539.4.013 : 624.043.7

三 次 元 応 力 集 中 の 一 解 法⁽¹⁾

—弾性体の中にある回転だ円体形空窩附近の応力分布—

宮 本

博⁽²⁾

Stress Concentration Around a Spheroidal Cavity in an Infinite Elastic Body

by Hiroshi MIYAMOTO

In the previous report the author got general solution and solved several examples. But the general solution is not proper to solve practical problems, because in order to determine unknown coefficients he should solve simultaneous linear equations of infinite dimensions. In this report the author reforms the general solution, and by this improvement he can get unknown coefficients by solving finite equations. He solves several examples and gets same solutions as those of H. Neuber's.

1. 緒 言

さきに⁽³⁾⁽⁴⁾一般解および二三の例についての解を示したが、この一般解は必ずしも計算に都合ではない。すなわち、一般解では体積膨脹率 Δ は

$$\Delta = \sum_{m,n} A_{mn} Q_n^m(\cosh \alpha) P_n^m(\cos \beta) \frac{\cos m\gamma}{\sin m\gamma} \dots\dots\dots (1)$$

ただし P_n^m , Q_n^m はそれぞれ Legendre の第 1 種、第 2 種の陪かん数、 $n \geq m \geq 0$ の整数、 A_{mn} は未定係数である。

所が、回転だ円体の回転軸方向に一樣な引張りを受ける弾性体の場合には

$$\Delta = A \left(Q_0 P_0 - \frac{\cosh \alpha}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta} \right) \dots\dots\dots (2)$$

の形におくと解ける。これは Neumann の公式⁽⁵⁾を使って計算すると

$$\Delta = - \sum_{m=1}^{\infty} A(4m+1) Q_{2m} P_{2m} \dots\dots\dots (2a)$$

と無限級数の形で表わされる。すなわち、 Δ を(1)の形で書くと、係数 A_{mn} を決定するためには、無限次元の連立一次方程式を解かなければならない。これを最初から(2)のような形で求めるために次の工夫をする。

2. 一般解の改良

一般解の中 $\bar{w}_i'$, u_i' はそのままできしつかえないが、 Δ を次の形におく。

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{m,n} A_{mn} \frac{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta}{h^2} Q_n^m P_n^m \frac{\cos m\gamma}{\sin m\gamma} \dots\dots\dots (3) \\ &= \sum_{m,n} \{a_n a_{n+1} A_{mn} - b_{n+1} b_{n+2} A_{m,n+2}\} \end{aligned}$$

$$\times \frac{Q_{n+2}^m P_n^m - Q_n^m P_{n+2}^m}{h^2} \frac{\cos m\gamma}{\sin m\gamma} \dots\dots\dots (3a)$$

ただし $h^2 = \cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta$,

$$a_n = (n-m+1)/(2n+1), \quad b_n = (n+m)/(2n+1)$$

3. 特殊な Δ に対する解

以下の計算に必要な、特殊の Δ に対する回転成分および変位成分を求めておく。 $m=0$ は回転だ円体の回転軸方向の一樣な引張り、 $m=1$ は純粋曲げ、純粋せん断、 $m=2$ は単純せん断の場合に必要である。

3.1 $m=0$ の場合

$$A_1 = \frac{1}{\cosh \alpha - \cos \beta}, \quad A_2 = \frac{1}{\cosh \alpha + \cos \beta},$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) = \frac{\cosh \alpha}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta},$$

$$A_4 = \frac{1}{2}(A_1 - A_2) = \frac{\cos \beta}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta}$$

に対する回転および変位成分を求める。

3.1.1 回 転 平 衡 方 程 式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \sinh \alpha \sin \beta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} - \frac{\partial \bar{w}_1'}{\partial \beta} &= 0, \\ \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \sinh \alpha \sin \beta \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} + \frac{\partial \bar{w}_2'}{\partial \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

から

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_1' &= \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\cosh \alpha \cos \beta - 1}{\cosh \alpha - \cos \beta}, \\ \bar{w}_2' &= \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\cosh \alpha \cos \beta + 1}{\cosh \alpha + \cos \beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

を得る。 $(\bar{w}_i')$ の suffix は A_i の suffix に相当する。したがって

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_3' &= \frac{1}{2}(\bar{w}_1' + \bar{w}_2') = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sinh^2 \alpha \cos \beta}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta} \\ \bar{w}_4' &= \frac{1}{2}(\bar{w}_1' - \bar{w}_2') = - \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\cosh \alpha \sin^2 \beta}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

3.1.2 変位成分 変位と A , $\bar{w}'$ の間には次式が成立する。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sinh \alpha \sin \beta u_{\alpha}') + \frac{\partial}{\partial \beta} (\sinh \alpha \sin \beta u_{\beta}') \\ = (\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta) \sinh \alpha \sin \beta A \dots \dots \dots (7) \\ \frac{\partial u_{\beta}'}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_{\alpha}'}{\partial \beta} = \frac{\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\sinh \alpha \sin \beta} \cdot 2 \bar{w}' \dots (8) \end{aligned} \right.$$

これに A_3 , $\bar{w}_3'$ の値を代入して

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha 3}' &= \frac{\lambda+3\mu}{2\mu} \sinh \alpha, \\ u_{\beta 3}' &= \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \cosh \alpha \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

