539.413.013 : 624.043.7

片側に 1 個の半円切欠を有する無限はりの集中荷重による曲げ⁽¹⁾

玉 手

統⁽²⁾

Stresses in an Infinite Beam with a Semi-Circular Notch under Central Bending

by Osamu TAMATE

In this paper, the problem to determine the stresses in an infinitely long, simply supported and centrally loaded beam, with a semi-circular notch at the middle of the supports, was investigated as the two dimensional one of elasticity. The parametric coefficients included in the stress function were determined by successive approximation.

Numerical calculations about the distribution of stresses along main parts of the beam were also carried out for two special cases, so as to clarify the effect of the notch in this problem.

1. 緒 言

単純支持はりの支点の中央に集中荷重が作用している場合荷重点の対辺に切欠が存在すれば切欠縁にいかに応力が集中するかと言う問題は理論的に興味があるばかりでなくシャルピー衝撃試験片等の例もあり実際的にも重要なものであるが、最近偏光弾性実験による研究⁽³⁾が見られるだけで理論的解決はいまだ与えられていないようである。

この報告は上記の問題の理論的解明の一例として無限に長い単純支持はりの支点の中央に 1 個の半円切欠がある場合中央集中荷重に対する切欠の影響を二次元弾性理論に基いて取扱ったものである。

2. 問題とその応力かん数

等方弾性物質からなる無限に長い はり を考え、この はり が x, y 面上 $y=0$ と $y=b$ で限られた領域を占めているものとする。また はり の厚さは一様であるとする。次に切欠の中心は原点にありその半径は $a(<b)$ であるとする。さらに第 1 図のごとく Oy

第 1 図

軸を原線とし、時計の回転方向を θ の正方向とする極座標 (r, θ) を併用する。したがってこの両座標間の関係は

$$x = r \sin \theta, \quad y = r \cos \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。

このような座標を用いて片側に 1 個の半円切欠を有する無限はりが切欠中心より等間隔の 2 点 ($y = \pm c$, $y=0$) で支持され、切欠対辺 ($x=0$, $y=b$) に P なる集中荷重を受ける場合の はり の内部の応力を求める問題を研究しよう。なお簡単のため次の記号を用いる。

$$\xi = x/b, \quad \eta = y/b, \quad \rho = r/b, \quad \lambda = a/b, \quad \mu = c/b. \quad \dots\dots\dots (2)$$

したがって問題の境界条件は次のように書くことができる。

(a) $\eta=1$ で

$$\sigma_y = -(P/\pi b) \int_0^\infty \cos u \xi \, du, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \dots\dots (3)$$

(b) $\eta=0$ で

$$\sigma_y = -(P/\pi b) \int_0^\infty \cos u \mu \cos u \xi \, du, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

(c) $\rho=\lambda$ で $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$

(d) $\xi \rightarrow \pm \infty$ で $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$

今考えている はり は一般化された平面応力状態にあるものとする。よって応力成分は はり の厚さについての平均値をとることにすれば、これらは 1 個の応力かん数 F から誘導される。すなわち

$$\sigma_x = b^{-2}(\partial^2 F / \partial \eta^2), \quad \sigma_y = b^{-2}(\partial^2 F / \partial \xi^2), \\ \tau_{xy} = -b^{-2}(\partial^2 F / \partial \xi \partial \eta),$$

および

$$\sigma_r = b^{-2} \{ (\partial^2 F / \partial \theta^2) + (\partial F / \partial \rho) \},$$

$$\sigma_\theta = b^{-2} (\partial^2 F / \partial \rho^2),$$

$$\tau_{r\theta} = -b^{-2} \{ \partial (\partial F / \partial \theta) / \partial \rho \},$$

である。しかしてこれらの応力成分が適合条件を満たさねばならぬことから F は重調和かん数でなければならぬ。すなわち

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

したがって (3)~(6) なる境界条件をすべて満足

$$\begin{aligned} F^* = & -\frac{Pb}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\cos u \xi}{u^2 \Sigma} \{ (uc+s)(u\eta C-S) - us\eta S \} - \frac{2\eta^3 - 3\eta^2}{u^2} \right] du \\ & + \frac{Pb}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\cos u \mu \cos u \xi}{u^2} (1+u\eta) e^{-u\eta} - \frac{1}{u^2} \right] du \\ & + \frac{Pb}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\cos u \mu \cos u \xi}{u^2 \Sigma} \left\{ \frac{1-e^{-2u}+2u+2u^2}{2} (u\eta C-S) - u^2 u \eta S \right\} - \frac{2\eta^3 - 3\eta^2}{u^2} \right] du \quad \dots (8) \end{aligned}$$

上式中の各記号は次のものを表わすものとする。

$$s = \sinh u, \quad c = \cosh u, \quad S = \sinh u \eta, \quad C = \cosh u \eta, \quad \Sigma = \sinh^2 u - u^2.$$

