536.21.01 : 517.941.921

特に熱伝導の問題に関連した無限元 1 次連立方程式の一解法⁽¹⁾小 笠 原 光 信⁽²⁾A Solution of the Linear Simultaneous Equations with Infinite Unknowns,
with Special Reference to the Problem of Heat Conduction

by Mitunobu OGASAWARA

In our previous study on the problem of heat conduction, it was required to solve the linear simultaneous equations with infinite unknowns. In this report, methods to solve those equations are dealt with.

We assume that the existence and the uniqueness of the solution are assured from the physical meaning of the given problem.

The main procedure of this method is the transformation of simultaneous equations into a Fredholm's integral equation.

Firstly, a method to find an exact solution; secondly, for the cases where an exact one cannot be found, an approximate method is established. Lastly, applying the latter to a problem of heat conduction, a good result is obtained.

1. 緒 言

熱伝導の問題において、特に物体の形が複雑な場合、表面条件または物質の物理常数が部分的に異なる場合などでは接合法によって固体内部の温度分布を解析的に知ることができる⁽³⁾⁽⁴⁾。このとき接合面上の未知の温度こう配の分布をあらかじめ級数で与えておき、後に接合条件からすべての係数をきめる。したがって初めに無限級数を用うれば、この係数をきめるために無限元 1 次連立方程式を解かねばならなくなる。筆者が前に行った計算では⁽⁴⁾、この方程式の性質から、初めの m 個の係数のみに着目しそれ以下を切り捨て、 m 元 1 次連立方程式として取り扱い、その中で更に初めの数個の係数のみを用いて近似的な等温線図を描いた。この結果は固体内の大部分において十分信用できる温度を与えたが、しかし局部的には著しい誤差を生じた、その原因は、そこでは温度を与える級数の収れんが悪く、更に多くの項を必要としたことにある。しかし、十分多くの項を消去法によって求めることは労力の上からのみならず、また誤差の累積の点から見ても不可能に近い。多元連立方程式の解法については近來新しい方法が数々発表されているが、ここでは無限元のままの取り扱いを試みた。

この報告では、物理的意味からただ一組の解を持つと考えられるような無限元 1 次連立方程式について、まず厳密解を求めること、次にこれが得られない場合に、任意番目の係数の近似値を求める方法について述べ、同時に当面の熱伝導の問題に応用して以前に得た

結果と比較する。

なお、この方法の基本方針は、Fredholm の積分方程式が無限元 1 次連立方程式に帰着されるという既知事項⁽⁵⁾を逆用したものである。

2. 目 的

a_{qp} , b_q が既知数であるとき、無限元 1 次連立方程式

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{qp} A_p = b_q \quad (q=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots(1)$$

において A_p を求めること。

3. 解析的解法

変域 (α, β) 内における二組の任意の完全法化直交かん数系をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} &\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots \\ &\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

とする。

次に下記のように $f(x)$ および $K(x, y)$ を定義する。すなわち、

$$\sum_{q=1}^{\infty} b_q \psi_q(x) = f(x) \quad \dots\dots(3)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{qp} \psi_q(x) \varphi_p(y) = K(x, y) \quad \dots\dots(4)$$

ただし左辺の級数は一様収れんであるとする。これら f , K および

$$\left. \begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_p(\eta) \varphi_r(\eta) d\eta = 0 \quad (p \neq r) \\ &= 1 \quad (p = r) \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

なる関係を用いれば、次のような変換ができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} K(x, \eta) \sum_{r=1}^{\infty} A_r \varphi_r(\eta) d\eta \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} A_r a_{qp} \psi_q(x) \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_p(\eta) \varphi_r(\eta) d\eta \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_p a_{qp} \psi_q(x) \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \psi_q(x) \sum_{p=1}^{\infty} A_p a_{qp} = \sum_{q=1}^{\infty} b_q \psi_q(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

ゆえに、ここで $\sum_{r=1}^{\infty} A_r \varphi_r(y) = u(y) \dots\dots\dots (6)$

とおけば、 $u(y)$ は次の第 1 種 Fredholm 積分方程式を解くことによって求められる。すなわち、

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(x, \eta) u(\eta) d\eta = f(x) \dots\dots\dots (7)$$

$u(y)$ が求められれば、(6) の両辺に $\varphi_p(y)$ を乗じ y について α から β まで積分することにより A_p が求められる。すなわち (6) と (5) とから、

$$A_p = \int_{\alpha}^{\beta} u(y) \varphi_p(y) dy \dots\dots\dots (8)$$

ただし、このように A_p を定めたときに (6) は一様収れんでなければならない。

以上の過程を振り返ると次のことがわかる。

(i) (7) の積分方程式および (8) の積分が解析的に解ける場合には、かかる連立方程式の厳密解が得られる。(附録 1 参照)

(ii) ψ なるかん数系は (3) の $f(x)$ を展開するさいのみ必要であったから、これは必ずしも φ と異なるかん数系である必要はない。

4. 数値計算による近似解法

3 の方法による解析解が得られない場合には数値計算によらねばならない。もちろん以上の過程を数値計算でたどればよいが、その計算は繁雑である。少しでも簡単にする目的で、ここでは次のように行った。

(7) を書き直して

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{qp} \psi_q(x) \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_p(\eta) u(\eta) d\eta = \sum_{q=1}^{\infty} b_q \psi_q(x)$$

両辺に $\psi_r(x)$ を乗じて x について α から β まで積分すれば、

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{rp} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_p(\eta) u(\eta) d\eta = b_r, \quad (r=1, 2, 3, \dots\dots)$$