を得る。同様に A_4 , $\bar{w}_4'$ の値を代入して

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha 4}' &= -\frac{\lambda+2\mu}{\mu} \frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha} \cos \beta, \\ u_{\beta 4}' &= -\frac{\lambda+3\mu}{4\mu} \frac{\cos 2\beta}{\sin \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

3.2 $m=1$ の場合

$$A_1 = \frac{\sin \beta}{\sinh \alpha} \frac{\cos \gamma}{\cosh \alpha - \cos \beta},$$

$$A_2 = \frac{\sin \beta}{\sinh \alpha} \frac{\cos \gamma}{\cosh \alpha + \cos \beta},$$

$$\bar{w}_{\gamma 2}' = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin \beta}{\sinh \alpha} \frac{\cosh \alpha \cos \beta + 1}{\cosh \alpha + \cos \beta} \cos \gamma \dots \dots \dots (13)$$

を得る。したがって

$$\bar{w}_{\gamma 3}' = \frac{1}{2} (\bar{w}_{\gamma 1}' + \bar{w}_{\gamma 2}') = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sinh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \gamma}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta} \dots \dots \dots (14)$$

$$\bar{w}_{\gamma 4}' = \frac{1}{2} (\bar{w}_{\gamma 1}' - \bar{w}_{\gamma 2}') = -\frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\cosh \alpha \sin^3 \beta \cos \gamma}{\sinh \alpha (\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta)} \dots \dots \dots (15)$$

3.2.1.2 $\bar{w}_{\alpha}'$, $\bar{w}_{\beta}'$ $\bar{w}_{\alpha}'$, $\bar{w}_{\beta}'$ は次式から求まる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_{\beta}'}{\partial \gamma} &= -\frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \sinh \alpha \sin \beta \frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{w}_{\gamma}'}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial \bar{w}_{\alpha}'}{\partial \gamma} &= \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \sinh \alpha \sin \beta \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial \bar{w}_{\gamma}'}{\partial \alpha} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

これから

$$\bar{w}_{\alpha 1}' = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sinh^2 \alpha}, \quad \bar{w}_{\beta 1}' = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin \gamma}{\sinh \alpha} \dots \dots \dots (17)$$

$$\bar{w}_{\alpha 2}' = -\frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sinh^2 \alpha}, \quad \bar{w}_{\beta 2}' = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin \gamma}{\sinh \alpha} \dots \dots \dots (18)$$

したがって

$$\bar{w}_{\alpha 3}' = 0, \quad \bar{w}_{\beta 3}' = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin \gamma}{\sinh \alpha} \dots \dots \dots (19)$$

$$\bar{w}_{\alpha 4}' = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sinh^2 \alpha}, \quad \bar{w}_{\beta 4}' = 0 \dots \dots \dots (20)$$

3.2.2 変位成分

3.2.2.1 u_{γ}' 計算に便利のため $u_{\gamma 3}'$, $u_{\gamma 4}'$ を求める。

u_{γ}' は次の偏微分方程式を満す。

$$\frac{1}{\sinh \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sinh \alpha \frac{\partial u_{\gamma}'}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \times \left(\sin \beta \frac{\partial u_{\gamma}'}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{1}{\sinh^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) \frac{\partial^2 u_{\gamma}'}{\partial \gamma^2}$$

$$A_3 = \frac{\sin \beta}{\sinh \alpha} \frac{\cosh \alpha \cos \gamma}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta},$$

$$A_4 = \frac{\sin \beta}{\sinh \alpha} \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta}$$

に対する回転成分および変位成分を求める。

3.2.1 回転成分

3.2.1.1 $\bar{w}_{\gamma}'$ $\bar{w}_{\gamma}'$ は次の偏微分方程式を満足する。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sinh \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sinh \alpha \frac{\partial \bar{w}_{\gamma}'}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \\ & \times \left(\sin \beta \frac{\partial \bar{w}_{\gamma}'}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{1}{\sinh^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}_{\gamma}'}{\partial \gamma^2} \\ & = -\frac{\lambda+2\mu}{\mu} \left(\cosh \alpha \sin \beta \frac{\partial A}{\partial \beta} \right. \\ & \quad \left. - \sinh \alpha \cos \beta \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right) \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

A_1 に対して

$$\bar{w}_{\gamma 1}' = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin \beta}{\sinh \alpha} \frac{\cosh \alpha \cos \beta - 1}{\cosh \alpha - \cos \beta} \cos \gamma \dots \dots \dots (12)$$

A_2 に対して

$$\begin{aligned} & = -\frac{\lambda+\mu}{\mu} (\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta) \frac{\partial A}{\partial \gamma} \\ & + 4(\sinh \alpha \cos \beta \bar{w}_{\alpha}' - \cosh \alpha \sin \beta \bar{w}_{\beta}') \end{aligned} \dots \dots \dots (21)$$

A_4 , $\bar{w}_{\alpha 4}'$, $\bar{w}_{\beta 4}'$ の値を右辺に代入して

$$u_{\gamma 4}' = -\frac{3\lambda+5\mu}{6\mu} \frac{\sin \beta \cos \beta \sin \gamma}{\sinh \alpha} \dots \dots \dots (22)$$