次に (8) を極座標で書き換えれば切欠の近くで

$$\begin{aligned} F^* = & -\frac{3\lambda^2 \mu Pb}{\pi} \left[\frac{L_0^*}{2} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^3 \cos \theta + \sum_{m=1}^\infty \left\{ \frac{2m-1}{2m+1} \frac{L_{2m-2}^*}{2m} + \frac{L_{2m}^*}{2m+2} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^2 \right\} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^{2m+1} \cos(2m+1)\theta \right. \\ & \left. + M_0^* \left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^2 + \sum_{m=1}^\infty \left\{ \frac{M_{2m-2}^*}{2m-1} + \frac{M_{2m}^*}{2m+1} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^2 \right\} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^{2m} \cos 2m\theta \right] \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

を得る。ここに $m \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} L_{2m}^* = & \{ \lambda^{2m+1} / 6 \mu (2m+1)! \} [(4m+6)(2m+1)! + (-1)^m (2m+1)! \mu^{-2m-2} + I_{2m+1}' - J_{2m+1}' \\ & + 3 I_{2m+2}' - J_{2m+2}' + 4 I_{2m+3}' + 4 I_{2m+4}' - I_{2m+1}'' + J_{2m+1}'' - 2 I_{2m+2}'' - 2 I_{2m+3}''], \\ M_{2m}^* = & -\{ \lambda^{2m} / 6 \mu (2m)! \} [(4m+2)(2m)! + I_{2m+1}' - J_{2m+1}' + 4 I_{2m+3}' - 2 I_{2m+2}''], \end{aligned}$$

であり $m=0$ および 1 に対しては

$$\begin{aligned} L_0^* = & \frac{\lambda}{6\mu} \left[6 + \frac{1}{\mu^2} + \int_0^\infty \left\{ \frac{1-e^{-2u}+4u^2}{2\Sigma} u e^{-u} - \frac{3}{u^2} \right\} du + \int_0^\infty \left\{ \frac{3-e^{-2u}+4u^2}{2\Sigma} u^2 e^{-u} - \frac{3}{u^2} \right\} du \right. \\ & \left. - \int_0^\infty \left\{ \frac{1-e^{-2u}+2u+2u^2}{2\Sigma} u \cos u \mu - \frac{6}{u^2} \right\} du \right], \\ L_2^* = & (\lambda^3 / 36 \mu) [60 - 6\mu^{-1} + \int_0^\infty \{ (1-e^{-2u}) u^3 e^{-u} / 2 \Sigma \} du - \int_0^\infty \{ (1-e^{-2u}) u^3 \cos u \mu / 2 \Sigma \} du \\ & + 3 I_4' - J_4' + 4 I_5' + 4 I_6' - 2 I_4'' - 2 I_5''], \\ M_0^* = & -\frac{1}{6\mu} \left[2 + \int_0^\infty \left\{ \frac{1-e^{-2u}+4u^2}{2\Sigma} u e^{-u} - \frac{3}{u^2} \right\} du - \int_0^\infty \left\{ \frac{u^2 \cos u \mu}{\Sigma} - \frac{3}{u^2} \right\} du \right], \\ M_2^* = & -(\lambda^2 / 12 \mu) [12 + \int_0^\infty \{ (1-e^{-2u}) u^3 e^{-u} / 2 \Sigma \} du + 4 I_5' - 2 I_4''], \end{aligned}$$

である。ただし $m \geq 4$ に対しては

$$\begin{aligned} I_m' = & \int_0^\infty (e^{-u} u^m / 2 \Sigma) du, \quad I_m'' = \int_0^\infty (u^m \cos u \mu / 2 \Sigma) du, \\ J_m' = & \int_0^\infty (e^{-3u} u^m / 2 \Sigma) du, \quad J_m'' = \int_0^\infty (e^{-2u} u^m \cos u \mu / 2 \Sigma) du, \end{aligned}$$

とする。これらはすべて有限値であり m が十分大きいときは

$$\begin{aligned} I_m' \sim & 2m! / 3^{m+1}, \quad I_m'' \sim 2m! \cos \{ (m+1) \tan^{-1}(\mu/2) \} / (\mu^2+4)^{(m+1)/2} \\ J_m' \sim & 2m! / 5^{m+1}, \quad J_m'' \sim 2m! \cos \{ (m+1) \tan^{-1}(\mu/4) \} / (\mu^2+16)^{(m+1)/2} \end{aligned}$$

なる漸近値を取る。したがって $\mu > 1$ ならば L_{2m}^* , M_{2m}^* の漸近値はそれぞれ $(4m+6)\lambda^{2m+1}/6\mu$, $-(4m+2)\lambda^{2m}/6\mu$ であることは容易に示される⁽⁴⁾。

