第 1 表 λ/π^4

a/b	妹 沢	加 藤	友 近	幅 田	鈴 木	成 岡	金 沢	宮 崎
1.0	14.4	13.23	13.294 8 13.294 0	13.297		13.294 0	13.294 9	13.290
1.5	8.13	7.43		7.50 7.49	7.485 7	7.486 2		7.500
2.0	7.09	6.35		6.23 6.20	6.200 1	6.215 5		6.226

第 2 表

解 法	分 割 数	未知数の数	λ	$\frac{\lambda}{\pi^4}$	友近博士の値に 対する誤差(%)
本 法	3	1	1 294.603 4	13.290 4	0.033
Collatz 法	4	3	1 236.636 3	12.695 3	4.15
	5	3	1 267.179 6	13.008 8	2.15
	6	6	1 279.337 3	13.133 7	1.21
	7	6	1 285.138 6	13.193 2	0.764
	9	10	1 290.186 7	13.245 1	0.376

5. 結 言

以上により明らかのごとく、本解法は一般の線型微分方程式の数値解法に適用されるものであり、数値微分による階差法に比較してはるかに高い精度を持つ解が得られ、特に高階微分方程式の場合には、その効果が顕著となる。

終りにのぞみ、終始かわらざる御指導御鞭達を頂いている東大教授日高孝次博士に、厚く感謝の意を表する次第である。

注：一

- (1) 昭和 28 年 4 月 5 日 第 30 期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和 28 年 4 月 11 日。
- (2) 正員、群馬大学工学部。
- (3) 日高孝次、数値積分法下巻、243 ページ。

534.11

動荷重によるはりの振動⁽¹⁾生 井 正 之⁽²⁾Transverse Vibration of the Beam Under the Action
of the Moving Load

by Masayuki IKUI

The solution of the transverse vibration of the symmetrical, continuous, simply supported three-span beam under the action of the moving constant force was derived. And an experiment was done for one traversing velocity. The agreement between them was qualitatively fairly good.

1. 緒 言

橋りょう、鉄道レールなどの振動に関連し、多スパン連続はりの一例としての 3 スパンの はり の上を一定速度で荷重が走行する場合の振動の解析を行った。

2. 記 号

本文中、特に説明することなしに使用している記号は次のとおりである。

x : はりの長さ方向の座標 m

y : はりの たわみ m
 t : 時間 s
 EI : はりの曲げ剛性 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$
 ρA : はりの単位長さ当りの密度 $\text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}^3$
 l : スパン m
 v : 荷重の速度 m/s
 W : 荷重 kg.

3. 3 スパンの はり の 振 動

鉄道のレールなどは一応多スパンの連続はりと考えることができる。一般の多スパンの はり の上を荷重が走行する場合の振動の解析はきわめて困難であり、

第 1 図

$$Y = \frac{W}{EI} \left[\frac{v(v^2q^2 - p^2) \sin q(l-x)}{2pq^2(p^2 + m^4v^4) \sin ql} + \frac{v(v^2q^2 + p^2) \sinh q(l-x)}{2pq^2(p^2 + m^4v^4) \sinh ql} + \frac{v(v^2q^2 - p^2) \sin qx}{2pq^2(p^2 + m^4v^4) \sin ql} e^{-\frac{p}{v}l} \right. \\ \left. + \frac{v(v^2q^2 + p^2) \sinh qx}{2pq^2(p^2 + m^4v^4) \sinh ql} e^{-\frac{p}{v}l} - \frac{v^3}{p(p^2 + m^4v^4)} e^{-\frac{p}{v}x} \right] \quad (4)$$

$$\text{ここで } q^4 + m^4p^2 = 0 \quad (5)$$

$$\text{これを } y = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} Y dp \quad (6)$$

なる公式によって逆変換すれば

$$y = \frac{W}{EI} \left[\left\{ -\frac{\sin m^2v(l-x)}{m^6v^3 \sin m^2vl} \sin m^2v^2t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2vm^2l^4}{(n\pi)^3(n^2\pi^2 - m^4v^2l^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n^2\pi^2}{m^2l^2}t + \frac{t}{m^4v} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right\} \right. \\ \left. - \left\{ \frac{\sin m^2vx}{m^6v^3 \sin m^2vl} \sin m^2v^2\left(t - \frac{l}{v}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2vm^2l^4}{(n\pi)^3(n^2\pi^2 - m^4v^2l^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n^2\pi^2}{m^2l^2}\left(t - \frac{l}{v}\right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{x}{m^4vl} \left(t - \frac{l}{v}\right) \right\} + \left\{ \frac{1}{m^6v^3} \sin m^2v(vt-x) - \frac{(vt-x)}{m^4v^2} \right\} \right] \quad (7)$$