を得る。また A_3 , $\bar{w}_{\alpha 3}'$, $\bar{w}_{\beta 3}'$ の値を代入して

$$u_{\gamma 3}' = \frac{\lambda+3\mu}{2\mu} \frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha} \sin \beta \cos \gamma \dots \dots \dots (23)$$

を得る。

3.2.2.2 u_{α}' , u_{β}' u_{α}' , u_{β}' は次式から求まる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{\beta'}'}{\partial \gamma} &= \frac{\partial u_{\gamma'}'}{\partial \beta} - 2 \sinh \alpha \sin \beta \bar{\omega}_{\alpha'}', \\ \frac{\partial u_{\alpha'}'}{\partial \gamma} &= \frac{\partial u_{\gamma'}'}{\partial \beta} + 2 \sinh \alpha \sin \beta \bar{\omega}_{\beta'}' \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

から

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha_4'} &= -\frac{3\lambda+5\mu}{6\mu} \frac{\cosh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \gamma}{\sinh^2 \alpha}, \\ u_{\beta_4'} &= \frac{3\lambda+5\mu}{6\mu} \frac{\cos \gamma}{\sinh \alpha} + \frac{1}{3} \frac{\sin^2 \beta \cos \gamma}{\sinh \alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots(25)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha_3'} &= \frac{\lambda+3\mu}{2\mu} \frac{\sin \beta \cos \gamma}{\sinh^2 \alpha} - \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \sin \beta \cos \gamma, \\ u_{\beta_3'} &= -\frac{\lambda+3\mu}{2\mu} \frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha} \cos \beta \cos \gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots(26)$$

3.3 m=2 の場合

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\sin^2 \beta}{\sinh^2 \alpha} \frac{1}{\cosh \alpha - \cos \beta} \cos 2\gamma, \\ d_2 &= \frac{\sin^2 \beta}{\sinh^2 \alpha} \frac{1}{\cosh \alpha + \cos \beta} \cos 2\gamma, \\ d_3 &= \frac{\sin^2 \beta}{\sinh^2 \alpha} \frac{\cosh \alpha}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta} \cos 2\gamma, \\ d_4 &= \frac{\sin^2 \beta}{\sinh^2 \alpha} \frac{\cos \beta}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta} \cos 2\gamma, \end{aligned}$$

($\sin 2\gamma$ は後の計算を考えてつけ加えておく。 $m=1$ のときも同様に $\sin \gamma$ をあわせ考えることは容易であるが、さし当り不必要であるから加えなかった。) に対する回転成分、変位成分を求める。

3.3.1 回転成分

3.3.1.1 $\bar{\omega}_{\gamma'}$ 式 (11) より

$$\bar{\omega}_{\gamma_1'} = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin^2 \beta}{\sinh^2 \alpha} \frac{\cosh \alpha \cos \beta - 1}{\cosh \alpha - \cos \beta} \cos 2\gamma \dots\dots(27)$$

$$\bar{\omega}_{\gamma_2'} = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin^2 \beta}{\sinh^2 \alpha} \frac{\cosh \alpha \cos \beta + 1}{\cosh \alpha + \cos \beta} \cos 2\gamma \dots\dots(28)$$

3.3.1.2 $\bar{\omega}_{\alpha'}$, $\bar{\omega}_{\beta'}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_{\alpha_1'} &= \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin^2 \beta}{\sinh^3 \alpha} \frac{\sin 2\gamma}{-\cos}, \\ \bar{\omega}_{\beta_1'} &= \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin \beta}{\sinh^2 \alpha} \frac{\sin 2\gamma}{-\cos} \end{aligned} \right\} \dots\dots(29)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_{\alpha_2'} &= -\frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin^2 \beta}{\sinh^3 \alpha} \frac{\sin 2\gamma}{-\cos}, \\ \bar{\omega}_{\beta_2'} &= \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin \beta}{\sinh^2 \alpha} \frac{\sin 2\gamma}{-\cos} \end{aligned} \right\} \dots\dots(30)$$

したがって

$$\bar{\omega}_{\alpha_3'} = 0, \bar{\omega}_{\beta_3'} = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin \beta}{\sinh^2 \alpha} \frac{\sin 2\gamma}{-\cos} \dots\dots(31)$$

$$\bar{\omega}_{\alpha_4'} = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \frac{\sin^2 \beta}{\sinh^3 \alpha} \frac{\sin 2\gamma}{-\cos}, \bar{\omega}_{\beta_4'} = 0 \dots\dots(32)$$

3.3.2 変位成分 (21) より

$$\left. \begin{aligned} u_{\gamma_3'} &= \frac{1}{3} \frac{\cosh \alpha \sin^2 \beta}{\sinh^2 \alpha} \frac{\sin 2\gamma}{-\cos}, \\ u_{\gamma_4'} &= -\frac{2\lambda+3\mu}{5\mu} \frac{\sin^2 \beta \cos \beta}{\sinh^2 \alpha} \frac{\sin 2\gamma}{-\cos} \end{aligned} \right\} \dots\dots(33)$$