さて F^* は (5) の条件を満たさないから新たに 2 組の補助の応力かん数群を導入する。これらは問題の性質上 x の偶かん数であり、はりの両直線縁で $\widehat{xy} = \widehat{yy} = 0$, $x \rightarrow \pm\infty$ で $\widehat{xx} = \widehat{xy} = \widehat{yy} = 0$ なる条件を満たす重調和か

する重調和かん数 F を見出せば問題は解けたことになる。このためにまず基本の応力かん数として境界条件 (3), (4) および (6) を満す重調和かん数 F^* を導入する。これは切欠のない はりの直線縁に所定の外力が働いた場合に相当する応力かん数を採ればよいのであるから容易に求めることができ、次のようになる。

ん数とする。これらの諸条件を満たすものとして次のものを採用する。 ($m \geq 0$)

$$\left. \begin{aligned} F_{2m} &= \frac{2m+3}{2m+1} \frac{\lambda^2}{2m+2} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{2m+1} \cos(2m+1)\theta + \frac{\lambda^2}{2m+2} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{2m+1} \cos(2m+3)\theta \\ &\quad + \frac{\lambda^{2m+3}}{(2m+2)!} \int_0^\infty \frac{u^{2m} \cos u \xi}{\Sigma} \{ (1 - e^{-2u} + 2u + 2u^2)(u \eta C - S) - 2u^2 u \eta S \} du, \\ F_{2m}' &= \frac{\lambda^2}{2m+1} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{2m} \cos 2m\theta + \frac{\lambda^2}{2m+1} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{2m} \cos(2m+2)\theta \\ &\quad + \frac{\lambda^{2m+2}}{(2m+1)!} \int_0^\infty \frac{u^{2m-1} \cos u \xi}{\Sigma} \{ 2u^2(u \eta C - S) - (1 - e^{-2u} - 2u + 2u^2)u \eta S \} du \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

上式の積分の項を更に極座標に書き換えれば

$$\left. \begin{aligned} F_{2m} &= \frac{2m+3}{2m+1} \frac{\lambda^2}{2m+2} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{2m+1} \cos(2m+1)\theta + \frac{\lambda^2}{2m+2} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{2m+1} \cos(2m+3)\theta \\ &\quad + \frac{\lambda^{2m}}{2} \alpha_5 \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^3 \cos \theta + \sum_{s=1}^\infty \left\{ \frac{2s-1}{2s+1} \frac{\lambda^{2m}}{2s} \alpha_{2s+3} + \frac{\lambda^{2m}}{2s+2} \alpha_{2s+5} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 \right\} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^{2s+1} \cos(2s+1)\theta \\ &\quad + \lambda^{2m} \beta_4 \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 + \sum_{s=1}^\infty \left\{ \frac{\lambda^{2m}}{2s-1} \beta_{2s+2} + \frac{\lambda^{2m}}{2s+1} \beta_{2s+4} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 \right\} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^{2s} \cos 2s\theta, \\ F_{2m}' &= \frac{\lambda^2}{2m+1} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{2m} \cos 2m\theta + \frac{\lambda^2}{2m+1} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{2m} \cos(2m+2)\theta \\ &\quad + \frac{\lambda^{2m}}{2} \gamma_4 \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^3 \cos \theta + \sum_{s=1}^\infty \left\{ \frac{2s-1}{2s+1} \frac{\lambda^{2m}}{2s} \gamma_{2s+2} + \frac{\lambda^{2m}}{2s+2} \gamma_{2s+4} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 \right\} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^{2s+1} \cos(2s+1)\theta \\ &\quad + \lambda^{2m} \delta_3 \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 + \sum_{s=1}^\infty \left\{ \frac{\lambda^{2m}}{2s-1} \delta_{2s+1} + \frac{\lambda^{2m}}{2s+1} \delta_{2s+3} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 \right\} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^{2s} \cos 2s\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10')$$

ここに $m \geq 0, s \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} {}^{2m}\alpha_{2s+5} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^{2m+2s+4}}{(2s+1)!(2m+2)!} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-2u} + 2u + 2u^2}{\Sigma} u^{2m+2s+3} du, \\ {}^{2m}\beta_{2s+4} &= - \frac{\lambda^{2m+2s+3}}{(2s)!(2m+2)!} \int_0^\infty \frac{u^{2m+2s+4}}{\Sigma} du = - \frac{2s+1}{2m+2} {}^{2m}\gamma_{2s+4}, \\ {}^{2m}\delta_{2s+3} &= - \frac{1}{2} \frac{\lambda^{2m+2s+2}}{(2s)!(2m+1)!} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-2u} - 2u + 2u^2}{\Sigma} u^{2m+2s+1} du, \end{aligned}$$

でありこれら係数値はすでに求めてある⁽⁵⁾。

上記の応力かん数 F_{2m}, F_{2m}' に未知係数をかけて F^* に加えたものを所要の応力かん数 F とする。

すなわち

$$F = F^* - (3\mu Pb/\pi) \sum_{m=0}^\infty \{ A_{2m} F_{2m} + B_{2m} F_{2m}' \} \dots\dots\dots(11)$$