この式の第1, 第2, 第3の { } 内はそれぞれ $t \geq 0$, $t \geq (l/v)$, $t \geq (x/v)$ にて成立し, $t < 0$, $t < (l/v)$, $t < (x/v)$ では 0 である。前述の Timoshenko の得た式は荷重が動き始めてから通過し終るまでの振動を表わしているが, (7) は荷重通過後の自由振動をもいっしに表わしている。

次に第2図のように両端に曲げモーメントが作用する場合を考える。(2) の変換を施した振動方程式は

第 2 図

また煩雑であるから, 簡単な例として各スパンの諸元が等しい 3 スパンの場合を考えてみる。後の計算に入用であるから, まず第1図のような 1 スパンの場合を取扱う。この場合はすでに Timoshenko⁽³⁾ によって解かれているが, ここではヘビサイド演算子⁽⁴⁾による解を簡単に記しておく。

振動方程式は

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \begin{cases} 0 & (x < vt) \\ -W & (x = vt) \\ 0 & (x > vt) \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{いま } Y = p \int_0^\infty y e^{-pt} dt \quad (2)$$

なる変換を使って上の関係を書き表わせば

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} + m^4 p^2 Y = -\frac{W}{EI} \frac{p}{v} e^{-\frac{p}{v}x} \quad (3)$$

ここで $m^4 = \rho A / EI$

両端支持の条件

$$x=0 \text{ で } y=0, \quad \partial^2 y / \partial x^2 = 0, \\ x=l \text{ で } y=0, \quad \partial^2 y / \partial x^2 = 0,$$

を満足する解は

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} + m^4 p^2 Y = 0$$

端末条件

$$x=0 \text{ で } Y=0, \quad EI \frac{d^2 Y}{dx^2} = -M_0$$

$$x=l \text{ で } Y=0, \quad EI \frac{d^2 Y}{dx^2} = -M_l$$

を満足する解は

$$Y = \frac{1}{2EIq^2} \left[M_l \left\{ \frac{\sin qx}{\sin ql} - \frac{\sinh qx}{\sinh ql} \right\} + M_0 \left\{ \frac{\sin q(l-x)}{\sin ql} - \frac{\sinh q(l-x)}{\sinh ql} \right\} \right] \quad (9)$$

ここで q は前の場合同様 (5) で表わされる。

次に各スパンの諸元が等しい 3 スパンの連続はりの上を W なる集中荷重が v なる速度で移動する場合を考える。まず $t=0$ に荷重が第3図の支点 A から動き始めて B に到達するまでを考える。支点 B と C の左右両側のこう配を (4), (9) の関係を使って求

め、それらをそれぞれ等しいとおいて曲げモーメント M_B' , M_C' を求めると

第 3 図

第 4 図

$$\left. \begin{aligned} M_B' &= -\frac{W}{4} 2(\cos ql \sinh ql - \sin ql \cosh ql) \sin ql \sinh ql \left[-\frac{v(v^2 q^2 - p^2)}{p(p^2 + m^4 v^4) \sin ql} \right. \\ &\quad \left. - \frac{v(v^2 q^2 + p^2)}{p(p^2 + m^4 v^4) \sinh ql} + \frac{v(v^2 q^2 - p^2) \cos ql}{p(p^2 + m^4 v^4) \sin ql} e^{-\frac{p}{v} l} + \frac{v(v^2 q^2 + p^2) \cosh ql}{p(p^2 + m^4 v^4) \sinh ql} e^{-\frac{p}{v} l} + \frac{2v^2 q}{p^2 + m^4 v^4} e^{-\frac{p}{v} l} \right] \\ M_C' &= -\frac{W}{4} (\sinh ql - \sin ql) \sin ql \sinh ql \left[-\frac{v(v^2 q^2 - p^2)}{p(p^2 + m^4 v^4) \sin ql} - \frac{v(v^2 q^2 + p^2)}{p(p^2 + m^4 v^4) \sinh ql} \right. \\ &\quad \left. + \frac{v(v^2 q^2 - p^2) \cos ql}{p(p^2 + m^4 v^4) \sin ql} e^{-\frac{p}{v} l} + \frac{v(v^2 q^2 + p^2) \cosh ql}{p(p^2 + m^4 v^4) \sinh ql} e^{-\frac{p}{v} l} + \frac{2v^2 q}{p^2 + m^4 v^4} e^{-\frac{p}{v} l} \right] \end{aligned} \right\}$$