と (24) より

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha_3'} &= -\frac{3\lambda+5\mu}{6\mu} \frac{\sin^2 \beta \cos 2\gamma}{\sinh \alpha \sin} \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{\sin^2 \beta \cos 2\gamma}{\sinh^3 \alpha \sin}, \\ u_{\beta_3'} &= -\frac{1}{3} \frac{\cosh \alpha}{\sinh^2 \alpha} \sin \beta \cos \beta \frac{\cos 2\gamma}{\sin} \\ u_{\alpha_4'} &= -\frac{2\lambda+3\mu}{5\mu} \frac{\cosh \alpha}{\sinh^3 \alpha} \sin^2 \beta \cos \beta \frac{\cos 2\gamma}{\sin} \\ u_{\beta_4'} &= \frac{2\lambda+3\mu}{5\mu} \frac{\sin \beta \cos 2\gamma}{\sinh^3 \alpha \sin} \\ &\quad - \frac{\lambda-\mu}{10\mu} \frac{\sin^3 \beta \cos 2\gamma}{\sinh^2 \alpha \sin} \end{aligned} \right\} \dots\dots(35)$$

を得る。以下回転だ円体状空窩を有する弾性体が無限遠方で種々の応力を受ける場合を考える。

4. 一様な引張り

回転だ円体の回転軸方向に一様な引張応力を受ける場合を考える。

第1図 一様な引張り

4.1 境界条件 (以下 B. C. と略記する)

$$\text{B. C. } \begin{cases} \alpha = \infty & \sigma_{zz} = p \\ \alpha = \alpha_0 & \hat{\alpha}\hat{\alpha} = \hat{\alpha}\hat{\beta} = \hat{\alpha}\hat{\gamma} = 0 \text{ (空窩表面)} \end{cases} \dots\dots(36)$$

これを扁長回転だ円体座標に書き直し, “Störspannung” の B. C. に書き直すと,

$$\alpha = \infty \quad \text{応力成分} \rightarrow 0$$

$$\alpha = \alpha_0,$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}\hat{\alpha} &= -p \frac{\sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \beta}{h_0^2}, \\ \hat{\alpha}\hat{\beta} &= 2p \frac{\sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \sin \beta \cos \beta}{h_0^2}, \\ \hat{\alpha}\hat{\gamma} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(37)$$

$$\text{ただし } h_0^2 = \cosh^2 \alpha_0 - \cos^2 \beta.$$

4.2 d , $\bar{\omega}_{\gamma'}$, $u_{\gamma'}$ の決定 d の m, n は次の

ようにして決定する。(3a)と(37)を見比べて、まず $m=0$ (このことは回転軸に対して軸対称のことである。), 次に(37)の分子の $\cos \beta$ の最高べきが2であるから(3a)の式で $n=0$ とする。 $\bar{w}_\gamma', u_\gamma'$ の m, n は一般解⁽³⁾から決定する。すなわち

$$\Delta = A_{00} \frac{Q_2^0 P_0^0 - Q_0^0 P_2^0}{h^2} = A_{00} \frac{Q_2 P_0 - Q_0 P_2}{h^2},$$

$$\bar{w}_\gamma' = 0, u_\gamma' = C_{00} Q_0^0 P_0^0 + C_{02} Q_2^0 P_2^0 = C_{00} Q_0 P_0 + C_{02} Q_2 P_2 \dots (38)$$

Δ の Q_n, P_n にそれぞれの値を代入して整理すると

$$\Delta = \frac{3}{2} A_0 \left[Q_0 P_0 - \frac{\cosh \alpha}{h^2} \right] \dots (39)$$