上式の応力かん数 F が境界条件 (3), (4) および (6) を満たす重調和かん数であることは明らかであるから問題は F が条件 (5) を満たすように $A_{2m}, B_{2m} (m \geq 0)$ を決定することに帰せられたわけである。(11) に (9) および (10') を代入して整理すれば切欠の近傍で

$$\begin{aligned} F &= - \frac{3\lambda^2\mu Pb}{\pi} \left[\frac{\bar{L}_0}{2} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^3 \cos \theta + \sum_{m=1}^\infty \left\{ \frac{2m-1}{2m+1} \frac{\bar{L}_{2m-2}}{2m} + \frac{\bar{L}_{2m}}{2m+2} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 \right\} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^{2m+1} \cos(2m+1)\theta \right. \\ &\quad + \bar{M}_0 \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 + \sum_{m=1}^\infty \left\{ \frac{\bar{M}_{2m-2}}{2m-1} + \frac{\bar{M}_{2m}}{2m+1} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 \right\} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^{2m} \cos 2m\theta \\ &\quad + \frac{3}{2} A_0 \left(\frac{\lambda}{\rho}\right) \cos \theta + \sum_{m=1}^\infty \left\{ \frac{A_{2m-2}}{2m} + \frac{2m+3}{2m+1} \frac{A_{2m}}{2m+2} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^2 \right\} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{2m-1} \cos(2m+1)\theta \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^\infty \left\{ \frac{B_{2m-2}}{2m-1} + \frac{B_{2m}}{2m+1} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^2 \right\} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{2m-2} \cos 2m\theta \right] \dots\dots\dots(11_1) \end{aligned}$$

を得る。ただし $m \geq 0$ に対し

$$\left. \begin{aligned} \bar{L}_{2m} &= L_{2m}^* + L_{2m}, \quad \bar{M}_{2m} = M_{2m}^* + M_{2m}, \\ L_{2m} &= \sum_{s=0}^\infty (A_{2s} {}^{2s}\alpha_{2m+5} + B_{2s} {}^{2s}\gamma_{2m+4}), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

$$M_{2m} = \sum_{s=0}^{\infty} (A_{2s} {}^2s\beta_{2m+4} + B_{2s} {}^2s\delta_{2m+3}), \quad]$$

である。(11₁) による応力成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_r = & (3\mu P/\pi b) \left[-\bar{L}_0(\rho/\lambda) \cos \theta + \sum_{m=1}^{\infty} \{ (2m-1)\bar{L}_{2m-2} + (2m-1)\bar{L}_{2m}(\rho/\lambda)^2 \} (\rho/\lambda)^{2m-1} \cos(2m+1)\theta \right. \\ & - 2\bar{M}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \{ 2m\bar{M}_{2m-2} + (2m-2)\bar{M}_{2m}(\rho/\lambda)^2 \} (\rho/\lambda)^{2m-2} \cos 2m\theta \\ & + 3A_0(\lambda/\rho)^3 \cos \theta + \sum_{m=1}^{\infty} \{ (2m+3)A_{2m-2} + (2m+3)A_{2m}(\lambda/\rho)^2 \} (\lambda/\rho)^{2m+1} \cos(2m+1)\theta \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \{ (2m+2)B_{2m-2} + 2mB_{2m}(\lambda/\rho)^2 \} (\lambda/\rho)^{2m} \cos 2m\theta \right] \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} = & -(3\mu P/\pi b) \left[\bar{L}_0(\rho/\lambda) \sin \theta + \sum_{m=1}^{\infty} \{ (2m-1)\bar{L}_{2m-2} + (2m+1)\bar{L}_{2m}(\rho/\lambda)^2 \} (\rho/\lambda)^{2m-1} \sin(2m+1)\theta \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \{ 2m\bar{M}_{2m-2} + 2m\bar{M}_{2m}(\rho/\lambda)^2 \} (\rho/\lambda)^{2m-2} \sin 2m\theta \\ & - 3A_0(\lambda/\rho)^3 \sin \theta - \sum_{m=1}^{\infty} \{ (2m+1)A_{2m-2} + (2m+3)A_{2m}(\lambda/\rho)^2 \} (\lambda/\rho)^{2m+1} \sin(2m+1)\theta \\ & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \{ 2mB_{2m-2} + 2mB_{2m}(\lambda/\rho)^2 \} (\lambda/\rho)^{2m} \sin 2m\theta \right] \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & -(3\mu P/\pi b) \left[3\bar{L}_0(\rho/\lambda) \cos \theta + \sum_{m=1}^{\infty} \{ (2m-1)\bar{L}_{2m-2} + (2m+3)\bar{L}_{2m}(\rho/\lambda)^2 \} (\rho/\lambda)^{2m-1} \cos(2m+1)\theta \right. \\ & + 2\bar{M}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \{ 2m\bar{M}_{2m-2} + (2m+2)\bar{M}_{2m}(\rho/\lambda)^2 \} (\rho/\lambda)^{2m-2} \cos 2m\theta \\ & + 3A_0(\lambda/\rho)^3 \cos \theta + \sum_{m=1}^{\infty} \{ (2m-1)A_{2m-2} + (2m+3)A_{2m}(\lambda/\rho)^2 \} (\lambda/\rho)^{2m+1} \cos(2m+1)\theta \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \{ (2m-2)B_{2m-2} + 2mB_{2m}(\lambda/\rho)^2 \} (\lambda/\rho)^{2m} \cos 2m\theta \right] \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