ここで

$$4 = 4(\cos ql \sinh ql - \sin ql \cosh ql)^2 - (\sinh ql - \sin ql)^2$$

.....(10)

次に荷重 W が $t = (l/v)$ のとき支点 B から右方に動き始めたとして、上と同様にして支点 B と C における曲げモーメント M_B'' , M_C'' を求めると

$$\left. \begin{aligned} M_B'' &= \frac{W}{4} 2(\cos ql \sinh ql - \sin ql \cosh ql) \sin ql \sinh ql \cdot e^{-\frac{p}{v} l} \\ &\quad \times \left[-\frac{v(v^2 q^2 - p^2) \cos ql}{p(p^2 + m^4 v^4) \sin ql} - \frac{v(v^2 q^2 + p^2) \cosh ql}{p(p^2 + m^4 v^4) \sinh ql} + \frac{2v^2 q}{p^2 + m^4 v^4} + \frac{v(v^2 q^2 - p^2)}{p(p^2 + m^4 v^4) \sin ql} e^{-\frac{p}{v} l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{v(v^2 q^2 + p^2)}{p(p^2 + m^4 v^4) \sinh ql} e^{-\frac{p}{v} l} \right] - \frac{W}{4} (\sinh ql - \sin ql) \sin ql \sinh ql \cdot e^{-\frac{p}{v} l} \\ &\quad \times \left[-\frac{v(v^2 q^2 - p^2)}{p(p^2 + m^4 v^4) \sin ql} - \frac{v(v^2 q^2 + p^2)}{p(p^2 + m^4 v^4) \sinh ql} + \frac{v(v^2 q^2 - p^2) \cos ql}{p(p^2 + m^4 v^4) \sin ql} e^{-\frac{p}{v} l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{v(v^2 q^2 + p^2) \cosh ql}{p(p^2 + m^4 v^4) \sinh ql} e^{-\frac{p}{v} l} + \frac{2v^2 q}{p^2 + m^4 v^4} e^{-\frac{p}{v} l} \right] \\ M_C'' &= -\frac{W}{4} 2(\cos ql \sinh ql - \sin ql \cosh ql) \sin ql \sinh ql \cdot e^{-\frac{p}{v} l} \\ &\quad \times \left[-\frac{v(v^2 q^2 - p^2)}{p(p^2 + m^4 v^4) \sin ql} - \frac{v(v^2 q^2 + p^2)}{p(p^2 + m^4 v^4) \sinh ql} + \frac{v(v^2 q^2 - p^2) \cos ql}{p(p^2 + m^4 v^4) \sin ql} e^{-\frac{p}{v} l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{v(v^2 q^2 + p^2) \cosh ql}{p(p^2 + m^4 v^4) \sinh ql} e^{-\frac{p}{v} l} + \frac{2v^2 q}{p^2 + m^4 v^4} e^{-\frac{p}{v} l} \right] \\ &\quad + \frac{W}{4} (\sinh ql - \sin ql) \sin ql \sinh ql \cdot e^{-\frac{p}{v} l} \left[-\frac{v(v^2 q^2 - p^2) \cos ql}{p(p^2 + m^4 v^4) \sin ql} \right. \\ &\quad \left. - \frac{v(v^2 q^2 + p^2) \cosh ql}{p(p^2 + m^4 v^4) \sinh ql} + \frac{2v^2 q}{p^2 + m^4 v^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{v(v^2 q^2 - p^2)}{p(p^2 + m^4 v^4) \sin ql} e^{-\frac{p}{v} l} + \frac{v(v^2 q^2 + p^2)}{p(p^2 + m^4 v^4) \sinh ql} e^{-\frac{p}{v} l} \right] \end{aligned} \right\}$$

.....(11)

