625.2.012.8-752

2 軸 鉄 道 車 両 の だ 行 動 と そ の 防 止 法⁽¹⁾

第 1 報 理 論

松 平 精⁽²⁾

Nosing of 2-axle Railway Cars and its Prevention

(1st Reports, Theory)

by Tadashi MATSUDAIRA

After developing the theory of self-excited nosing of 2-axle freight car whose car body is elastically suspended, that is, longitudinally and transversely movable in relation to the axles, the author discusses the general properties involved with the critical nosing speed and the methods of prevention. The theory deals with the stability problem of linear vibration in small displacement. There are two different methods of preventing the nosing of 2-axle cars, namely (a) a method in which the lower stable region is used by making the lateral stiffness of axle sufficiently large, and (b) a method in which the upper stable region is used by making the lateral stiffness of axle as small as possible. It is pointed out that the latter method is recommendable especially for 2-axle freight cars.

1. ま え が き

高速運転中に起る 2 軸貨車の脱線事故は、ほとんどすべての場合、だ行動とよばれる車両のはげしい横動揺が主因をなすものと考えられている。実際、現用の 2 軸貨車は、一般にほぼ 50~60 km/h 以上の高速になると急激に横動揺が増加する性質を持ち、殊に車輪踏面の摩耗がひどいほどの傾向が著しい。修繕後長期間を経た車両の中には、時として高速時にはほとんど連続的にはげしい定常的横動揺をしながら走っているものもある。この種の定常的な横動揺は明らかに自励振動であって、軌道の良否には一義的には関係しない。したがってこの自励的だ行動を防止することこそ 2 軸貨車の高速時の脱線防止の根本策であって、かくして始めて 2 軸貨車の高速化が達成されるものと考えられる。

従来鉄道車両の自励だ行動を理論的に解析したものには、Carter^{(3),(4)}, Cain^{(5),(6),(7)}, Langer^{(8),(9)} および Shamberger⁽⁸⁾ 等の研究がある。しかしこれらはすべて車軸が車体に対して剛にとりつけられている場合のものであって、実際の車両におけるように車軸が車体に弾性的にとりつけられている場合の解析はなされていない。筆者はさきに車軸が台車わくに横方向に弾性支持されている場合の 2 軸台車の自励だ行動の理論を解析したが⁽¹⁰⁾、その後この理論を一般の 2 軸車の場合に拡張し、車軸が横方向のみならず前後方向にも弾性支持された一般的な場合をとり扱った。そして 2 軸車のだ行動の限界速度に関する性質を明らかにすると同時に、だ行動防止法として車軸の横支持弾性を極力

小さくするという新しい方法を提案した。本論文の第 1 報においてはこれ等の理論について述べる。

2. 記号および仮定

主な記号を次のごとく定める (第 1 図参照)。

第 1 図 2 軸車のモデル

$2m$: 車体の質量

m_w : 車輪軸の質量

i_z : 車体の垂直軸まわり回転半径

i_w : 車輪軸の " "

k_1, k_2 : 車輪軸支持装置の 1 軸当りの前後および左右方向のばね定数

$2a$: 車輪とレールの接触点間隔

$2a_1$: 左右ばね間隔, r : 車軸の平均半径

$2b$: 軸距, λ : 車輪の踏面こう配

f_1, f_2 : 車輪方向および車軸方向のクリーブ係数

v : 車両の走行速度 ω : 車軸の回転角速度

ν : だ行動の円振動数 $= 2\pi f$
 ν_y : 車体の横固有振動数 $= \sqrt{k_2/m} = 2\pi f_y$
 $\nu_{\psi\psi}$: 車輪軸のヨーイング振動数
 $= \sqrt{k_1 a_1^2 / m_{\psi} i_{\psi}^2}$
 S : だ行動の波長 $= v/f$
 S_1 : 1 輪軸だ行動の波長
 $L = S_1/2\pi = \sqrt{ar/\lambda}$
 $V = v/\nu L = S/S_1$: 無元速度 (波長比)
 $N = \nu/\nu_y = f/f_y$: 振動数比
 $\bar{N} = \nu/\nu_{\psi\psi} = f/f_{\psi\psi}$: "
 $K = k_2 L/f_2$, $R_1 = k_1 L a_1^2 / f_1 a^2$
 $R = k_1 a_1^2 / k_2 b^2$, $A = f_2 b^2 / f_1 a^2$
 $\epsilon_0 = i_z/b$, $\epsilon_{\psi} = i_{\psi}/b$
 $\mu = m_{\psi}/m$
 y_0 : 車体重心の横変位
 ψ_0 : 車体の偏角

y_1, y_2 : 前後車輪軸重心の横変位
 ψ_1, ψ_2 : 前後車輪軸の偏角

理論を立てるに当り、問題の複雑化を避けるため、次の仮定ないし省略を行う。(1) 理論は微小変位の線形振動の範囲に限定する。したがってフランジ衝突の影響は考えない。(2) 車体はローリングをせず、純粋横振動とヨーイングのみを行うものとする。(3) 車輪の路面こう配は十分小さく、車輪軸の横変化に伴う横傾斜の影響は省略できるものとする。したがって変位に伴う車輪軸重心の上昇および降下に基く重力の復原力の項は省略する。また車軸の傾斜に応じてないばねによって生ずる弾性復原力も無視する。車軸の回転によるジャイロ、モーメントの影響はもちろん考えない。