3. 係数 A_{2m} , B_{2m} の決定

切欠縁の境界条件を満たすためには (13) の σ_r , (14) の $\tau_{r\theta}$ が $\rho=\lambda$ で共に零にならねばならぬ。そのためこれらを $\rho=\lambda$, $|\theta| \leq \pi/2$ で Fourier 級数に展

開し θ の奇数倍の余弦または正弦のみを含むように整理する。次いで得られた式中の余弦または正弦の係数をすべて零とおけば切欠縁の条件を満たすための A_{2m} , B_{2m} の条件式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} 3A_0 + \sum_{s=0}^{\infty} {}^2sf_0 B_{2s} &= \bar{L}_0 + \sum_{s=0}^{\infty} {}^2sg_0 \bar{M}_{2s}, \\ (2m+3)A_{2m-2} + (2m+3)A_{2m} + \sum_{s=0}^{\infty} {}^2sf_{2m} B_{2s} &= -(2m-1)\bar{L}_{2m-2} - (2m-1)\bar{L}_{2m} - \sum_{s=0}^{\infty} {}^2sg_{2m} \bar{M}_{2s}, \\ (2m+1)A_{2m-2} + (2m+3)A_{2m} + \sum_{s=0}^{\infty} {}^2sf_{2m}' B_{2s} &= (2m-1)\bar{L}_{2m-2} + (2m+1)\bar{L}_{2m} + \sum_{s=0}^{\infty} {}^2sg_{2m}' \bar{M}_{2s} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ただし $m \geq 1$ とする。また記号 f , g , f' および g' の表示は省略する。上式の第 2, 第 3 式の左辺から A を消去すれば次式を得る。

$$\sum_{s=0}^{\infty} {}^2sk_{2m} B_{2s} = \bar{R}_{2m}, \quad (m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(17)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{2m} &= R_{2m}^* + R_{2m} \\ R_{2m}^* &= -(2m-1)L_{2m-2}^* - 2(2m+1)L_{2m}^* - (2m+3)L_{2m+2}^* + \sum_{s=0}^{\infty} {}^2sl_{2m} M_{2s}^*, \\ R_{2m} &= -(2m-1)L_{2m-2} - 2(2m+1)L_{2m} - (2m+3)L_{2m+2} + \sum_{s=0}^{\infty} {}^2sl_{2m} M_{2s}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17_1)$$

であり, また

$$\left. \begin{aligned} {}^2sk_{2m} &= (-1)^{m+s+1} \frac{32}{\pi} \frac{4s(m+1)+2m+1}{(2s-2m-1)(2s+2m+1)(2s+2m+3)(2s+2m+5)}, \\ {}^2sl_{2m} &= (-1)^{m+s+1} \frac{32}{\pi} \frac{4s(m+1)+2m+3}{(2s-2m-3)(2s-2m-1)(2s-2m+1)(2s+2m+3)}, \\ L_{-2}^* &= L_{-2} = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17_2)$$

また (16) の第 2, 第 3 式から A を求める関係式として次式を得る. ($m \geq 1$ に対して)

$$A_{2m-2} = A_{2m-2}^* + \sum_{s=0}^{\infty} {}^{2s}q_{2m} B_{2s} \dots\dots\dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } A_{2m-2}^* &= -(2m-1)L_{2m-2}^* - 2mL_{2m}^* - \sum_{s=0}^{\infty} {}^{2s}p_{2m} M_{2s}^* \\ {}^{(1)}A_{2m-2} &= -(2m-1)L_{2m-2} - 2mL_{2m} - \sum_{s=0}^{\infty} {}^{2s}p_{2m} M_{2s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{および } {}^{2s}p_{2m} &= (-1)^{m+s+1} \frac{8}{\pi} \frac{2m(2m+1)}{(2s-2m+1)(2s-2m+1)(2s+2m+1)} \\ {}^{2s}q_{2m} &= (-1)^{m+s+1} \frac{8}{\pi} \frac{2m(2m+1)}{(2s-2m+1)(2s+2m+1)(2s+2m+3)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18_2)$$