第 5 図

同様に荷重が $t = (2l/v)$ のとき支点 C から右方へ動き始めたとして、支点 B と C における曲げモーメント M_B''' , M_C''' を求めると

$$\begin{aligned}
M_B''' &= \frac{W}{A} (\sinh ql - \sin ql) \sin ql \cdot \sinh ql \cdot e^{-\frac{p}{v}l} \left[-\frac{v(v^2q^2 - p^2) \cos ql}{p(p^2 + m^4v^4) \sin ql} \right. \\
&\quad \left. - \frac{v(v^2q^2 + p^2) \cosh ql}{p(p^2 + m^4v^4) \sinh ql} + \frac{2v^2q}{p^2 + m^4v^4} + \frac{v(v^2q^2 - p^2)}{p(p^2 + m^4v^4) \sinh ql} e^{-\frac{p}{v}l} + \frac{v(v^2q^2 + p^2)}{p(p^2 + m^4v^4) \sinh ql} e^{-\frac{p}{v}l} \right] \\
M_C''' &= \frac{W}{A} 2(\cos ql \cdot \sinh ql - \sin ql \cdot \cosh ql) \sin ql \cdot \sinh ql \cdot e^{-\frac{p}{v}l} \\
&\quad \times \left[-\frac{v(v^2q^2 - p^2) \cos ql}{p(p^2 + m^4v^4) \sin ql} - \frac{v(v^2q^2 + p^2) \cosh ql}{p(p^2 + m^4v^4) \sinh ql} + \frac{2v^2q}{p^2 + m^4v^4} + \frac{v(v^2q^2 - p^2)}{p(p^2 + m^4v^4) \sinh ql} e^{-\frac{p}{v}l} \right. \\
&\quad \left. + \frac{v(v^2q^2 + p^2)}{p(p^2 + m^4v^4) \sinh ql} e^{-\frac{p}{v}l} \right]
\end{aligned} \tag{12}$$

(10), (9), (4) の関係式を使って逆変換すれば, 最初静止の状態にあった はり の上を $t=0$ に荷重が A から動き始めて $t=l/v$ に B に到達するまでの過渡振動とそれ以後の自由振動が得られる。次に(11), (9), (4)の関係式を使って逆変換すれば最初静止の状態にあった はり の上を $t=l/v$ に荷重が B から動き始め $t=2l/v$ に C に到達するまでの過渡振動とそれ以後の

自由振動が得られる。両者を加え合わせると荷重が A を離れ v なる一定速度で走行し $t=2l/v$ に C に達するまでの過渡振動とそれ以後の自由振動が得られる。荷重がスパン CD 上を動く場合も同様に取扱う。スパン BC について上述の事柄を式で表わせば, たわみ y_2 の変換形を Y_2 とすると

$$Y_2 = Y_2' + Y_2'' + Y_2''' \tag{13}$$

$$\text{ここで } Y_2' = \frac{W}{2EIq^2A} \left[M_B' \left\{ \frac{\sin q(l-x)}{\sin ql} - \frac{\sinh q(l-x)}{\sinh ql} \right\} + M_C' \left\{ \frac{\sin qx}{\sin ql} - \frac{\sinh qx}{\sinh ql} \right\} \right] \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
Y_2'' &= \frac{W}{2EIq^2A} \left[M_B'' \left\{ \frac{\sin q(l-x)}{\sin ql} - \frac{\sinh q(l-x)}{\sinh ql} \right\} + M_C'' \left\{ \frac{\sin qx}{\sin ql} - \frac{\sinh qx}{\sinh ql} \right\} \right] \\
&\quad + \frac{W}{EI} e^{-\frac{p}{v}l} \left[\frac{v(v^2q^2 - p^2) \sin q(l-x)}{2pq^2(p^2 + m^4v^4) \sin ql} + \frac{v(v^2q^2 + p^2) \sinh q(l-x)}{2pq^2(p^2 + m^4v^4) \sinh ql} + \frac{v(v^2q^2 - p^2) \sin qx}{2pq^2(p^2 + m^4v^4) \sin ql} e^{-\frac{p}{v}l} \right. \\
&\quad \left. + \frac{v(v^2q^2 + p^2) \sinh qx}{2pq^2(p^2 + m^4v^4) \sinh ql} e^{-\frac{p}{v}l} - \frac{v^3}{p(p^2 + m^4v^4)} e^{-\frac{p}{v}l} \right] \tag{15}
\end{aligned}$$

$$Y_2''' = \frac{W}{2EIq^2A} \left[M_B''' \left\{ \frac{\sin q(l-x)}{\sin ql} - \frac{\sinh q(l-x)}{\sinh ql} \right\} + M_C''' \left\{ \frac{\sin qx}{\sin ql} - \frac{\sinh qx}{\sinh ql} \right\} \right] \tag{16}$$

