx^2} = 2HK, \quad K = 2 + \frac{\alpha T}{\lambda\beta - \alpha\mu}$$

なる初期値がえられる。

これを要するに $t=0$ ($x=1$) において

$$p_1=0, \quad dp_1/dx = -2H$$

$$d^2p_1/dx^2 = 2HK$$

とならなくてはならないことになる。

以上の初期値を (8) にあてはめて任意定数 C_1, C_2, C_3 を決定する。そのためには C_1, C_2, C_3 は連立方程式

$$C_1A(1) + C_2B(1) + C_3C(1) = -D/C$$

$$C_1A'(1) + C_2B'(1) + C_3C'(1) = -2H$$

$$C_1A''(1) + C_2B''(1) + C_3C''(1) = 2KH$$

によって定めねばならない。しかるに後に記す実例によってわかるように数%以内の誤差をもって略近的に

$$A(x) = x^{2-A}, \quad B(x) = x, \quad C(x) = 1,$$

とおいてもよい。その場合には C_1, C_2, C_3 は略近的に次のような値をとる。

$$C_1 = \frac{2KH}{(2-A)(1-A)}, \quad C_2 = -2H \frac{K+1-A}{1-A},$$

$$C_3 = -\frac{D}{C} + 2H \left[1 + \frac{K}{2-A} \right]$$

と見なすことができる。一方において $K=A-1$ なることも知られる。以上の値を用いて p_1 を書き表わし、かつこれを整理すれば

$$p_1 = \frac{2H}{2-A} [1 - x^{2-A}]$$

圧力 p_1 の変り方は第2図に略図に示すごとくである。そして p_1 の最大値 $p_{1\max}$ は次のようになる。

$$p_{1\max} = \frac{2H}{2-A}$$

第2図 理論上の水圧上昇曲線

$$= \frac{2gHT}{Q_0} \left\{ \frac{F_1 + F_3}{(F_1 + F_3)(F_1 + F_2) - F_1^2} \right\} - 1 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし H = 落差, Q_0 = 流量, T = 閉鎖時間,

$$F_1 = l_1/a_1, \quad F_2 = l_2/a_2, \quad F_3 = l_3/a_3.$$

5. 吸出管の影響

第1図において、吸出管 l_a の存在をも考えに入れ

第3図 断面積の一定でない管路

た場合の圧力上昇の公式を前と同様の方法によって求めることができる。

すなわち第1図の管路において吸出管 l_a を考えに入れた運動の方程式を作れば下のごとくなる。ただし管路長 l_1, l_2, l_3, l_a に対しては (もし一様断面でなければ) それぞれの等価値をとる。たとえば第3図に対して

$$l_a = a_a \sum \frac{Al}{a}$$

として計算し l_a, a_a を求めれば、これは一様な断面積 a_a をもった長さ l_a の管路と等価になる。もちろん部分負荷において水が回転成分をもっているような場合に対しては厳密には当てはまらない。

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= -\frac{l_1}{g} \frac{dv_1}{dt} = h + \frac{l_3}{g} \frac{dv_3}{dt} \\ p_1 - p_2 &= -\frac{l_2}{g} \frac{dv_2}{dv} \\ v_1 a_1 &= v_3 a_3 + v_2 a_2 \\ p_a &= \frac{l_a}{g} \frac{dv_a}{dt} = -\frac{l_a}{l_2} (p_1 - p_2) \\ \sqrt{2g(H + p_1 - p_a)} a_4 \psi(t) &= v_2 a_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

この最後の式の代りに略近的に

$$\sqrt{2gH} \left[1 + \frac{1}{2H} (p_1 - p_a) \right] a_4 \psi(t) = v_2 a_2$$

ととる。そして

$$\xi = \psi(t) \left\{ 1 + \frac{1}{2H} (p_1 - p_a) \right\}$$

とおくことにより、上記の方法を用いて連立常微分方程式

$$\alpha \frac{d^2h}{dt^2} + h + \beta \frac{d\xi}{dt} = 0$$

$$\lambda \frac{d^2h}{dt^2} + \mu \frac{d\xi}{dt} + \frac{\xi}{\psi(t)} - 1 = 0$$

が得られる。ここに係数 $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ は形は前と同じであるが、前の場合に l_2 と書いてあるところを、 $l_2' = l_2 + l_a$ と書かねばならない。すなわち

$$\alpha = \frac{A_0}{g} \left(\frac{l_1}{a_1} + \frac{l_3}{a_3} \right), \quad \beta = \frac{l_1 Q_0}{g a_1},$$

$$\lambda = \frac{l_1 A_0}{a_1 2gH}, \quad \mu = \frac{Q_0}{2gH} \left(\frac{l_1}{a_1} + \frac{l_2'}{a_2} \right)$$