(17), (18) から A_{2m} , B_{2m} を決定するには逐次近似法によるのがよい. すなわち $m \geq 0$ に対して

$$\left. \begin{aligned} A_{2m} &= \sum_{p=0}^{\infty} A_{2m}^{(p)}, \quad B_{2m} = \sum_{p=0}^{\infty} B_{2m}^{(p)} \\ L_{2m} &= \sum_{p=0}^{\infty} L_{2m}^{(p)}, \quad M_{2m} = \sum_{p=0}^{\infty} M_{2m}^{(p)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

とおき, 第 1 近似として

$$L_{2m}^{(0)} = M_{2m}^{(0)} = 0 \dots\dots\dots (19_1)$$

とすれば $B_{2m}^{(0)}$ は (17) から

$$\left. \begin{aligned} L_{2m}^{(p)} &= \sum_{s=0}^{\infty} \{A_{2s}^{(p-1)} {}^{2s}\alpha_{2m+5} + B_{2s}^{(p-1)} {}^{2s}\gamma_{2m+4}\} \\ M_{2m}^{(p)} &= \sum_{s=0}^{\infty} \{A_{2s}^{(p-1)} {}^{2s}\beta_{2m+4} + B_{2s}^{(p-1)} {}^{2s}\delta_{2m+3}\} \end{aligned} \right\} (m \geq 0) \dots\dots\dots (22)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} {}^{2s}k_{2m} B_{2s}^{(p)} = R_{2m}^{(p)} \quad (m \geq 0) \dots\dots\dots (23)$$

$$A_{2m-2}^{(p)} = -(2m-1)L_{2m-2}^{(p)} - 2mL_{2m}^{(p)} - \sum_{s=0}^{\infty} {}^{2s}p_{2m} M_{2s}^{(p)} + \sum_{s=0}^{\infty} {}^{2s}q_{2m} B_{2s}^{(p)} \quad (m \geq 1) \dots\dots (24)$$

ここに $R_{2m}^{(p)}$ は (17₁) の R_{2m} の右辺の L_{2m} , M_{2m} ($m \geq 0$) に $L_{2m}^{(p)}$, $M_{2m}^{(p)}$ を代入したものを意味する.

以上の諸式から各係数の値を求めるには (20) または (23) なる無限元連立方程式を解かねばならぬが, この方程式は前報告⁽⁶⁾で取り扱ったものと全く同形であるのでこの取り扱いについては詳説することを省く. なお計算は (19) の級数が収れんするときのみ可能であるが, 数値計算に際し選んだ λ および μ の値に対しては (19) の収れんは相当良好でありはじめの数項のみで十分の近似が得られた.

$$\sum_{s=0}^{\infty} {}^{2s}k_{2m} B_{2s}^{(0)} = R_{2m}^* \dots\dots\dots (20)$$

なる無限元連立一次方程式を解いて求める. 次に $A_{2m}^{(0)}$ は (18) を参照して

$$A_{2m-2}^{(0)} = A_{2m-2}^* + \sum_{s=0}^{\infty} {}^{2s}q_{2m} B_{2s}^{(0)} \dots\dots\dots (21)$$

から求める. 更にその後の各近似度の係数値は次式から求めることができる. すなわち $p \geq 1$ に対して

4. 数 値 例

$\mu=2$, $\lambda=0.2$ および 0.1 の場合について前節で得た基本式により A_{2m} , B_{2m} の値を計算すれば第 1 表および第 2 表を得る. なお表中の数値は (20) または (23) のはじめの 15 個の式を用いて B_{2m} の値を求めその後の計算にははじめの 10 個の B_{2m} の値のみを用いて得たものである. また (19) の級数は A , B に対しては $p=4$, L , M に対しては $p=3$ で打切った. このため はりの $\eta=1$ 縁には若干の σ_y , τ_{xy} が残るがこの値は $6P/b$ (切欠のない はりに問題の外力が働く場合の初等理論による最大外皮応力) の 0.1% 以下であり近似の程度は実用上十分であろう.