Y_2' , Y_2'' , Y_2''' の逆変換を求むるに, 簡単のため次のような記号を使うと,

$$\left. \begin{aligned}
\sin \alpha x \sinh \alpha l - \sinh \alpha x \sin \alpha l &= A(\alpha l), \quad \cos \alpha l \sinh \alpha l - \sin \alpha l \cosh \alpha l = C(\alpha l), \\
\sinh \alpha l - \sin \alpha l &= D(\alpha l), \quad 4(\cos \alpha l \sinh \alpha l - \cosh \alpha l \sin \alpha l)^2 - (\sinh \alpha l - \sin \alpha l)^2 = K(\alpha l), \\
8(\cos \alpha l \sinh \alpha l - \cosh \alpha l \sin \alpha l) \sin \alpha l \sinh \alpha l &+ (\sinh \alpha l - \sin \alpha l)(\cosh \alpha l - \cos \alpha l) = H(\alpha l), \\
\frac{1}{\sin \alpha l \cdot (m^4v^2 - \alpha^2)} + \frac{2}{\sinh \alpha l \cdot (m^4v^2 + \alpha^2)} &= S(\alpha l), \quad \frac{\cos \alpha l}{\sin \alpha l \cdot (m^4v^2 - \alpha^2)} + \frac{\cosh \alpha l}{\sinh \alpha l \cdot (m^4v^2 + \alpha^2)} = T(\alpha l)
\end{aligned} \right\}$$

$K(\alpha l) = 0$ の n 番目の根を $\varepsilon_n l$ とする.