3. 運動方程式と限界時の解

まず車輪軸に働くクリープ力を考えるに、筆者の前論文“車輪軸のだ行動”⁽¹¹⁾の(36)式*により、 y 軸方向の力 F_y および Z 軸まわりのモーメント M_z は、前後車輪軸それぞれ

$$\left. \begin{aligned} F_{y1} &= -f_2(y_1/v - \psi_1), \\ M_{z1} &= -f_1(a\psi_1/v + \lambda y_1/r)a, \\ F_{y2} &= -f_2(y_2/v - \psi_2), \\ M_{z2} &= -f_1(a\psi_2/v + \lambda y_2/r)a \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

と書けるから、前後車輪軸および車体から成る振動系に対する運動方程式は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} m_{\psi} \ddot{y}_1 + k_2(y_1 - y_0 - b\psi_0) &= -f_2(y_1/v - \psi_1), \\ m_{\psi} \ddot{\psi}_1 + k_1 a_1^2(\psi_1 - \psi_0) &= -f_1(a^2 \dot{\psi}_1/v + a \lambda y_1/r), \end{aligned} \right\}$$

$$V^2 = \frac{(1-N^2)\{1+A-(\mu+A\epsilon^2)N^2\}-N^2(1+\mu-\mu N^2)}{(1-N^2)(1-\mu N^2)+K^2 A N^4(\mu+\epsilon^2-\mu \epsilon^2 N^2)(1+\mu-\mu N^2)} \dots (8)$$

$$\text{および } V^2 = \frac{1-N^2}{1-N^2-K^2 N^4[\{1+A-(\mu+\epsilon^2)N^2\}(1+\mu-\mu N^2)+A(1-N^2)(\mu+\epsilon^2-\mu \epsilon^2 N^2)]} \dots (9)$$

ただし上式中の ϵ は

$$\epsilon^2 = \epsilon_0^2 + \mu \epsilon_{\psi}^2 = (m i_z^2 + m_{\psi} i_{\psi}^2) / m b^2 \dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{\psi} \ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_0 + b\psi_0) &= -f_2(y_2/v - \psi_2), \\ m_{\psi} \ddot{\psi}_2 + k_1 a_1^2(\psi_2 - \psi_0) &= -f_1(a^2 \dot{\psi}_2/v + a \lambda y_2/r), \\ 2m \ddot{y}_0 - k_2(y_1 - y_0) - k_2(y_2 - y_0) &= 0, \\ 2m i_z^2 \ddot{\psi}_0 - k_1 a_1^2(\psi_1 - \psi_0) - k_2 b(y_1 - y_0 - b\psi_0) \\ &\quad - k_1 a_1^2(\psi_2 - \psi_0) + k_2 b(y_2 - y_0 + b\psi_0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

定常振動の解の時間の部分を $e^{j\omega t}$ とおいて、(2) 式の特性方程式を作り、実数部と虚数部をそれぞれ 0 に等置すると結局次式が導かれる。

$$aV^4 - bV^2 + c = 0, \quad eV^2 - f = 0 \dots (3)$$

係数 $a \sim f$ は次のような量である。

$$\left. \begin{aligned} a &= \textcircled{1} \textcircled{3} + K^2 R^2 A, \\ b &= \textcircled{1}(1-N^2) + \textcircled{3}(1+R-\epsilon_0^2 N^2) + \textcircled{2} \textcircled{4}, \\ c &= (1-N^2)(1+R-\epsilon_0^2 N^2), \\ e &= \textcircled{1} \textcircled{4} + \textcircled{2} \textcircled{3}, \\ f &= \textcircled{4}(1+R-\epsilon_0^2 N^2) + \textcircled{2}(1-N^2) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{1} &= 1 + R\epsilon_0^2 N^2 + K^2 A \{ (1+R-\epsilon_0^2 N^2)(1-\mu N^2)(R - \mu \epsilon_{\psi}^2 N^2) - R^2(1-\mu N^2) - (R\mu \epsilon_{\psi}^2 N^2) \}, \\ \textcircled{2} &= K \{ (1+R-\epsilon_0^2 N^2) \{ (1-\mu N^2) + A(R-\mu \epsilon_{\psi}^2 N^2) \} - 1 - R^2 A \}, \\ \textcircled{3} &= (1-N^2) - K^2 A \{ 1 - (1-N^2)(1 - \mu N^2) \} (R - \mu \epsilon_{\psi}^2 N^2), \\ \textcircled{4} &= K \{ (1-N^2) \{ (1-\mu N^2) + A(R-\mu \epsilon_{\psi}^2 N^2) \} - 1 \}, \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