第 1 表 $\lambda=0.2$, $\mu=2.0$ の場合の係数値

m	L_{2m}^*	$-M_{2m}^*$	A_{2m}	B_{2m}	L_{2m}	$-M_{2m}$
0	$0.367 \ 01 \times 10^0$	$0.751 \ 13 \times 10^0$	$-2.025 \ 08$	$2.522 \ 35$	$0.113 \ 68 \times 10^0$	$0.236 \ 27 \times 10^0$
1	$0.817 \ 31 \times 10^{-2}$	$0.288 \ 20 \times 10^{-1}$	$-0.796 \ 27$	$1.728 \ 05$	$0.259 \ 88 \times 10^{-2}$	$0.102 \ 04 \times 10^{-1}$
2	$0.380 \ 97 \times 10^{-3}$	$0.138 \ 99 \times 10^{-2}$	$0.157 \ 89$	$0.035 \ 55$	$0.577 \ 66 \times 10^{-4}$	$0.291 \ 67 \times 10^{-3}$
3	$0.192 \ 47 \times 10^{-4}$	$0.750 \ 49 \times 10^{-4}$	$-0.072 \ 10$	$-0.017 \ 02$	$0.110 \ 31 \times 10^{-5}$	$0.646 \ 27 \times 10^{-5}$
4	$0.939 \ 17 \times 10^{-6}$	$0.384 \ 40 \times 10^{-5}$	$0.031 \ 48$	$0.023 \ 28$	$0.187 \ 19 \times 10^{-7}$	$0.120 \ 87 \times 10^{-6}$
5	$0.443 \ 76 \times 10^{-7}$	$0.187 \ 76 \times 10^{-6}$	$-0.015 \ 21$	$-0.017 \ 24$	$0.290 \ 62 \times 10^{-9}$	$0.201 \ 23 \times 10^{-8}$
6	$0.204 \ 80 \times 10^{-8}$	$0.887 \ 48 \times 10^{-8}$	$0.007 \ 55$	$0.012 \ 53$	$0.423 \ 20 \times 10^{-11}$	$0.308 \ 31 \times 10^{-10}$
7	$0.928 \ 43 \times 10^{-10}$	$0.409 \ 60 \times 10^{-9}$	$-0.003 \ 71$	$-0.009 \ 06$	$0.587 \ 14 \times 10^{-13}$	$0.444 \ 57 \times 10^{-12}$
8	$0.415 \ 06 \times 10^{-11}$	$0.185 \ 69 \times 10^{-10}$	$0.001 \ 71$	$0.006 \ 58$	$0.785 \ 12 \times 10^{-15}$	$0.612 \ 52 \times 10^{-14}$
9	$0.183 \ 50 \times 10^{-12}$	$0.830 \ 12 \times 10^{-12}$	$-0.000 \ 63$	$-0.004 \ 82$	$0.102 \ 01 \times 10^{-16}$	$0.815 \ 12 \times 10^{-16}$

第2表 $\lambda=0.1$, $\mu=2.0$ の場合の係数値

m	L_{2m}^*	$-M_{2m}^*$	A_{2m}	B_{2m}	L_{2m}	$-M_{2m}$
0	$0.183\ 51 \times 10^0$	$0.751\ 13 \times 10^0$	$-1.885\ 94$	$2.302\ 81$	$0.137\ 47 \times 10^{-1}$	$0.559\ 89 \times 10^{-1}$
1	$0.102\ 16 \times 10^{-2}$	$0.720\ 50 \times 10^{-2}$	$-0.811\ 47$	$1.695\ 34$	$0.828\ 08 \times 10^{-4}$	$0.639\ 93 \times 10^{-3}$
2	$0.119\ 05 \times 10^{-4}$	$0.868\ 68 \times 10^{-4}$	$0.178\ 57$	$0.035\ 50$	$0.478\ 60 \times 10^{-6}$	$0.476\ 68 \times 10^{-5}$
3	$0.150\ 37 \times 10^{-6}$	$0.117\ 26 \times 10^{-5}$	$-0.063\ 38$	$-0.042\ 78$	$0.236\ 01 \times 10^{-8}$	$0.273\ 12 \times 10^{-7}$
4	$0.183\ 43 \times 10^{-8}$	$0.150\ 15 \times 10^{-7}$	$0.025\ 84$	$0.030\ 53$	$0.102\ 92 \times 10^{-10}$	$0.131\ 49 \times 10^{-9}$
5	$0.216\ 68 \times 10^{-10}$	$0.183\ 36 \times 10^{-9}$	$-0.011\ 15$	$-0.020\ 60$	$0.409\ 02 \times 10^{-13}$	$0.561\ 03 \times 10^{-12}$
6	$0.250\ 00 \times 10^{-12}$	$0.216\ 67 \times 10^{-11}$	$0.004\ 69$	$0.014\ 09$	$0.151\ 86 \times 10^{-15}$	$0.219\ 49 \times 10^{-14}$
7	$0.283\ 33 \times 10^{-14}$	$0.250\ 00 \times 10^{-13}$	$-0.001\ 66$	$-0.009\ 83$	$0.535\ 23 \times 10^{-18}$	$0.805\ 18 \times 10^{-17}$
8	$0.316\ 67 \times 10^{-16}$	$0.283\ 33 \times 10^{-15}$	$0.000\ 19$	$0.006\ 97$	$0.181\ 15 \times 10^{-20}$	$0.281\ 22 \times 10^{-19}$
9	$0.350\ 00 \times 10^{-18}$	$0.316\ 67 \times 10^{-17}$	$0.000\ 51$	$-0.005\ 00$	$0.593\ 67 \times 10^{-23}$	$0.935\ 30 \times 10^{-22}$

第 2 図

第 3 図

これらの係数値を用いてはりの主要部分の応力を計算し図示すれば第2図～第6図のようになる。なお応力表示式 (13)～(15) は $\rho > 1$ に対して収れんが悪く計算が困難になるのでこの領域に対しては (8) および (10) の応力かん数に帰って応力を計算した。