$$\begin{aligned}
y_2' &= -\frac{W}{2EI} \left[\frac{2}{m^6v^3} \left\{ \frac{2A(m^2vl-x)C(m^2vl)}{K(m^2vl)} + \frac{A(m^2vx)D(m^2vl)}{K(m^2vl)} \right\} \frac{\sin m^2v^2t}{\sin m^2vl} \right. \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vm^2}{l} \left\{ \frac{8}{3} \sin \frac{n\pi}{l} (l-x) + (-1)^n \frac{4}{3} \sin \frac{n\pi}{l} x \right\} \frac{l^5}{(n\pi)^3(m^4v^2l^2 - n^2\pi^2)} \sin \frac{n^2\pi^2}{m^2l^2} t \\
&\quad + \frac{8}{15m^4v} \frac{l^2(l-x) - (l-x)^3}{l^3} t + \frac{4vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\varepsilon_n l - x)C(\varepsilon_n l)S(\varepsilon_n l)}{H(\varepsilon_n l)\varepsilon_n^3} \sin \frac{\varepsilon_n^2}{m^2} t \\
&\quad - \frac{2}{15m^4v} \frac{l^2x - x^3}{l^3} t + \frac{2vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\varepsilon_n x)D(\varepsilon_n l)S(\varepsilon_n l)}{H(\varepsilon_n l)\varepsilon_n^3} \sin \frac{\varepsilon_n^2}{m^2} t \\
&\quad - \frac{2}{m^6v^3} \left\{ \frac{2A(m^2vl-x)C(m^2vl)}{K(m^2vl)} + \frac{A(m^2vx)D(m^2vl)}{K(m^2vl)} \right\} \frac{\cos m^2vl}{\sin m^2vl} \sin m^2v^2 \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vm^2}{l} \left\{ (-1)^n \frac{8}{3} \sin \frac{n\pi}{l} (l-x) + \frac{4}{3} \sin \frac{n\pi}{l} x \right\} \frac{l^5}{(n\pi)^3(m^4v^2l^2 - n^2\pi^2)} \sin \frac{n^2\pi^2}{m^2l^2} \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
&\quad - \frac{5}{18m^4v} \frac{l^2(l-x) - (l-x)^3}{l^3} \left(t - \frac{l}{v} \right) - \frac{4vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\varepsilon_n l - x)C(\varepsilon_n l)T(\varepsilon_n l)}{H(\varepsilon_n l)\varepsilon_n^3} \sin \frac{\varepsilon_n^2}{m^2} \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
&\quad + \frac{2}{15m^4v} \frac{l^2x - x^3}{l^3} \left(t - \frac{l}{v} \right) - \frac{2vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\varepsilon_n x)D(\varepsilon_n l)T(\varepsilon_n l)}{H(\varepsilon_n l)\varepsilon_n^3} \sin \frac{\varepsilon_n^2}{m^2} \left(t - \frac{l}{v} \right)
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{m^6 v^3} \left\{ \frac{2A(m^2 v l - x) C(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} + \frac{A(m^2 v x) D(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \right\} \cos m^2 v^2 \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
& - \frac{4v^2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2A(\epsilon_n l - x) C(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l)} + \frac{A(\epsilon_n x) D(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l)} \right\} \frac{m^4}{\epsilon_n^2 (m^2 v^4 - \epsilon_n^4)} \cos \frac{\epsilon_n^2}{m^2} \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
& - \frac{8}{15m^4 v^2} \frac{l^2(l-x) - (l-x)^3}{l^2} 1 \left(t - \frac{l}{v} \right) + \frac{2}{15m^4 v^2} \frac{l^2 x - x^3}{l^2} 1 \left(t - \frac{l}{v} \right) \dots \dots \dots (18) \\
y_2'' = & \frac{W}{2EI} \left[\frac{2}{m^6 v^3} \left\{ \frac{2A(m^2 v l - x) C(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \frac{\cos m^2 v l}{\sin m^2 v l} - \frac{A(m^2 v l - x) D(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \frac{1}{\sin m^2 v l} \right. \right. \\
& - \frac{2A(m^2 v x) C(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \frac{1}{\sin m^2 v l} + \frac{A(m^2 v x) D(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \frac{\cos m^2 v l}{\sin m^2 v l} \left. \right\} \sin m^2 v^2 \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
& - \frac{4vm^2}{3l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \sin \frac{n\pi}{l} (l-x) - \sin \frac{n\pi}{l} x \right\} \frac{l^5}{(n\pi)^3 (m^4 v^2 l^2 - n^2 \pi^2)} \sin \frac{n^2 \pi^2}{m^2 l^2} \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
& + \frac{2}{3m^4 v} \frac{l^2(l-x) - (l-x)^3}{l^3} \left(t - \frac{l}{v} \right) - \frac{2}{3m^4 v} \frac{l^2 x - x^3}{l^3} \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
& + \frac{4vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\epsilon_n l - x) C(\epsilon_n l) T(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l) \epsilon_n^3} \sin \frac{\epsilon_n^2}{m^2} \left(t - \frac{l}{v} \right) - \frac{4vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\epsilon_n x) C(\epsilon_n l) S(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l) \epsilon_n^3} \sin \frac{\epsilon_n^2}{m^2} \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
& - \frac{2vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\epsilon_n l - x) D(\epsilon_n l) S(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l) \epsilon_n^3} \sin \frac{\epsilon_n^2}{m^2} \left(t - \frac{l}{v} \right) + \frac{2vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\epsilon_n x) D(\epsilon_n l) T(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l) \epsilon_n^3} \sin \frac{\epsilon_n^2}{m^2} \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
& - \frac{2}{m^6 v^3} \left\{ \frac{2A(m^2 v l - x) C(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} + \frac{A(m^2 v x) D(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \right\} \cos m^2 v^2 \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
& - \frac{4v^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2A(\epsilon_n l - x) C(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l)} + \frac{A(\epsilon_n x) D(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l)} \right\} \frac{m^4}{\epsilon_n^2 (m^2 v^4 - \epsilon_n^4)} \cos \frac{\epsilon_n^2}{m^2} \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
& - \frac{8}{15m^4 v^2} \frac{l^2(l-x) - (l-x)^3}{l^2} 1 \left(t - \frac{l}{v} \right) + \frac{2}{15m^4 v^2} \frac{l^2 x - x^3}{l^2} 1 \left(t - \frac{l}{v} \right) \\
& - \frac{2}{m^6 v^3} \left\{ \frac{2A(m^2 v l - x) C(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \frac{1}{\sin m^2 v l} - \frac{A(m^2 v l - x) D(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \frac{\cos m^2 v l}{\sin m^2 v l} \right. \\