(3) 式を満足する V, N の値を求めれば、限界時の波長比と振動数比が得られる。限界速度と限界振動数は次式によって求められる。

$$v_c = V N \nu_y L, \quad \nu = N \nu_y \dots (6)$$

(3) 式より V, N を求めるには図式解法によらなければならない。それには(3)式の表わす2組の曲線

$$f(V^2, N^2) = 0, \quad g(V^2, N^2) = 0 \dots (7)$$

を $V^2 - N^2$ 図に描いて両曲線の交点を求めればよい。

4. 特別な場合 ($k_1 \rightarrow \infty$ の場合)

前節の(3)式を一般的に計算する前に、實際上重要な特別な場合として、 $k_1 = \infty$ 、すなわち車軸が車体に対して、前後方向に固くとり付けられている場合を考える。このような場合は、実際に軸はり式の台車や Achslenker 付の台車において現われる。

(4), (5) 式に $R = \infty$ とおき、それらを(3)に入れると次式をうる。

によって与えられる量を表わす。

(8), (9) の両式を解くと一般に2個の V, N の

* 前述の仮定(1)により前論文(36)式において $y_c = y/(1-r/a \cdot \lambda) \doteq y$ とする。

限界値が求められる。

一例として $\mu=0$, $l_0=1$ (したがって $l=1$), $A=10$ なる場合を計算する。この場合 $\mu=0$ とすることは定性的には何ら一般性を失わない。(8), (9) の両式を解くには, K のある値に対して V^2-N^2 図を描き両式を表わす曲線の交点を求める。その一例を示せば第2図のごとくである。かくして求めた V および N , すなわち波長比 S/S_1 および振動数比 f/f_v の値を K に対して描くと第3および4図のようになる。第5図は K に対する VN すなわち v_c/v_{yL} を, 第6図は $\sqrt{K}VN$ すなわち $v_c \cdot \sqrt{m/f_2 L}$ の曲線を示したものである。

第2図 V^2-N^2 図 ($k_1 \rightarrow \infty$ の場合)

第3図 V と K の関係 ($k_1 \rightarrow \infty$ の場合)

これらの図によって次のことが明らかにされる。この場合のだ行動の限界速度は2個存在する。だ行動に際しては, 車軸と車体間の相対変位に伴い必ずばねによる復原力が働くから, 低速で安定なことは車輪軸のだ行動理論で明らかなることである⁽¹¹⁾。したがって下部限界速度より下ではだ行動は安定であるが, それを越すと不安定になり, さらに上部限界速度を越すと再び安定になる。下部限界速度は K の増加と共に0から増加するが, K のある値で極大になった後再び減少して, $K=\infty$ で0になる。上部限界速度は K の増加と共に急激に増加して K のある値で ∞ になる。したがっ

第4図 N と K の関係 ($k_1 \rightarrow \infty$ の場合)

第5図 VN と K の関係 ($k_1 \rightarrow \infty$ の場合)

第6図 $\sqrt{K}VN$ と K の関係 ($k_1 \rightarrow \infty$ の場合)

て K が大きい時はある速度でだ行動が起ると, それより高速ではますます激しくなるばかりで, 不安定範囲を抜け切ることができない。それに反して K がごく小さい時は比較的低速でだ行動が起るが, さらに高速にすると, 狭い不安定範囲を突き抜けて再び安定範囲に入り, だ行動は起らなくなるのである。限界時のだ行動の波長と振動数は, 下部限界においては, 車軸の横支持剛性の大きいほど波長は長く, 振動数は低くなる。一方上部限界時の波長と振動数は, 常に下部限

界時の値より大きく、前者は車軸の横支持剛性の増加と共に急激に増加して無限大になる。

特に $k_2 \rightarrow 0$, すなわち車軸が車体に対して前後方向

$$V^2 = \frac{(1-N^2)\{1+A-(\mu+At^2)N^2\}-N^2(1+\mu-\mu N^2)}{(1-N^2)(1-\mu N^2)} \quad (11)$$

および $V=1$ (12)

(12) を (11) 式に入れて N を求めると

$$N^2 = \frac{1+\mu+A(1+t^2) \pm \sqrt{\{1+\mu+A(1+t^2)\}^2 - 4A(\mu+At^2)}}{2(\mu+At^2)} \quad (13)$$