得られた結果の主要

第 4 図

第 5 図

第 6 図

な特徴を要約すると

(1) 切欠底部に生ずる最大応力値は $\lambda=0.2$, 0.1 に対してそれぞれ $2.68 \times 6P/b$, $2.63 \times 6P/b$ であり, $\lambda \rightarrow 0$ なる極限の場合の値 $2.92 \times 6P/b$ より低い。これは切欠のない はり の最大応力が直線縁にあることを考えればうなずけることである。

(2) 対称線上の σ_x の分布は第2図に示すとおり切欠縁で最大で内部に入ると最初急激に, その後はほぼ直線的に減少する。なお第2図中の点線は Pb なる大いさのモーメント (切欠のない はり に問題の外力が働いたときの初等理論による最大曲げモーメント) が $\lambda=0.2$ なる半円切欠を有する はり に一様に働いた場合の $x=0$ 線上の σ_x の分布⁽⁷⁾であり, 最大応力は今の場合のそれより約6% 高いが分布の傾向はよく似ている。

(3) 対称線上の σ_y の分布は第3図に示すごとく

切欠の影響は余り大きくないが、切欠の近くで一度引張応力になることが知られる。

(4) $\eta=0$ に沿う σ_{θ} の分布は第5図に示すように切欠縁で零であり、一度圧縮応力となり、ついで符号を変えて切欠のない場合の値に接近する。しかし $\lambda=0.2$ 程度では切欠中心からはりの幅だけ離れるとほとんど一致する。

(5) $\eta=1$ に沿う σ_{θ} (第6図) についても切欠の影響は対称線の近くでは相当あるが、この線からはりの幅だけ離れるとほとんど消失する。

5. 要 約

無限に長い単純支持はりの支点の中央に集中荷重が働く場合荷重点の対辺に存在する半円切欠の影響を明確にする問題を二次元弾性理論に基づいて取り扱い、解の応力かん数に含まれる係数を逐次近似法によって決

定した。

次いで2例について数値計算にうってあてはりの内部の主要な応力分布を求め、切欠の応力分布に対する影響を明らかにした。

最後にこの研究にあたって終始御懇篤な御指導を賜わった樋口盛一教授に心からの謝意を表する。

注:一

- (1) 昭和 28 年 4 月 4 日 第 30 期定時総会講演会において講演原稿受付 昭和 28 年 7 月 13 日。
- (2) 正員, 東北大学工学部。
- (3) M. M. Leven and M. M. Frocht, J. App. Mech., Trans. A. S. M. E., Vol. 19, p. A-560 (1952).
- (4) L_{2m}^* , M_{2m}^* の評価に当つては、前報告と同様に m が小なるときは直接数値積分により、 m が大きいときは漸化式を用いた。注 5 参照。
- (5) 玉手統, 機械学会論文集, 18 巻 75 号, 7 ページ(昭 27-11)
- (6) 玉手統, 東北大学報告, 16 巻 2 号, 42 ページ(昭 27-3) (17'), (18') 式。
- (7) 注 5 参照。

539.384.6

任意の多数軸対称集中荷重の作用する有限長薄肉円筒のたわみ⁽¹⁾

齊 藤 渥⁽²⁾

Deflection of a Cylindrical Shell of Finite Length under Many Axially Symmetrical Concentrated Loads

by Atsushi SAITO

Expressing many axially symmetrical concentrated loads on a cylindrical shell of finite length by Dirac's δ -function and integrating easily the particular solution of the equation of shell by a property of δ -function, the author derived the solutions of deflections and bending moments of the shells under the some conditions of the ends.

1. 緒 言

軸対称な単一集中荷重を受けた無限長薄肉円筒あるいは等間隔に同じ大きさの軸対称集中荷重を受けた無限長薄肉円筒等のたわみの解は既に知られている⁽³⁾が有限長薄肉円筒が任意の位置に任意の大きさの軸対称集中荷重を受けた場合のたわみの解は未だ得られていないようである。本論文では円筒に作用する軸対称集中荷重を Dirac の δ -かん数を用いて表現し本問題の微分方程式の特解の積分を容易に行い、これと補助解を合成してたわみの一般解を導出する。

2. 基 礎 式

長さ l の円筒かくの一端 O に原点を、軸方向に x 軸を、半径方向に z 軸をとる。また z 方向のかくの変位を w で表わす。このとき軸対称荷重を受けた薄肉円筒かくのたわみは次記微分方程式を満足する。

第 1 図

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{Z}{D} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{ただし } \beta^4 = \frac{Eh}{4\rho^2 D} = \frac{3(1-\nu^2)}{\rho^2 h^2}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Z = 円筒面に作用する軸対称圧力度

E = 円筒かく材料の縦弾性係数