そして $P = p_1 - p_a$ に対して次の常微分方程式が得られる。

$$x \frac{d^3P}{dx^3} + A \frac{d^2P}{dx^2} + Bx \frac{dP}{dx} + CP = D$$

ただし

$$A = 3 + \frac{\alpha T}{\beta\lambda - \alpha\mu}, \quad B = -\frac{\mu T^2}{\beta\lambda - \alpha\mu},$$

$$C = \frac{(T - \mu)T^2}{\beta\lambda - \alpha\mu}, \quad D = \frac{\mu T^2}{\beta\lambda - \alpha\mu} \cdot 2H,$$

かつ $\psi(t) = 1 - t/T, \quad x = 1 - t/T.$

初期条件も前と同様にして得られる。すなわち $t=0$

($x=1$) において

$$dP/dx = -2H, \quad d^2P/dx^2 = 2HK, \quad P=0,$$

ただし
$$K = 2 + \frac{\alpha T}{\lambda\beta - \alpha\mu} = A - 1$$

上記の微分方程式の略近解を求めると、初期条件を考えに入れて

$$P = \frac{2H}{2-A}(1-x^{2-A})$$

となる。これにより $p_1 = P + p_d$ の値を計算しよう。

$$v_2 = \frac{a_4}{a_2} \sqrt{2gH\xi} = \frac{Q_0}{a_2} \xi,$$

$$\xi = \psi(t) \left\{ 1 + \frac{P}{2H} \right\} = \frac{3-A}{2-A} x - \frac{1}{2-A} x^{3-A}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{T} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{T} \left\{ 1 - x^{2-A} \right\} \frac{3-A}{2-A}$$

であるから

$$p_1 = P + \frac{l_d}{g} \frac{dv_2}{dt} = \frac{2H}{2-A}(1-x^{2-A}) \left[1 - \frac{l_d a_4}{a_2 T \sqrt{2gH}} (3-A) \right]$$

これより p_1 の最大値を求めると

$$p_{1\max} = \frac{2H}{2-A} \left[1 - \frac{F_d(F_1+F_3)}{(F_1+F_2+F_d)(F_1+F_3)-(F_1)^2} \right] \\ = \frac{2gHT}{Q_0} \left[\frac{F_1+F_3}{(F_1+F_3)(F_1+F_2+F_d)-(F_1)^2} - 1 \right] \\ \times \frac{(F_1+F_2)(F_1+F_3)-(F_1)^2}{(F_1+F_2+F_d)(F_1+F_3)-(F_1)^2}$$

となる。ただし

$$F_1 = \frac{l_1}{a_1}, \quad F_2 = \frac{l_2}{a_2}, \quad F_3 = \frac{l_3}{a_3}, \quad F_d = \frac{l_d}{a_2}$$

実際の数値（平岡）をこれに当てはめて見ると吸出管の長さ l_d は水圧上昇に大した影響を与えていない。これに反しライザーの影響は顕著である。

（附記）（1）上の計算ではいわゆる剛体理論を用いてあり、緩閉鎖の場合に対応するものである。実際の多くの発電所の実例に倣するに、 l_2, l_3 に対してはそれでよい。しかるに l_1 は 1000 m またはそれ以上の場合もあるのであって、かような場合に対しては剛体理論でなく波動理論によらねば厳密と言えない。しかるに l_1 の値が水圧上昇に及ぼす影響は余り大きいものでない。しかも波動理論では簡単な実用公式は得られにくい。そのゆえに略近公式を作るために剛体理論のみによったのもやむを得ないと思われる。（2）上の計算でべき級数の形に第3階線型常微分方程式の解を与えたが、もし指数方程式の根の差が整数値をもてば（すなわち $2-A$ が整数値をもてば）解の形は異なる。すなわちその場合には $\log x$ の項がはいって来なければならないことが、常微分方程式論において知られている。それゆえそのような場合に対しても吟味しなければ理論上完全とは言えない。この計算を示すことは可能であるが、実用上大した意味のあることでないから、ここにはこれを省略した。同様のことが、著者

の前の論文⁽³⁾に対しても言える。

6. 実測値との比較

天竜川平岡発電所の管路に対し、概数として

$l_1=500$ m, $l_2=40$ m, $l_3=30$ m, $a_1=34.2$ m², $a_2=15.9$ m², $a_3=19.6$ m², $H=45$ m, $A_0=200$ m² としてみた。また流量 $Q_0=60$ m³/s のときには $a_4=2.02$ m² である。もちろん負荷が変り Q_0 が変れば、それにつれて a_4 の値も変る。