となる。だ行動の限界速度は $v_c = VNv_y L$ によって与えられるから、この場合の限界速度の値は車体の横振動数 $v_y = \sqrt{k_2/m}$ に比例する。だ行動の波長は、(12) 式により

$$S = S_1 = 2\pi\sqrt{ar/\lambda} \quad (14)$$

すなわち 1 輪軸のだ行動の波長に一致する。

次に $k_2 \rightarrow \infty$, すなわち車軸が車体に対して前後左右にかたく固着されている場合は、(8) 式と (9) 式において V が一定値をとるためには、 N は $1/K$ と同位で

$$N=0 \quad (15)$$

でなければならず、したがって (8) 式の K の項は消えて

$$V = \sqrt{1+A} \quad (16)$$

となる。これによってこの場合のだ行動の限界速度は 0 であって、その時の波長は

$$S = S_1\sqrt{1+A} = 2\pi\sqrt{(ar/\lambda)(1+f_2b^2/f_1a^2)} \quad (17)$$

で与えられることがわかる。すなわち台わくによって車軸を前後左右に固く拘束した 2 軸車は、単独の車輪軸と同様に、そのだ行動は常に不安定なのである。ただしその波長は (17) 式で表わされているように 1 輪軸の場合の $\sqrt{1+f_2b^2/f_1a^2}$ 倍になる。

たとえば現用の国鉄の客貨車の正規の車輪について計算すると、 $2a=1.120\text{ m}$, $2r=0.860\text{ m}$, $\lambda=1/20$ であるから、1 輪軸のだ行動の波長は、 $S_1=13.8\text{ m}$ であるが、軸距 2.5 m の台車では、 $f_2=f_1$ と仮定すれば、 $S=34.0\text{ m}$ となり、軸距 3.9 m のワム 23000 形 2 軸有がい車では、 $S=50.0\text{ m}$ となる。ただしこれらの値は台車または車体が完全に剛で車軸の取付にガタがない理想的な場合であって、実際の車両では必ずかなりのガタが存在するから、だ行動の波長は上の計算のように長くはならないで、ほとんど 1 軸の場合に近いのである。

さて第 6 図で明らかにわかるように、2 軸車のだ行動を防止するには、 K をある程度大きくして下部安定範囲を使う方法と、 K をできるだけ小さくして上部安定範囲を使う方法の二つがある。前の方法では車軸の横支持剛性を大きくし（もちろんガタをなくし）、車輪踏面こう配をなるべく小さくしてだ行動の波長を伸ばすことが必要である。それにはこの軸受の使用と特殊な設計と精密な工作とによって車軸の側方ガタをなくし、かつ行きとどいた保守、修繕によって摩擦による

には固定されているが、横方向には極度に柔らかく支持されている場合は、(8) および (9) 式は、 $K=0$ において、次のようになる。

ガタの発生と踏面こう配の増大を防ぐことが必要である。したがってこの方法は客車または電車の台車に対しては行いうるが、貨車に対しては適さない。貨車は一般に平軸受を使っているから、車軸の側方ガタは最初からある程度存在し、使用と共に必ず増大するし、車輪は長期間削正せずに使われるから踏面のこう配は必ずきつくなって（経験によると最初 $1/20$ のものが通常 $1/10$ 程度になる）、だ行動の波長が低下するから、 K の値をある程度以上に大きく保つことは非常に困難だからである。これに反して上部安定範囲を使う方法は、高速になればなるほど、安定がよくなるのみでなく、使用に伴って必ず増加する輪軸の側方ガタや踏面の摩擦は常に限界速度を下げる方向に作用するから、使用と共に安全性が増す結果になるのではなはだ都合である。この場合ごく低速で一度不安定範囲を通過することになるが、それを十分低速にしておけば、だ行動が起っても何ら危険はないので問題にならない。

5. 一般の場合

一般的な場合として、現用の 2 軸有がい車に準じて $\mu=0.2$, $t_0=1$, $t_w=0.3$, $A=10$, $R=0.2$ なる場合の限界速度を計算する。

上記の数値を (4) 式および (5) 式に入れ、 K をパラメータとして (3) 式より V , N を図式解法によって求める。かくして求めた V , N の値より $\sqrt{K}VN$ すなわち $v_c\sqrt{m/f_2}L$ を計算して、 K に対して図