すなわち(2)と一致する。以下の計算はすでに示したとおりである⁽³⁾。すなわち、(2)の形が無理なく導かれる。

5. 純粋曲げ

第2図のごとく、純粋曲げを受けている場合である。

第2図 純粋曲げ

5.1 境界条件

$$\alpha = \infty, \quad \bar{z}z = p \frac{x}{t}, \quad \alpha = \alpha_0,$$

$$\bar{\alpha}\alpha = \bar{\alpha}\beta = \bar{\alpha}\gamma = 0 \dots (40)$$

ただし t は回転円体の回転軸に直角方向の軸長の

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= A_{11} \left[\left(\frac{\lambda+4\mu}{5\mu} - \frac{\lambda-\mu}{10\mu} x^2 \right) z + \left(\frac{\lambda+3\mu}{3\mu} \frac{1}{x^2} + \frac{\lambda-\mu}{30\mu} \right) \right] + B_{12} \left(3z - \frac{1}{x^2} \right) \\ &\quad - C_{11} \left(z + \frac{1}{x^2} \right) - 3C_{13} \left[3(4+15x^2)z + \left(\frac{2}{x^2} - 15 \right) \right] \\ X_2 &= A_{11} \frac{2\lambda+3\mu}{10\mu} \left(z + \frac{1}{x^2} \right) - 2B_{12} \left(3z - \frac{1}{x^2} \right) + \frac{15}{4} C_{13} \left[3(4+15x^2)z + \left(\frac{2}{x^2} - 15 \right) \right] \\ Y_1 &= \frac{A_{11}}{y} \left[\left(\frac{\lambda+4\mu}{5\mu} - \frac{2\lambda+3\mu}{10\mu} x^2 \right) xz + \left(-\frac{\lambda+3\mu}{3\mu} \frac{1}{x} + \frac{2\lambda+3\mu}{10\mu} x \right) \right] \\ &\quad + \frac{B_{12}}{y} \left[3(1+2x^2)xz + \left(\frac{1}{x} - 2x \right) \right] - \frac{C_{11}}{y} \left(xz - \frac{1}{x} \right) - \frac{3C_{13}}{y} \left[3(4+5x^2)xz - \left(\frac{2}{x} + 5x \right) \right] \\ Y_2 &= \frac{A_{11}}{y} \frac{\lambda-\mu}{10\mu} \left(xz - \frac{1}{x} \right) + \frac{45}{4} \frac{C_{13}}{y} \left[3(4+5x^2)xz - \left(\frac{2}{x} + 5x \right) \right] \\ Z_1 &= -Y_1, \quad Z_2 = -\frac{A_{11}}{y} \frac{2\lambda+3\mu}{10\mu} \left(xz - \frac{1}{x} \right) + \frac{2B_{12}}{y} \left[3(1+2x^2)xz + \left(\frac{1}{x} - 2x \right) \right] \\ &\quad - \frac{15}{4} \frac{C_{13}}{y} \left[3(4+5x^2)xz - \left(\frac{2}{x} + 5x \right) \right] \\ W_1 &= \frac{A_{11}}{y} \left[x^3 z + \left(\frac{2}{3x} - \frac{x}{3} \right) \right], \quad W_2 = \frac{A_{11}}{y} \left(xz - \frac{1}{x} \right) \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

$1/2, p$ は $x=t$ における応力の大きさである。(40)を回転円体座標に書き直し、Störspannung の B.

C. に書くと、

$$\alpha = \infty \quad \text{応力成分} \rightarrow 0$$

$$\alpha = \alpha_0$$

$$\bar{\alpha}\alpha = -\frac{p}{t} \frac{\sinh^3 \alpha_0 \sin \beta \cos^2 \beta \cos \gamma}{h_0^2}$$

$$\bar{\alpha}\beta = \frac{p}{t} \frac{\sinh^2 \alpha_0 \cosh \alpha_0 \sin^2 \beta \cos \beta \cos \gamma}{h_0^2}$$

$$\bar{\alpha}\gamma = 0$$

.....(41)

5.2 $\Delta, \bar{w}_\gamma', u_\gamma'$ の決定 (41)から、 $m=1, n$

の n は(41)と(3a)から $n=1$ となる。 B_{mn}, C_{mn} はそれぞれ一般解⁽³⁾から決定される。

$$\Delta = A_{11} \frac{Q_3^1 P_1^1 - Q_1^1 P_3^1}{h^2} \cos \gamma$$

$$\bar{w}_\gamma' = B_{12} Q_2^1 P_2^1 \cos \gamma$$

$$u_\gamma' = C_{11} Q_1^1 P_1^1 \cos \gamma + C_{13} Q_3^1 P_3^1 \cos \gamma$$

Δ を書き直すと

$$\Delta = A_{11} \left(Q_1^1 P_1^1 + \frac{2}{3} \frac{\sin \beta}{\sinh \alpha} \frac{\cosh \alpha}{h^2} \right) \cos \gamma \dots (42a)$$

5.3 変位 係数 A_{11} を持つ変位の中、 Δ の(42a)の第1項に対する変位は一般解⁽³⁾で $m=n=1$ において得られる。第2項に対する変位は §3 で求めた。係数 B_{12} を持つ変位は一般解 B_{mn} で $m=1, n=2$ として求まる。係数 C_{11} を持つ変位は C_{mn} で $m=n=1$, 係数 C_{13} を持つ変位は $m=1, n=3$ として求まる。

これらを纏めると

$$\left. \begin{aligned} h^2 \Delta &= W_1 \sin \beta \cos \gamma + W_2 \sin^3 \beta \cos \gamma \\ u_\alpha' &= X_1 \sin \beta \cos \gamma + X_2 \sin^3 \beta \cos \gamma \\ u_\beta' &= Y_1 \cos \beta \cos \gamma + Y_2 \sin^2 \beta \cos \beta \cos \gamma \\ u_\gamma' &= Z_1 \sin \beta \sin \gamma + Z_2 \sin^3 \beta \sin \gamma \end{aligned} \right\} (43)$$

ここに

ただし $x = \sinh \alpha$, $y = \cosh \alpha$, $z = yT - 1$, $T = \frac{1}{2} \log \frac{\cosh \alpha + 1}{\cosh \alpha - 1}$