いま $Q_0=60$ m³/s に対して $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ を計算すれば、

$$\alpha=322, \quad \beta=89.5, \quad \lambda=3.32, \quad \mu=1.16.$$

したがって閉鎖時間 $T=3$ s に対して

$$A=-9.2, \quad B=0.103, \quad C=-0.296, \quad D=-16.7$$

となる。この場合には

$$A(x)=x^{11.2} [1+0.000560x^2+1.05 \times 10^{-7}x^4+\dots]$$

$$B(x)=x-0.00392x^3-0.41 \times 10^{-6}x^5+\dots$$

$$C(x)=1-0.01605x^2+0.167 \times 10^{-3}x^4+\dots$$

となる。このような場合においては、これらの無限べき級数のそれぞれ第1項だけをとれば実用上の目的に合う。ことに閉鎖の終りにおいては $x=0$ である。それゆえ最大水圧上昇値を略近的に（9）式によって計算してもよいであろう。式中において $F_1=14.6$, $F_2=2.645$, $F_3=1.522$ ととり、水圧上昇値を計算し、実測値と比較してみた。その結果を第1表に示してある。

第4図 水圧上昇曲線

実測値は閉鎖直前の水圧 a , 最大水圧 b , 閉鎖後の安定水圧 c の3者（第4図参照）が測られた。それより $b-c$ の値を計算し、これを p_e と名付け第1表中に記入してある。計算値は管路 l_2 に対し通常のいわゆる Allievi の略近公式によって計算した値 p_a と、新公式（9）によって計算した値 p_k とを記入してある。

第1表 実測値と計算値との比較表

	しゃ断負荷 kW	閉鎖時間 s	p_e m	p_a m	p_k m
1 号 機	26 200	4.1		4.33	6.86
"	24 800	3.9	7.50	4.29	6.72
2 号 機	25 000	4.5	6.00	3.70	5.84
1 号 機	20 600	3.25	8.50	4.28	8.73
2 号 機 (同時しゃ断)	20 200	3.4	10.00	4.05	8.17
1 号 機	22 800	3.15	8.50	4.90	10.1
2 号 機 (同時しゃ断)	22 600	3.60	9.50	4.24	8.57

1 号 機	5 200	3.2	2.5	1.51	2.30
	10 300	3.25	5.50	2.35	3.70
	15 200	3.35	6.00	3.21	4.94
	20 400	3.35	6.50	4.14	6.52
2 号 機	5 200	2.5	0.70	1.93	2.96
	10 400	2.95	4.00		4.11
	15 600	3.6	7.00	3.02	4.71
	20 400	3.9	7.50	3.50	5.49

いま実測値と計算値とを比較してみるのに、Allievi の公式による値 p_a が過少であるのは明らかである。新公式による値 p_k は実測値 p_e とほぼ一致している。例外としてかなりはずれているものはないが、少くとも p_a よりよい値を示しているようである。

注:—

- (1) 昭和 27 年 12 月 1 日 連合応用力学講演会において講演, 原稿受付 昭和 27 年 12 月 12 日.
- (2) 正員, 慶応義塾大学工学部.
- (3) 鬼頭, 本誌, 58 ページ.

621.253

噴口付波動水そうを有する水力発電所における水圧上昇について⁽¹⁾

鬼 頭 史 城⁽²⁾

On Pressure Rise in a Power Station equipped with a Restricted-Orifice Type Surge Tank

by Fumiki KITO

The author discusses the pressure rise in a Hydro-electric Power Station equipped with a surge-tank of restricted-orifice type. Approximate formula for estimation of the amount of pressure rise due to restriction of bottom mouth of a simple surge tank is given.

1. 緒 言

波動水そうそのものは土木工学の分野に属するのであるが、波動水そうの構造いかに水車の導羽根を閉鎖したとき生ずる水圧上昇に影響を及ぼし、水車や水圧鉄管の設計にも関連があるとすれば、水車に關係のある者にとっても、多少の関心をよせざるを得ないのである。

第1図において (a) はシングル・サージタンクを示すものである。この (a) の場合には水車の定常運転においては圧力トンネルから流れてきた流速 v_1 は一旦 (大部分が) 消滅し、あらためて水圧鉄管に流入するところの流速 v_2 をおこさせることになる。そのために速度水頭 $v_1^2/2g$ の大部分は常に損失となる。低落差発電所においてはこの $v^2/2g$ の損失落差が総落差 H に対する割合がそれだけ顕著になるから、年中この損失があることは不利である。シングル・サージタンクの構造で、しかもこの損失をなるべく少なくする一案としては第1図(c)のごとく圧力トンネルから水そうに入るところに末拡管を付ければよいわけであるが工事上おもしろくない点もある。他の案としては第1図(b)のごとく噴口をつければよい。この構造(b)の実例等は米国で報告されたもの等がある⁽³⁾。

しかるに噴口付波動水そう (b) においては、導羽根

第 1 図

閉鎖時において水そうへ逃げる水は狭い噴口を經由しなければならず、それだけ阻止される。このために導羽根閉鎖中における水圧鉄管の水圧上昇がそれだけ増加することになる。著者は前回の報告⁽⁴⁾において第2