第 7 図 $K=0$ の附近の $\sqrt{K}VN$ と K の関係

示すれば第7図のようになる。この図は特に K の値の小さい範囲だけを示している。

この図によって次のことがわかる。まずだ行動の限界速度は一般に4個存在する。前節でも述べたように下から第1の限界速度以下ではだ行動は安定であり、それを越すと不安定になる。さらに第2の限界速度を越すとまた安定になる。そして第3、第4の限界速度を越すと再び不安定になる。後述の解析で明らかにされるように、第1と第2限界内で起るだ行動は車輪軸の質量にあまり影響されない (μ が0でも起る)、つまり車体側の振動を主とするだ行動である。それに対して第3および第4の限界速度以上で起るだ行動は車輪軸の質量に密接な関係を持つ (μ が0では起らない) 車輪軸自体の振動を主とするだ行動であって、第3の限界は前後車軸が逆位相で、第4の限界は同位相で振動する型のものに対応する (第8図参照)。結局、2軸車のだ行動には、車体が大きく振れる型のもの (これを便宜上“第1次だ行動”または“車体だ行動”と名付ける) と、ほとんど車輪軸のみが顕著に振れる型のもの (これを“第2次だ行動”または“車輪軸だ行動”と名付ける) との2種類があり、後者は更に前後軸の振動が同位相のものと逆位相のものとに分けられるが、同位相のものは逆位相のものより常に限界速度が高いので、実際上は逆位相のもののみを考えればよい。 K に対する第1次だ行動限界速度の変化の有様は前節で述べたところと定性的には全く同一である。一方第2次だ行動の限界速度はほぼ $\sqrt{K}$ に比例して単調に増加する。

さてだ行動防止法として、前節で述べたように上部安定範囲を使う場合は、この第2次だ行動に深い注意を払わねばならない。今の計算では K を0に近づけると、車輪軸だ行動の限界速度が0になるが、これは $R = k_1 a_1^2 / k_2 b^2$ を一定におさえているので、 $K = k_2 L / f_2 \rightarrow 0$ に伴い k_1 と k_2 とを同時に0に近づけることになるためであって、もし k_1 を一定に保って k_2 だけ0に近づければ、第2次だ行動の限界速度は $K \rightarrow 0$ においても0にならずに一定値をとるのである。そして $k_1 = \infty$ の場合は、前節に示したとおりに、その限界速度は無限大になる。したがって第1次だ行動を防止するために上部安定範囲を使う場合は、車軸の左右方向*

* の支持剛性は極力小さくすると同時に、第2次だ行動が起らないように前後方向の支持剛性を十分大きくすることが必要である。

6. $k_2 \rightarrow 0$ の場合

前節において車軸の横支持剛性を極力小さくして上部安定範囲を使うことが2軸車のだ行動防止法として実用上有望なことを述べた。そこで $k_2 \rightarrow 0$ の附近のことをもっと詳しく調べておく必要がある。

最初に R を一定にして K を0に近づけた場合、すなわち k_2 と共に k_1 をも0に近づけた場合を考える。(4)、(5)式において K^2 の項を省略して(3)式の第2式に入れると、 V は

$$V=1 \dots\dots\dots (18)$$

すなわち、この場合のだ行動の波長は1軸の場合と同じになる。一方(3)の第1式より次式が導かれる。

$$\begin{aligned} & [(1+R-\epsilon_0^2 N^2)\{1+RA-\mu(1+A\epsilon_w^2)N^2\} \\ & -1-R^2 A] \times [(1-N^2)\{1+RA \\ & -\mu(1+A\epsilon_w^2)N^2\}-1] - R^2 A = 0 \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

この式は N^2 の4次式であるから、これより一般に N の4根が求められ、それに対応して4個の限界速度が存在する。下から第1および第2の限界速度の間では第1次だ行動が起り、第3および第4限界速度より上では第2次だ行動が起ることは前節で述べたとおりである。そして(19)式は K を含んでいないから、 N の値は K に無関係である。すなわち K がごく小さい場合、限界振動数比は K に無関係に一定値をとる。いかえれば限界振動数は車体の横固有振動数 ν_y に比例する。その結果限界速度も ν_y に比例する。したがって、 $K \rightarrow 0$ にすると4個の限界速度はすべて0になる。

次に k_1 を一定にして k_2 を0に近づけた場合を考える。これは、車軸を前後方向にはある程度強く支持した上で左右方向には極度に柔らかく支持した場合であって、車軸に側方ガタがある場合は正にこれに該当するので、実際上重要である。この場合も(18)式はなり立つ。しかし $k_2 \rightarrow 0$ に従って $R \rightarrow \infty$ となるから(19)式は

$$\{1-\mu(1+A\epsilon_w^2)N^2+A(1-\epsilon_0^2 N^2)\}(1-N^2)-1=0$$

となる。これより N^2 を求めると

$$N^2 = \frac{1+A+A\epsilon_0^2+\mu(1+A\epsilon_w^2) \pm \sqrt{\{1+A+A\epsilon_0^2+\mu(1+A\epsilon_w^2)\}^2-4A\{A\epsilon_0^2+\mu(1+A\epsilon_w^2)\}}}{2\{A\epsilon_0^2+\mu(1+A\epsilon_w^2)\}} \dots\dots\dots (20)$$

