が得られる。(5)は第1表に示されているように工学上十分な精度を有し、誤差は $\alpha=10$ の近傍においてほぼ0.1%であり、それ以外の α に対しては0.1%以下である。

α の値が一定である場合は(5)を用いるまでもなく、第1表(1)の値を用いればよい。しかし、昇降機の振動を解く場合のように鋼索が繰り出される場合等に対しては「ただし(5)は定常波に対する解であるから、鋼索の繰出し速度は鋼索中の縦波の伝り速度に比し十分小さいことが必要である」、(5)は要用の手段となるものと思う。

注:—

- (1) 原稿受付 昭和 28 年 2 月 21 日。
- (2) 正員、大阪大学工学部。
- (3) たとえば Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*, 2nd Ed. p. 309, Eq. (94), Hort, *Technische Schwingungslehre*, 2te Aufl. S. 450, Gl. (4), Prescott *Applied Elasticity*, p. 245, Eq. (10.7), Rayleigh, *Theory of Sound*, 2nd Ed. Vol. 1, p. 245, Eq. (3) 等のうちいずれかを参照。
- (4) Timoshenko, loc. cit. pp. 318, 319.
- (5) 精密な値を必要としない場合は Jahnke-Emde のかん数表を利用できる。著者は K. Hayashi, *Sieben u. Mehrstellige Tafeln der Kreis u. Hyperbel Funktionen*, Julius Springer, (1926) により有効数字 4 けたないし 5 けたを求めた。

534.11

支持端に弾性と慣性とを有する片持ビームの固有横振動について⁽¹⁾

木 内 石⁽²⁾

On the Vibration of a Cantilever which has a Moment of Inertia and Elasticity at its Supported End

by Atsushi KIUCHI

This paper is about a vibration of a cantilever beam which has elasticity and a moment of enertia at its supported end. The other end of the beam is free. Equations for natural frequency, node and loop, are obtained theoretically and the results of their numerical calculation agree with the experiment well.

1. 結 言

本研究は一端に回転慣性 I_1 を有する(その端を慣性端と名づける)弾性直棒を慣性端においてその傾斜に対してのみ弾性的に支持した系の固有振動特性に関するものである。第1図(a)に本研究の対象になるビームの一例を示し、回転慣性 I_1 は支持点を中心として紙面内において回転する。弾性棒はばねによって支持端を中心とする回転に対して弾性的に支持される。

2. 理論式の誘導

2.1 誘導の基礎 棒の振動方程式は諸種の損失および回転慣性等を無視すると周知のとおり次のように表わされる。

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \frac{A\rho}{EI} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\{\alpha^2 d(1) + (3e_1 - r_1 \alpha^4) \alpha a(1)\} W'(0) + b(1) I^2 W'''(0) = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\{\alpha^2 c(1) + (3e_1 - r_1 \alpha^4) \alpha d(1)\} W'(0) + a(1) I^2 W'''(0) = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$W(x) = W'(0) / (2\alpha^2) [\alpha (\sinh \alpha \bar{x} + \sin \alpha \bar{x}) + (3e_1 - r_1 \alpha^4) (\cosh \alpha \bar{x} - \cos \alpha \bar{x}) - (\sinh \alpha \bar{x} - \sin \alpha \bar{x}) \{ \alpha (\sinh \alpha - \sin \alpha) + (3e_1 - r_1 \alpha^4) (\cosh \alpha + \cos \alpha) \} / (\sinh \alpha + \sin \alpha)] \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに E : 棒を形成する材料の縦弾性係数

I : 棒の断面の断面二次モーメント

Y : 棒の横方向の変位

x : 棒の長さ方向の座標

t : 時間

ρ : 棒の単位体積当りの質量

A : 棒の断面積

端末条件のうち支持点におけるものの一つは回転慣性と支持弾性とを考慮して

$$I_1 \left(\frac{\partial^3 Y}{\partial x \partial t^2} \right)_{x=0} = EI \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right)_{x=0} - k_1 \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_{x=0} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここに k_1 は棒の $x=0$ 点における単位回転角に対する反モーメントの大きさである。