& - \frac{2A(m^2 v x) C(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \frac{\cos m^2 v l}{\sin m^2 v l} + \frac{A(m^2 v x) D(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \frac{1}{\sin m^2 v l} \left. \right\} \sin m^2 v^2 \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& + \frac{4vm^2}{3l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin \frac{n\pi}{l} (l-x) - (-1)^n \sin \frac{n\pi x}{l} \right\} \frac{l^5}{(n\pi)^3 (m^4 v^2 l^2 - n^2 \pi^2)} \sin \frac{n^2 \pi^2}{m^2 l^2} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& - \frac{2}{3m^4 v} \frac{l^2(l-x) - (l-x)^3}{l^3} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) + \frac{2}{3m^4 v} \frac{l^2 x - x^3}{l^3} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& - \frac{4vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\epsilon_n l - x) C(\epsilon_n l) S(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l) \epsilon_n^3} \sin \frac{\epsilon_n^2}{m^2} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) + \frac{2vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\epsilon_n l - x) D(\epsilon_n l) T(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l) \epsilon_n^3} \sin \frac{\epsilon_n^2}{m^2} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& + \frac{4vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\epsilon_n x) C(\epsilon_n l) T(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l) \epsilon_n^3} \sin \frac{\epsilon_n^2}{m^2} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) - \frac{2vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\epsilon_n x) D(\epsilon_n l) S(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l) \epsilon_n^3} \sin \frac{\epsilon_n^2}{m^2} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& + \frac{2}{m^6 v^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A(m^2 v l - x) D(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} + \frac{2A(m^2 v x) C(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \right\} \cos m^2 v^2 \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& + \frac{4v^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A(\epsilon_n l - x) D(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l)} + \frac{2A(\epsilon_n x) C(\epsilon_n l)}{H(\epsilon_n l)} \right\} \frac{m^4}{(m^2 v^4 - \epsilon_n^4) \epsilon_n^2} \cos \frac{\epsilon_n^2}{m^2} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& - \frac{2}{15m^4 v^2} \frac{l^2(l-x) - (l-x)^3}{l^2} 1 \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) + \frac{8}{15m^4 v^2} \frac{l^2 x - x^3}{l^2} 1 \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& + \frac{W}{EI} \left[\left\{ -\frac{\sin m^2 v (l-x)}{m^6 v^3 \sin m^2 v l} \sin m^2 v^2 \left(t - \frac{l}{v} \right) + \frac{2vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^5 \sin n\pi x / l}{(n\pi)^3 (n^2 \pi^2 - m^4 v^2 l^2)} \sin \frac{n^2 \pi^2}{m^2 l^2} \left(t - \frac{l}{v} \right) \right. \right. \\
& + \frac{1}{m^4 v} \left(t - \frac{l}{v} \right) - \frac{x}{m^4 v l} \left(t - \frac{l}{v} \right) \left. \right\} - \left\{ \frac{\sin m^2 v x}{m^6 v^3 \sin m^2 v l} \sin m^2 v^2 \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2vm^2}{l} \frac{l^5}{(n\pi)^3 (n^2 \pi^2 - m^4 v^2 l^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n^2 \pi^2}{m^2 l^2} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& - \frac{1}{m^4 v} \frac{x}{l} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) + \left. \left\{ \frac{1}{m^6 v^3} \sin m^2 v^2 \left(t - \frac{l+x}{v} \right) - \frac{1}{m^4 v} \left(t - \frac{l+x}{v} \right) \right\} \right] \dots \dots \dots (19) \\
y_2''' = & \frac{W}{2EI} \left[\frac{2}{m^6 v^3} \left\{ \frac{A(m^2 v l - x) D(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} + \frac{2A(m^2 v x) C(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \right\} \frac{\cos m^2 v l}{\sin m^2 v l} \sin m^2 v^2 \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4vm^2}{3l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin \frac{n\pi}{l} (l-x) + (-1)^n 2 \sin \frac{n\pi}{l} x \right\} \frac{l^5}{(n\pi)^3 (m^4 v^2 l^2 - n^2 \pi^2)} \sin \frac{n^2 \pi^2}{m^2 l^2} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& -\frac{2}{15m^4 v} \frac{l^2 (l-x) - (l-x)^3}{l^3} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) + \frac{2vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\varepsilon_n l - x) D(\varepsilon_n l) T(\varepsilon_n l)}{H(\varepsilon_n l) \varepsilon_n^3} \sin \frac{\varepsilon_n^2}{m^2} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& + \frac{8}{15m^4 v} \frac{l^2 x - x^3}{l^3} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) + \frac{4vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\varepsilon_n x) C(\varepsilon_n l) T(\varepsilon_n l)}{H(\varepsilon_n l) \varepsilon_n^3} \sin \frac{\varepsilon_n^2}{m^2} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& -\frac{2}{m^6 v^3} \left\{ \frac{A(m^2 v l - x) D(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} + \frac{2A(m^2 v x) C(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \right\} \cos m^2 v^2 \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& -\frac{4v^2}{l^3} \left\{ \frac{A(\varepsilon_n l - x) D(\varepsilon_n l)}{H(\varepsilon_n l)} + \frac{2A(\varepsilon_n x) C(\varepsilon_n l)}{H(\varepsilon_n l)} \right\} \frac{m^4}{(m^8 v^4 - \varepsilon_n^4) \varepsilon_n^2} \cos \frac{\varepsilon_n^2}{m^2} \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& + \frac{2}{15m^4 v^2} \frac{l^2 (l-x) - (l-x)^3}{l^2} 1 \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) - \frac{8}{15m^4 v^2} \frac{l^2 x - x^3}{l^2} 1 \left(t - 2 \frac{l}{v} \right) \\
& -\frac{2}{m^6 v^3} \left\{ \frac{A(m^2 v l - x) D(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} + \frac{2A(m^2 v x) C(m^2 v l)}{K(m^2 v l)} \right\} \frac{1}{\sin m^2 v l} \sin m^2 v^2 \left(t - 3 \frac{l}{v} \right) \\
& + \frac{4vm^2}{3l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \sin \frac{n\pi}{l} (l-x) + 2 \sin \frac{n\pi}{l} x \right\} \frac{l^5}{(n\pi)^3 (m^4 v^2 l^2 - n^2 \pi^2)} \sin \frac{n^2 \pi^2}{m^2 l^2} \left(t - 3 \frac{l}{v} \right) \\
& + \frac{2}{15m^4 v} \frac{l^2 (l-x) - (l-x)^3}{l^3} \left(t - 3 \frac{l}{v} \right) - \frac{2vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\varepsilon_n l - x) D(\varepsilon_n l) S(\varepsilon_n l)}{H(\varepsilon_n l) \varepsilon_n^3} \sin \frac{\varepsilon_n^2}{m^2} \left(t - 3 \frac{l}{v} \right) \\
& -\frac{8}{15m^4 v} \frac{l^2 x - x^3}{l^3} \left(t - 3 \frac{l}{v} \right) - \frac{4vm^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\varepsilon_n x) C(\varepsilon_n l) S(\varepsilon_n l)}{H(\varepsilon_n l) \varepsilon_n^3} \sin \frac{\varepsilon_n^2}{m^2} \left(t - 3 \frac{l}{v} \right) \dots \dots \dots (20)
\end{aligned}$$