を得る。この式によって第1次だ行動の下限と上限の振動数比が与えられ、これに対応して

$$v_0 = VN_y L = N_y L \dots\dots\dots (21)$$

によって下部および上部限界速度が求められる。 N の値は(20)式で表わされているように、主として A と ϵ_0 に関係する。 μ の影響は比較的小さいから $\mu=0$ として、 A をパラメータとして ϵ_0 に対する N の値を図示すると第8図が得られる。

この図によって、第1次だ行動の不安定範囲を狭く

するためには、 A の値は大きいほどよいが、 ϵ_0 にはある最適の値があることがわかる。この値を見出すために(20)式から N^2 の上限値と下限値の差を作って、 ϵ_0^2 について微分して0とおけば、次の関係式をうる。

$$\epsilon_0^2 = \frac{1}{A} \left\{ \frac{(A+1)^2}{A-1} - \mu(1+A\epsilon_w^2) \right\} \dots\dots\dots (22)$$

この式を満足する ϵ_0 の値のとき不安定範囲は最小になる。この式の μ の項は通常第1項に比べてはるかに小さいからこれを省略し、かつ $A^2 \gg 1$ なることに

第8図 $k_2 \rightarrow 0$ の場合の N と l_0 の関係

留意して (22) 式をかき直すと、次の近似式をうる。

$$l_0 = 1 + 3/2A \quad (23)$$

$f_1 = f_2$ とすれば、この式は次のように表わせる。

$$i_z/b = 1 + 3/2 \cdot a^2/b^2 \quad (24)$$

これによって第1次だ行動が不安定な速度の範囲をほぼ最小にするための車体回転半径 i_z と軸距 b の関係が与えられる。

ワム 23000 形 2 軸貨車を例にとると、 $2a = 1.12\text{m}$ 、 $2b = 3.90\text{m}$ であるから、(24) 式から $i_z/b = 1.12$ となる。これに対して実際の i_z/b の値は空車の時で約 1.27 である。したがってこの車に対して $k_2 \rightarrow 0$ によるだ行動防止法を適用しようとする場合は、軸距を今少し増した方がよいことになる。しかし第8図でわかるように、軸距を大きくしすぎると l_0 が小さくなって第1次だ行動の上限が急に上昇して不都合になるので、実際には (24) 式で与えられる値より幾分小さ目にする方がよい。

(20) 式はつぎのように簡単化することができる。すなわち、普通の 2 軸貨車では A の値はだいたい 10 以上になることに留意して、式中の $1+A$ を A とかくと、

$$N^2 = A / \{ A l_0^2 + \mu(1 + A l_0^2) \}, \quad 1 \quad (25)$$

さらに $A l_0^2$ に対して $\mu(1 + A l_0^2)$ を省略すれば

$$N = 1/l_0, \quad 1 \quad (26)$$

したがって限界速度の近似式として

$$v_c = b/i_z \cdot \nu_y L, \quad \nu_y L \quad (27)$$

をうる。ただしこれらの近似式は $A l_0^2 + \mu(1 + A l_0^2) - A$ が 0 か、0 に近い場合は大きな誤差を生ずるから注意を要する。たとえば、 $l_0 = 1$ の場合は誤差が大きいことは第8図でも明らかである。

(27) 式からこの場合の限界振動数の一つは、ほぼ車体の横固有振動数に一致し、他の一つはそれに b/i_z 倍した値（これは k_1 が特に大きくない場合は、車体のヨーイングの振動数に近い）に一致することがわかる。この二つの振動数の間でだ行動は不安定になって

車体は大きく振れる。このことはあたかも車輪軸が車体の振動に無関係に幾何学的だ行動を行っていて、車体側はそれによって強制振動をさせられ、車体の固有振動が共振に陥った状態に似ている。ドイツにおける 2 軸貨車のだ行動防止の考え方⁽¹²⁾ がこのような強制振動の観点から出発しているにもかかわらず、結果として成功している事実は、上記の理由によるものと解釈される。もちろん k_2 が大きいところでは、このような強制振動的な考え方ではだ行動の現象を全く説明できないことは前節の解析で明らかにされているとおりである。