$Y=W(x)\sin \omega t$ とし、他の端末条件をも考慮して

(1)を解けば次の3式を得る。

ここに $e_1 = k_1 l / 3EI$, $r_1 = I_1 / m_0 l^2$

$$a(x) = (\cosh \alpha x + \cos \alpha x) / 2,$$

$$b(x) = (\sinh \alpha x + \sin \alpha x) / 2,$$

$$c(x) = (\cosh \alpha x - \cos \alpha x) / 2,$$

$$d(x) = (\sinh \alpha x - \sin \alpha x) / 2,$$

$$x = x/l, \quad \alpha = lA \rho \omega^2 / EI,$$

$$\frac{\alpha(\sinh \alpha x + \sin \alpha x) + (3e_1 - r_1 \alpha^4)(\cosh \alpha x - \cos \alpha x)}{\sinh \alpha x - \sin \alpha x} = \frac{\alpha(\sinh \alpha - \sin \alpha) + (3e_1 - r_1 \alpha^4)(\cosh \alpha + \cos \alpha)}{\sinh \alpha + \sin \alpha} \dots\dots\dots (7)$$

(7) を満足する x の値が、すなわち節点の位置である。ただし、このときの α の値は (6) を満足するところのものでなければならない。

3. 特別な場合の各方程式

特別な場合の振動数方程式および節点方程式は (6) (7) において次のようにおけば得られる。

3.1 弾性支持だけで慣性を有しない場合 (第1図(i)) $r_1 = 0$ とおく。

3.2 単純支持で慣性のみを有する場合 (第1図(ii)) $e_1 = 0$ とおく。

3.3 単純支持の場合 (第1図(iii)) $e_1 = r_1 = 0$ とおく。

3.4 固定端の場合 (第1図(iv)) この場合は $e_1 = \infty$ または $r_1 = \infty$ とおく。

第 1 図

2.2 固有横振動数方程式 (3)(4) から次の固有横振動数方程式を得る。

$$\alpha(\cos \alpha \sinh \alpha - \sin \alpha \cosh \alpha) + (3e_1 - r_1 \alpha^4)(1 + \cos \alpha \cosh \alpha) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

2.3 節点方程式 $W(x) = 0$ として (5) から次の節点方程式を得る。

4. 固有横振動数方程式の吟味

4.1 e_1 と r_1 とが与えられた場合の α の値について 与えられた e_1 と r_1 との値に対して (6) を満足する α の値を計算する。今

$$F(\alpha) = \alpha(\cos \alpha \sinh \alpha - \sin \alpha \cosh \alpha) + (3e_1 - r_1 \alpha^4)(1 + \cos \alpha \cosh \alpha) \dots\dots\dots (8)$$

とおいて $F(\alpha) = 0$ の根を求めるために e_1 と r_1 との組合せの若干の例に対する $F(\alpha)$ の変化の模様をしらべるのであるが、 $e_1 = 1$ の場合の r_1 の若干の値に対して $F(\alpha)$ の値を計算すると第2図のようになる。

第2図 α に対する $F(\alpha)$ の変化

$1 + \cos \alpha \cosh \alpha = 0$ の根に相当する α の値に対しては e_1 , r_1 の値のいかんにかかわらず (8) は

$$F(\alpha) = \alpha(\cos \alpha \sinh \alpha - \sin \alpha \cosh \alpha) \dots\dots\dots (9)$$

になるから (8) の表わす曲線群は (9) によって定まる定点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ を通る。この定点は普通の片持はりに対する α の値を $F(\alpha)$ に代入したものである。第2図のような曲線と $F(\alpha) = 0$ 座標との交点を求めることにより与えられた e_1 と r_1 に対する α

第3図 r_1 に対する α の変化 第4図 e_1 に対する α の変化

の値を計算して図にすると第3図および第4図のようになる。第3図は e_1 をパラメータとして r_1 の変化に対する α の値すなわち $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ の値の変化を示したものであり、第4図は r_1 をパラメータとして e_1 の変化に対する α の値の変化を示したものである。 α の値はある r_1 の値の範囲または e_1 の値の範囲でそれぞれ急激な変化をしていることがわかる。両者

共同一の e_1 または r_1 に対しては各曲線が同一の傾向をたどる特徴を表わしている。図から明らかなように e_1, r_1 を適当に組合せればいかなる α の値でも得られるのであるが、ただ点線を打った領内の組合せは使用することができない。 e_1, r_1 の変化に対する α の変化のようすは第5図のように $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 等に対してそれぞれ一つの曲面をなす。 $\alpha=0$ なる基準