5・4 応力成分 応力成分の中, 未定係数を決定するのに必要なものをあげる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\widehat{\alpha\alpha}}{2\mu} &= \left\{ \frac{\lambda}{2\mu} W_1 + \left(\frac{dX_1}{d\alpha} - xyX_2 - Y_1 + y^2Y_2 \right) \right\} \frac{\sin \beta \cos \gamma}{h^2} + \left\{ \frac{\lambda}{2\mu} W_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dX_2}{d\alpha} - Y_2 \right) \right\} \frac{\sin^3 \beta \cos \gamma}{h^3} + (xyX_1 - x^3yX_2 - y^2Y_1 + x^2y^2Y_2) \frac{\sin \beta \cos \gamma}{h^4} \\ \frac{\widehat{\alpha\beta}}{\mu} &= \left(\frac{dY_1}{d\alpha} - 2xyY_2 - X_1 + 2x^2X_2 \right) \frac{\cos \beta \cos \gamma}{h^2} + \left(X_2 + \frac{dY_2}{d\alpha} \right) \frac{\sin^2 \beta \cos \beta \cos \gamma}{h^2} \\ &\quad - 2(xyY_1 - x^3yY_2 - x^2X_1 + x^4X_2) \frac{\cos \beta \cos \gamma}{h^4} \\ \frac{\widehat{\alpha\gamma}}{\mu} &= \left(\frac{dZ_1}{d\alpha} - X_1 - \frac{2y}{x} Z_1 \right) \frac{\sin \beta \sin \gamma}{hh_3} + \left(\frac{dZ_2}{d\alpha} - X_2 - \frac{2y}{x} Z_2 \right) \frac{\sin^3 \beta \sin \gamma}{hh_3} \end{aligned} \right\} \dots\dots(45)$$

ただし $h_3 = \sinh \alpha \sin \beta$.

5・5 未定係数の決定 Störspannung に対する B. C. (41) と応力成分の式 (45) から A_{11} , B_{12} , C_{11} , C_{13} を求めると

$$\begin{aligned} g &= 3x^4 \left(z - \frac{1}{3x^2} \right) \\ D &= (3\lambda + 2\mu)g^3 - 4\{(5\lambda + 6\mu) + 5(\lambda + \mu)x^2\}g^2 + 4\{(3\lambda + 2\mu) + 8(\lambda + \mu)x^2\}g + 16(\lambda + \mu)x^2 \quad \text{とおくと,} \\ A_{11} &= -\frac{p}{t} \frac{3x^4yg(g-6)}{D} \\ B_{12} &= \frac{p}{t} \frac{x^4y}{3\mu(g-2)D} \left[\frac{3\lambda + 2\mu}{4} g^3 - \{2(3\lambda + 4\mu) + 5(\lambda + \mu)x^2\}g^2 \right. \\ &\quad \left. + \{(9\lambda + 14\mu) + 8(\lambda + \mu)x^2\}g + 4(\lambda + \mu)x^2 \right] \\ C_{11} &= \frac{p}{t} \frac{x^4y}{D} \left[\left\{ -\frac{133\lambda + 322\mu}{100\mu} + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x^2 \right\} g^2 + \left\{ \frac{339\lambda + 1046\mu}{50\mu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4}{5} \frac{\lambda + \mu}{\mu} x^2 \right\} g - \frac{2(\lambda + \mu)}{5\mu} x^2 \right] \\ C_{13} &= \frac{p}{t} \frac{x^4y}{225\mu D} [(3\lambda + 2\mu)g^2 - 2\{(9\lambda + 11\mu) + 10(\lambda + \mu)x^2\}g + 40(\lambda + \mu)x^2] \end{aligned} \quad \dots\dots(46)$$

ただし $x = \sinh \alpha_0$

未定係数が定ったから応力成分の式に代入すれば応力分布が求まる. ただし本報では応力分布は既に H. Neuber により解っているので別に求めなかった.

5・6 H. Neuber の結果との比較 上に得た結果を確かめるために H. Neuber の結果と比較する. たとえば, H. Neuber の解の中, “Kerbspannungslehre” p. 105 の

$$\sigma_1 = (\sigma_v)_{u=u_0} = \frac{p}{N} \{ g[g(10t^2 - 2\alpha) - 36t^2 + 16 - 4\alpha] - 16t^2 \} \quad (\text{H. N. (158)})$$

$v = \frac{\pi}{2}$
 $w = 0$

において $\alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$, $N = \frac{D}{\lambda + \mu}$ (この α は座標の α ではない.)

を考慮して書き換えると,

$$\sigma_1 = \frac{p}{D} [g\{g[10(\lambda + \mu)t^2 - 2(\lambda + 2\mu)] - 36(\lambda + \mu)t^2 + 4(3\lambda + 2\mu)\} - 16(\lambda + \mu)t^2] \quad \dots\dots\dots(47)$$

筆者の場合は

$$\begin{aligned} \widehat{\beta\beta}_1 = \widehat{\beta\beta}_{\alpha=\alpha_0} &= \frac{A_{11}}{x^3y^3} \left[\frac{2}{15} (3\lambda + 2\mu)gy^2 + \frac{2}{3} (3\lambda + 7\mu)x^2 \right] - \frac{4\mu B_{12}}{x^3y^3} (gy^2 + x^2) \\ &\quad - \frac{4\mu C_{11}}{xy^3} - \frac{6\mu C_{13}}{x^3y^3} (gy^2 + 4x^2) \end{aligned}$$

$\beta = \frac{\pi}{2}$
 $\gamma = 0$

$A_{11}, B_{12}, C_{11}, C_{13}$ に (46) の値を入れて整理すると,

$$\widehat{\beta\beta}_1 = \frac{px}{tD} [g\{-g[10(\lambda+\mu)x^2+2(\lambda+2\mu)]+[4(3\lambda+2\mu)+36(\lambda+\mu)x^2]\}+16(\lambda+\mu)x^2] \dots\dots(48)$$

所で, H. Neuber の座標は扁平回転た円体座標 (oblate) であり, 筆者の座標は扁長回転た円体座標 (prolate) であることを考慮して, (48) で $x=it$ とおく。(もちろんこの $x=\sinh \alpha_0$ 扁長回転た円体座標と扁平回転た円体座標の間には既報⁽³⁾の (26) の関係が成立する.)