第 6 図

スパン AB, CD のたわみ y_1, y_3 も同様にして求めることができる。式中 $1(t-l/v)$ のような項は $t < (l/v)$ で 0, $t \geq (l/v)$ で 1 なることを意味する。 $(\pi v/l)/p_1 = 0.3$ なる場合スパン BC の中点の振幅を荷重が A

第 7 図

を動き出してから時間 tw/l に対してプロットしたのが第6図で、図中 y_{80} は荷重が BC の中点に作用したときの静的変位で $-11 W l^3 / 960 EI$ である。また $p_1 = \pi^2 \sqrt{EI} / (l^2 \sqrt{\rho A})$ で単純支持の長さ l なるはりの基礎円振動数である。なお数値計算には第3モード以上は省略している。 $(\pi v/l)/p_1 = 0.27$ の場合の実験

第 8 図

結果は第7図のとおりで、実験装置の大略は第8図に示したように はり の中央部に小型のしゃ光板をつけてランプよりの光をさえぎり、この影を回転ドラムに記録せしめた。タイムマークは はり に並べた音叉を使って入れた。また荷重が はり にかかるるときと離れる時にはドラムの前におかれた小型電球の回路が断れるようにしてそれぞれの時刻を記録させた。はりの材料は厚さ 1 mm, 幅 15 mm のセルロイド板で1スパンの長さは 370 mm で、支点は直径 5 mm の黄銅の円筒の中央部を平らに削って、ここにセルロイド板をはりつけ、黄銅円筒の両端はコ型の金具でささえて移動と回転ができるようにした。理論値と実験値は定性的によく合っている。なお Ayre など⁽⁵⁾ は2スパンの場合を計算しているが、その傾向はいまの場合とよくにている。同様にして $(\pi v/l)/p_1$ の種々の値について計算すれば、動荷重による連続はりの振動の一端をうかがうことができる。

注:—

- (1) 昭和 27 年 11 月 23 日 姫路地方臨時大会において講演、原稿受付 昭和 28 年 2 月 9 日。
- (2) 正員, 九州大学応用力学研究所。
- (3) Timoshenko, Vibration Problems in Engineering, p. 352 (2 版, 1937)。
- (4) たとえば桜井時夫, ヘビーサイド演算子, (昭 16)。
- (5) Ayre, Ford and Jacobsen, Transverse Vibration of a Two-Span Beam Under Action of a Moving Constant Force, Appl. Mech., J. (March. 1950)。