第5図 α の変化の全般的傾向

底面に平行な平面とこれらの平面との交線は直線をなすことは後述する理由によって明らかである。

4.2 α を一定とした場合 e_1 と r_1 との関係について (6) を書き直すと

$$e_1 = \frac{\alpha^4}{3} r_1 + \frac{\alpha}{3} \frac{\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha}{1 + \cos \alpha \cosh \alpha} \quad \dots\dots\dots (10)$$

(10) は二つの性質を有する。すなわち

(i) α を一定に与えた場合 (10) は e_1 , r_1 に関する直線の方程式である。したがって同一の α を得るための e_1 , r_1 の組合せは無数に存在することがわかる。

(ii) 任意の点 (r_1 , e_1) を通る (10) を満足する直線は無数に存在する。これら二つの性質のうち (i) は (10) の形から明らかである。(ii) は第2図、第3図、第4図において任意の r_1 , e_1 の組合せに対し α の値が無数に存在することから知ることができる。第6図は $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ の場合の直線と、更に第3図または第4図との関連性において $e_1 = 100, 10, 1$ と $r_1 = 0.001, 0.01, 0.1$ との任意の組合せについてそれらの点 (○印にて表わす) を通る4本の直線を図示したものである。第6図に表わされる α の値に相当する振動数を発生せしむるに必要な e_1 と r_1 との組合せが図から求めることができる。

5. 節点の位置

節点の位置を (7) で計算した結果は第7図 (a) (b) のようになる。 α_1 に対応する振動に対しては節点の無いことは常識的にも実験的にも知られることであるから、ここでは節点が1個の場合と2個の場合、すなわち α_2 と α_3 の場合に関して計算を行ってある。いずれも $e_1 = 0, 1, 10, \infty$ の場合についてであり、 e_1 が 10 と ∞ との間の場合には使用した林氏の高等かん数表の精度の関係上計算がきわめて不正確になるので中止した。 α_2 に対応する振動に対しては節点の数は1であるが r_1 が大になると節点の位置がほとんど支持点に一致して見かけ上は節点が無いかのように見える。 α_3 に対応するものも第7図 (b) からわかるように一般には節点が2個あるのであるが、 r_1 が大なるにつれて一つの節点は支持点にだんだん近づいてあたかも一つの節点だけの見かけを呈する。点で蔽われた部分に対しては e_1 , r_1 の組合せいかんにかかわらず節点は存在しない。

6. 実験

実験は固有横振動数と節点とに関して行った。

6.1 固有横振動数の実験 実験装置の系統図および写真を第8図および写真1に示す。棒を写真引伸用電球の前に置き、その影をスリットを通して回転ドラム上の印画紙に撮影し、

第8図 実験装置

第7図 (a) α_2 に対する Node の位置 第7図 (b) α_3 に対する Node の位置 第6図 α をパラメータとする e_1, r_1 間の関係

スリットは棒の長さ方向に対して直角に置いて棒のきわめて短い部分を選択して撮影した。棒の振動は棒上適当なる位置に打撃を与えて生ぜしめた。時間記録は 60 c/s の電源によって振動せしめられる振動棒によって行った。写真 2 は写真撮影の一例である。磷青銅ばねの寸法を加減して $e_1=1$ とし慣性 (鉛) の位置を $r_1=0\sim 1$ の間において調節し $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の三つの場合に関して行った。実験の結果と理論との比較を第 9 図に示す。

6・2 節点位置の実験 固有横振動数の実験の場合と同一のサンプルを用い同様に衝撃を与えて節点の

写 真 1

写 真 2

第 9 図

位置を肉眼によって観測した結果と理論値との比較を第 10 図に示す。

7. 結 言

一端に回転慣性 I_1 を有する長さ l , 質量 m_b の弾

第 10 図 α_2 に対する実験

性直棒をその端において弾性的 (単位回転角に対する反モーメント k_1) に支持した系の固有横振動に対する固有横振動数方程式, 節点方程式はそれぞれ (6), (7) によってあらわすことができる。固有横振動数方程式および節点方程式については数値計算を行い, その結果は第 3~7 図のようになることを示して回転慣性支持弾性の影響を明らかにし, 実験によって解析結果の検討を行って, おおむね満足すべき結果を得ている。要するに本研究は第 1 図のごとき棒の振動特性を相当程度において解明し得たものと信ずる。なお他の種々なる支持条件における棒の振動特性をも追って報告したい考えである。

注: -

(1) 昭和 27 年 10 月 18 日 関西工学連合講演会において講演, 原稿受付 昭和 28 年 3 月 9 日。

(2) 正員, 静岡大学工学部。