7. 第2次だ行動

k_1 を一定にして k_2 を 0 に近づけた場合、第1次だ行動の限界振動数比は (20) 式で与えられるが、第2次だ行動のそれは 2 個共無限大になる。それは $k_2 \rightarrow 0$ に従って $\nu_y \rightarrow 0$ になるためであって ($N = \nu/\nu_y \rightarrow \infty$)、実は限界振動数 ν は一定値をとり、したがって限界速度 v_c も一定値をとるのである。すなわち車軸の前後支持剛性を一定に保って、左右支持剛性を 0 に近づけると、第1次だ行動の限界速度は ν_y に比例して 0 に近づくが、第2次だ行動は ν_y に無関係に一定値に近づくのである。このことをもっと詳しく調べるためには、車体の横振動数 $\nu_y = \sqrt{k_2/m}$ の代りに、 $k_2 = 0$ のときの車輪軸の車体に対するヨーイングの振動数

$$\nu_{w\psi} = \sqrt{k_1 a_1^2 / m_w i_w^2} \quad (28)$$

を使い、 $N = \nu/\nu_y$ の代りに

$$\bar{N} = \nu/\nu_{w\psi} \quad (29)$$

なる振動数比を使い、さらに $R = k_1 a_1^2 / k_2 b^2$ の代りに

$$R_1 = k_1 L a_1^2 / f_1 a^2 \quad (30)$$

を使えばよい。途中の計算を省略して最後の V, N の式をかくと、次のとおりである。

$$V^2 = 1 / \{ 1 - (R_1 / A l_0^2)^2 N^4 \} \quad (31)$$

ここに $\bar{N}$ は

$$\bar{N}^2 = A l_0^2 / (1 + A l_0^2) \quad (32)$$

$$\text{および } = A l_0^2 / (1 + A l_0^2) + \mu l_0^2 / l_0^2 \quad (33)$$

この場合の限界速度および限界振動数は次式で計算される。

$$v_c = V \bar{N} \nu_{w\psi} L, \quad \nu = \bar{N} \nu_{w\psi} \quad (34)$$

V と $\bar{N}$ は (31) と (32) 式および (31) と (33) 式で与えられているように 2 組存在するから、それに対応して二つの限界速度が存在する。この二つの限界に

第9図 第2次だ行動の二つの形式

おけるだ行動がいかなる種類のものであるかは、簡単な考察によって知ることができる。すなわち、車体および車輪軸が前後対称であり、 $k_2 \rightarrow 0$ であることから、起り得るだ行動は第9図に示す2種類であることが明らかである。

(a) の型は前後軸が逆位相で、だ行動をするものであって、この型では前後軸からばね k_1 によって車体へ伝えられるヨーイングモーメントは相殺するため車体は全然振動しない。これに対して (b) の型は前後軸が同位相でだ行動をするものであって、この型では前後軸から加えられるヨーイングモーメントに対応して車体はヨーイングを行う。そして限界振動数比 (32) 式には車体質量の影響が入らないが、(33) 式には車体の回転半径が関係していることから、前者は (a) 型に、後者は (b) の型に対応することがわかる。

(32) 式と (33) 式とを比べて見れば明らかのように、 $V, \bar{N}$ は常に (b) 型の方が (a) 型より大きく、し

たがって、限界速度も常に (b) 型の方が大きい。したがって、実際問題としては (a) 型のみを考えればよいのである。

第10図は (31) および (32) 式を使って、 $A=10$ 、 $i_w=0.3$ の場合の R_1 に対する $V, \bar{N}, V\bar{N}=v_c/\nu_w\psi L$ 、 $\sqrt{R_1} V\bar{N}=v_c\sqrt{m_w i_w^2/f_1 L a^2}$ の関係を示したものである。なお、図中の点線は (31)、(33) 式によって前後軸同位相の (b) 型の車輪軸だ行動の限界を示したもので、前述のごとくその限界速度は常に前後軸逆位相の (a) 型の車輪軸だ行動のそれ (実線) より高いから問題にしないのでよい。

これらの図によって次のことがわかる。この場合の限界振動数比は R_1 に無関係に一定である。換言すれば限界振動数は前後支持ばねによる車輪軸のヨーイング振動数 $\nu_w\psi=\sqrt{k_1 a_1^2/m_w i_w^2}$ に比例する。限界時の波長は R_1 が小さい処では1軸だ行動の波長に等しいが、 R_1 の増加と共に次第に増加し、(31) および (32) 式で明らかのように、

$$R_1 = 1 + A i_w^2 \dots\dots\dots (35)$$

において無限大になる。この式に $R_1 = k_1 a_1^2 L / f_1 a^2$ 、 $A = f_2 b^2 / f_1 a^2 = b^2 / a^2$ 、 $i_w^2 = i_w^2 / b^2$ を入れて書き直すと

$$k_1 = \frac{f_1}{L} \frac{a^2 + i_w^2}{a_1^2} \dots\dots\dots (36)$$

となる。すなわち車軸の前後方向の支持剛性を (36) 式で与えられる値より大きくしておけば、車輪軸だ行動は完全に消滅させることができるのである。実際の2軸貨車の場合、 f_1 はだいたい 1000 t の程度で、 $L=2$ m、 $(a^2 + i_w^2)/a_1^2 \approx 1$ であるから、(36) 式より、 $k_1 \approx 500$ t/m = 500 kg/mm となる。すなわち車軸の前後方向の支持剛性をだいたい 500 kg/mm 以上にすれば第2次だ行動を消滅させることができる。