そおすると

$$\widehat{\beta\beta}_1 = \frac{ip}{D} \{g[g\{10(\lambda+\mu)t^2-2(\lambda+2\mu)\}-36(\lambda+\mu)t^2+4(3\lambda+2\mu)]-16(\lambda+\mu)t^2\} \dots\dots(49)$$

所で, 筆者の B. C. を oblate spheroid 座標で表わすと

$$\begin{aligned} \widehat{zz} &= p \frac{x}{t} = p \frac{\sinh \alpha \sin \beta \cos \gamma}{t} \\ &= ip \frac{\operatorname{ch} u \sin v \cos w}{t} = p \frac{iy_N}{t} \end{aligned}$$

(ただし x および y_N はデカルト座標で, y_N は Neuber の y 座標のことである.) すなわち Neuber の B. C. が

$$\widehat{zz} = p \frac{y_N}{t}$$

であることを考えれば, (49) の i は首肯され, 筆者の結果が, H. Neuber の結果と一致することがわかる。

6. 純粋せん断

第3図のごとき場合を考える。

第3図 純粋せん断

6.1 境界条件 棒の半径 b が空窩の寸法に比較して大きく, また空窩の附近を考えるとときには B. C. は

$$\widehat{zx}=p \quad \text{他の応力成分}=0 \dots\dots(50)^{(6)}$$

と考えてよい。ただし p は穴がないときの軸上のせん断応力を示す。これを回転た円体座標に書き直し, Störspannung の B. C. に書き直すと,

$$\begin{aligned} \alpha &= \infty \quad \text{応力成分} \rightarrow 0 \\ \alpha &= \alpha_0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\alpha\alpha} &= -\frac{2p}{h_0^2} \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \sin \beta \cos \beta \cos \gamma, \\ \widehat{\alpha\beta} &= -\frac{p}{h_0^2} (\sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \beta - \cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \beta) \\ &\quad \times \cos \gamma, \\ \widehat{\alpha\gamma} &= \frac{p}{h_0} \sinh \alpha_0 \cos \beta \sin \gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots(51)$$

6.2 4, $\widehat{w\gamma'}$, $u\gamma'$ の決定 4 の m, n は (3a)

と (51) から, $m=1, n=0$ とすればよい。

$$4 = A_{10} \frac{Q_2^1 P_0^1 - Q_0^1 P_2^1}{h^2} \cos \gamma = -A_{10} \frac{Q_0^1 P_2^1}{h^2} \cos \gamma \dots\dots(52-1)$$

(一般に P_n^m, Q_n^m では $n \geq m \geq 0$ で定義されているが,

$$Q_n^m(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n}{dx^m}$$

と定義すると, $m > n$ でも 0 にならない。同じ定義でも P_n^m は 0 になる。) $\widehat{w\gamma'}$, $u\gamma'$ は一般解から

$$\widehat{w\gamma'} = B_{11} Q_1^1 P_1^1 \cos \gamma, \quad u\gamma' = C_{12} Q_2^1 P_2^1 \sin \gamma \dots\dots(52-2)$$

とすればよい。4 に Q_0^1, P_2^1 の値を代入すると,

$$4 = 3 A_{10} \frac{\sin \beta \cos \beta \cos \gamma}{\sinh \alpha h^2} \dots\dots(53)$$

となる。

6.3 変位 係数 A_{10} を持つ変位は §3 より求めることができる。係数 B_{11} を持つ変位は一般解の B_{mn} の項に $n=m=1$ を入れればよろしいし, 係数 C_{12} を持つ変位は一般解の C_{mn} の項で $m=1, n=2$ とおけばよろしい。これらを纏めて書くと,

$$\left. \begin{aligned} h^2 4 &= W_1 \sin \beta \cos \beta \cos \gamma \\ u\alpha' &= X_1 \sin \beta \cos \beta \cos \gamma \\ u\beta' &= Y_1 \cos \gamma + Y_2 \sin^2 \beta \cos \gamma \\ u\gamma' &= Z_1 \sin \beta \cos \beta \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \dots\dots(54)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -A_{10} \frac{3\lambda+5\mu}{2\mu} \frac{y}{x^2} + \frac{B_{11}}{y} \left(z - \frac{1}{x^2} \right) \\ &\quad - \frac{3C_{12}}{y} \left[(3+6x^2)z + \left(\frac{1}{x^2} - 2 \right) \right], \\ Y_1 &= A_{10} \frac{3\lambda+5\mu}{2\mu} \frac{1}{y} + B_{11} \left(xz + \frac{1}{x} \right) \\ &\quad - 3C_{12} \left(3xz - \frac{1}{x} \right), \\ Y_2 &= \frac{A_{10}}{x} + 6C_{12} \left(3xz - \frac{1}{x} \right), \\ Z_1 &= -Y_1, \quad W_1 = 3A/x. \end{aligned} \right\} \dots\dots(55)$$