R_1 がごく小さい場合は、 $V \approx 1$ と見なして次の近似式が導かれる ($f_1 = f_2$ とする)。

$$\begin{aligned} v_c &\approx \bar{N} \nu_w \psi L = \sqrt{\frac{A i_w^2}{1 + A i_w^2}} \nu_w \psi L \\ &= \frac{i_w/a}{\sqrt{1 + i_w^2/a^2}} \nu_w \psi L \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

8. む す び

車軸を車体に対して前後左右に弾性支持した2軸貨車の自励だ行動の理論を展開し、だ行動の限界速度に関する一般性質ならびに、だ行動防止法について論じた。また車軸の横支持剛性がごく小さい場合のだ行動限界速度の近似計算式を導いた。

この理論は、微小変位の線形振動の安定問題をとり扱ったが、さらにクリープ力の非線形性、車輪のフランジ衝突などを考慮して、大変位の非線形振動の問題として解析することが必要であろう。また自励だ行動の外にレールの不整に基づく強制だ行動の理論を解明することも実際問題としてきわめて必要である。

注：一

(1) 昭和27年3月10日 第535回講演会において講演、原稿

第10図 $k_2 \rightarrow 0$ の場合の第2次だ行動の限界値

受付 昭和 28 年 4 月 28 日。

- (2) 正員, 鉄道技術研究所。
- (3) F. W. Carter, On the Stability of Running of Locomotive, Proc. Roy. Soc. Vol. 112, 1928, p. 583.
- (4) F. W. Carter, The Running of Locomotives with Reference to their Tendency to Derail. Inst. Civil Eng. selected paper No. 91. 1930.
- (5) B. S. Cain, Safe Operation of High Speed Locomotives, Trans. A.S.M.E. Vol. 59, No. 8, 1935, p. 471.
- (6) B. S. Cain, Vibration of Rail and Road Vehicles, Pitman Pub. Corp. New York, 1940.
- (7) B. S. Cain, Notes on the Dynamics of Electric Locomotives. J. Appl. Mech. 1941.
- (8) B. F. Langer and J. P. Shamberger, Lateral

Oscillations of Rail Vehicles. A.S.M.E. Vol. 57, No. 8, 1935, p. 481.

- (9) B. F. Langer, Dynamic Stability of Railway Trucks. S. Timoshenko 60th Anniversary Volume. MacMillan Co. 1938.
- (10) 松平精, 2 軸台車のだ行動に関する基礎的理論的考察, 昭 22 (1947)—12—17. 第 3 回高速台車振動研究会資料 63.
- (11) 松平精, 車輪軸のだ行動, 鉄道業務研究資料 9 巻 19 号, 1952—11.
- (12) Sperling, Die Laufeigenschaften der Eisenbahnwagen waagrecht quer zum gleis. Glasers Annalen 1950—5, 6, 8. [Der Lauf der Eisenbahnwagen. VDI Zeitsch. Bd. 92, Nr. 4. 1951—2]

625.2.034

2 軸 鉄 道 車 両 の だ 行 動 と そ の 防 止 法 ⁽¹⁾

第 2 報 模 型 実 験

松 平 精 ⁽²⁾

Nosing of 2-axle Railway Cars and its Prevention

(2nd Report, Model Experiment)

by Tadashi MATSUDAIRA

Model experiments were carried out on a 1/10 model of the WAMU type box car for ascertaining the result, described in the previous paper, of the theoretical analysis of the general characteristics of the self-excited nosing of a two-axle railway car and the methods for the prevention of such motion. It was shown that the agreement between the theoretical and the experimental values of the critical nosing speed is quite satisfactory not only qualitatively, but fairly good quantitatively when the lateral suspension stiffness of axle is sufficiently small.

1. ま え が き

第 1 報に述べた 2 軸車のだ行動の理論結果を実証するため横型実験を行った。本報ではこの実験の結果について述べる。

2. 実験装置および方法

第 1 図 2 軸貨車の模型

模型はワム 23000 形式 2 軸有がい車の 1/10 模型で、その外観は第 1 図に示す。車体は黄銅、車輪軸は軟鋼、ばねは磷青銅で作った。その要目は第 1 表および第 2 表のごとくである。ばねつり装置の詳細は第 2

第 2 図 ばねつり装置詳細