6.4 応力成分 応力成分の中, 未定係数を決定するのに必要なものだけをあげる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha\alpha}{2\mu} &= \left(\frac{\lambda}{2\mu} W_1 + \frac{dX_1}{d\alpha} + Y_2 \right) \frac{\sin\beta \cos\beta \cos\gamma}{h^2} \\ &\quad - (xyX_1 - Y_1 + x^2Y_2) \frac{\sin\beta \cos\beta \cos\gamma}{h^4}, \\ \frac{\alpha\beta}{\mu} &= \left\{ -(1+2x^2)X_1 + \frac{dY_1}{d\alpha} - 2xyY_2 \right\} \frac{\cos\gamma}{h^2} \\ &\quad + \frac{dY_2}{d\alpha} \frac{\sin^2\beta \cos\gamma}{h^2} \\ &\quad + 2xy(-Y_1 + x^2Y_2 + xyX_1) \frac{\cos\gamma}{h^4}, \\ \frac{\alpha\gamma}{\mu} &= \left(\frac{dZ_1}{d\alpha} - X_1 - \frac{2y}{x}Z_1 \right) \frac{\sin\beta \cos\beta \sin\gamma}{hh_3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

6・5 未定係数の決定 Störspannung に対する
B. C. (51) と応力成分の式 (56) から A_{10} , B_{11} , C_{12} を求める。

$$\left. \begin{aligned} A_{10} &= -\frac{p}{\mu N} \frac{4}{3}, \quad B_{11} = \frac{p}{\mu N} \frac{3(\lambda+2\mu)}{2\mu}, \\ C_{12} &= \frac{p}{\mu N} \left[\frac{3\lambda+2\mu}{18\mu} + \frac{\lambda+\mu}{3\mu} x^2 \right] \\ \text{ただし} \\ N &= \frac{1}{y} \left[\left\{ \frac{3\lambda+2\mu}{\mu} + \frac{6(\lambda+\mu)}{\mu} x^2 \right\} z \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\lambda+\mu}{\mu} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \frac{1}{x^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

未定係数が決ったから、応力成分の式に代入すれば応力分布が求まる。

6・6 H. Neuber の結果との比較 上に得た結果と H. Neuber の解と比較する。たとえば、H. Neuber の “Kerbspannungslehre” p. 111 (185) を考える。

$$\tau_1 = (\tau_{vw})_{u=u_0}^{\nu=w=\pi/2} = \frac{p}{N_H} 2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) \sqrt{\frac{t}{\rho} - 1}$$

(記号の意味は H. Neuber の著書を参照)

ただし N_H は H. Neuber では N と書いてある。

$$N_H = \frac{i\mu x^2}{2(\lambda+\mu)} N, \quad \sin u_0 = \frac{1}{\sqrt{(t/\rho) - 1}},$$

$$2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$$

であり、かつ扁平回転た円体座標から扁長回転た円体

座標に直すと、

$$\tau_1 = \frac{p}{N} \frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu} \frac{1}{x^2 y} \dots\dots\dots (58)$$

筆者の場合は、

$$\hat{\beta}\gamma' = \hat{\beta}\gamma_{\alpha=\alpha_0}^{\beta=\gamma=\pi/2} = \mu e_{\beta\gamma} = -p \left[1 - \frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu N} \frac{1}{x^2 y} \right]$$

上の $\hat{\beta}\gamma$ は Störspannung であるから、全応力を $\hat{\beta}\gamma_1$ とすると

$$\begin{aligned} \hat{\beta}\gamma_1 &= (\text{original stress}) + (\text{Störspannung}) \\ &= p \left(\frac{\cosh\alpha \sin\beta \sin\gamma}{h} \right)_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \beta=\gamma=\pi/2}} + \hat{\beta}\gamma' \\ &= p \frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu N} \frac{1}{x^2 y} \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

となり、H. Neuber の結果と一致する。

7. 結 語

(1) さきに示した一般解では、未定係数を定めるために、無限次元の連立一次方程式を解かなければならないので、若干の工夫を行って、有限次元の連立一次方程式を解けばすむようにした。これによって、筆者の方法（いわゆる“妹沢-西村の方法”）で Boussinesq の方法と同程度の容易さ（困難さ）で、三次元応力集中の問題を解くことができるようになった。

(2) 上述の改良した方法を使って、二三の例題を解き、既存の解と同一の解を得た。

(3) 今後は、充填物のつまっている問題や、その他の応力状態の問題に本法を適用したいと考えている。

終りに、有益な御助言をいただいた千葉工業大学教授竹中二郎先生、終始御指導御鞭達をいただいた東京大学教授西村源六郎先生はじめ、いろいろと有益な御批判をいただいた諸先輩、同僚の方々に心から御礼を申上げる次第である。

注:-

- (1) 昭和 28 年 4 月 4 日 第 30 期定時総会講演会において講演原稿受付 昭和 28 年 5 月 1 日。
- (2) 正員。
- (3) 筆者，応用力学，Vol. 3, No. 13, 1950.
- (4) 筆者，Proc. 1 st. Jap. Nat. Congr. App. Mech. 1951.
- (5) 寺沢寛一，数学概論，p. 478.
- (6) H. Neuber, Kerhspannungslehre, p. 107.