または、

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\sum_{p=1}^{\infty} a_{rp} \varphi_p(\eta) \right] u(\eta) d\eta = b_r, \quad (r=1, 2, 3, \dots\dots) \dots\dots\dots (9)$$

[ ] 内は既知であるから、積分方程式の数値解法によって $u(y)$ が求められる。ここでは特に $u(y)$ をあらかじめ、有限項の適当な多項式で近似できるものとし、この項数だけの方程式を作り、この連立方程式から多項式の係数を決定した。かくして $u(y)$ の近似式を求めれば、 A_p の近似値は

$$A_p = \int_{\alpha}^{\beta} u(y) \varphi_p(y) dy \dots\dots\dots (8)$$

から計算できる。

以上のことから次のことが言える。

(i) (9) には ψ は含まれていない。ゆえに ψ は不必要である。

(ii) この方法によって求めた A_p の精度は全く $u(y)$ の精度いかにによる。

(iii) $u(y)$ を表わす近似多項式はできるだけ少しい項数でしかもよく近似できるものが望ましい。このためには問題の物理的意味をあわせ考えた上で試行によらねばならない。

(iv) $u(y)$ の正しい値は一般には無限級数で表わさるべきであろう。それならばこの級数の係数を決定するためには新しく無限元 1 次連立方程式を解かねばならなくなる。ゆえに m 項の近似多項式を用いて求めた係数の精度は、必ずしも、原式を m 元で打ち切って求めた A_p の精度より高いとは言えない。しかし多項式の選択の自由性のため精度を高くする可能性は多いと言える。

(v) この方法の特長は A_p の一般項に関する近似式が求められるということにある。なお、原式を m 元で打ち切って取り扱うことの不可能な連立方程式に対してもこの方法によれば近似解を求めうる場合がある(附録 2 参照)。

5. 応 用 例

無限平板上で熱伝達率が局所的に異なる場合については既に報告した⁽⁴⁾。その

さい、例題としては図のような場合を取り扱った。このように、表面条件が断熱と等温のみであるような特殊な場合には、Schwarz-Christoffel の変換によって厳密解が求められるのであるが⁽⁶⁾、そこでは接合法を用いた。すなわち $z=0$

第 1 図

で板を切半し、領域 I および II に属する接合面での z 方向の未知の温度こう配をそれぞれ別な Fourier 級数を表わしておき接合条件からこの係数をきめようとする。ここで無限元 1 次連立方程式が現われる。かくして得た結果の一部を示すと、領域 I 内の温度 θ_1 は、

$$\theta_1 = \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} A_p e^{-\frac{2p-1}{2} \pi \frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{2p-1}{2} \pi \frac{x}{\delta}\right) \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 A_p は次の連立方程式からきめられるべき係数である。

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2A_p}{2p-2q-1} = \frac{1}{q}, \quad (q=1, 2, 3, \dots\dots) \dots\dots\dots (11)$$

II 内の温度 θ_2 も同様な形式で表わすことができる。もしも (11) が厳密に解きうるならば、 θ_1 と θ_2 ； $\partial\theta_1/\partial z$ と $\partial\theta_2/\partial z$ とはそれぞれ $z=0$ において等しくなるべきである。しかし既報の計算では (11) の初めの 10 元のみをとったために接合面でくい違いを生じた。この大きさは $x>0$ の大部分にわたって無視できる程度であるが原点に近づくとき急に大きくなる。すなわち $\theta_2=600^\circ\text{C}$ 、 $\theta_1=0^\circ\text{C}$ とおいた場合に原点では 100°C に達した。この理由は原点を II の一部と見るときは θ_2 であるのに対し、I の一部と見るときは (10) から

$$(\theta_1)_{x=0, z=0} = \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} A_p \dots\dots\dots (12)$$

となり、その収れんが悪く、もっと多くの A_p が必要になるためである。そこで一層よい A_p を得る目的で上の方法を応用してみる。すなわち (11) から A_p を求ようとする。

第 1 表

項 数	$y=0.1$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
3	0.3484	0.4781	0.6365	0.7283	0.7779	0.7944
4	0.3492	0.4787	0.6368	0.7286	0.7782	0.7945
5	0.3479	0.4780	0.6362	0.7281	0.7779	0.7938

第 2 表

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_{10}	A_{50}	A_{100}
本 法	0.6370	0.1063	0.0479	0.0285	0.0195	0.0063	0.0052	0.0019
10 元	0.6208	0.0980	0.0424	0.0231	0.0145	0.0018	—	—
厳 密 解	0.6366 ($2/\pi$)	0.1061 ($1/3\pi$)	0.0478 ($3/20\pi$)	0.0284 ($5/56\pi$)	0.0194 ($35/576\pi$)	—	—	—

$$u(y) = 1.15816\sqrt{y} - 0.15748y - 0.20630y^2 \dots\dots\dots (15)$$

ゆえに A_p の近似値は、

$$A_p = \sqrt{2} \int_0^1 (1.15816\sqrt{y} - 0.15748y - 0.20630y^2) \sin \frac{2p-1}{2} \pi y dy \dots\dots\dots (16)$$

この A_p の値を第 2 表の第 1 行に示す。なお、既報のごとく 10 元で打ち切って求めた $A_1 \sim A_{10}$ を参考に第 2 行に示す。また Schwarz-Christoffel の変換による厳密解から逆算した正しい A_p の値を第 3 行に記す。ここで p の大きな厳密解を求めることは累積的に労力が増す。そこで直接の比較は断念して、 A_p の総和を検してみる。まず (11) で各 q に対して左辺と右辺とを比べると第 3 表のようになる。次に (12) から A_p の総和が 1 となるべきであるが

第 3 表

q	左 辺	右 辺
1	1.0000	1/1
2	0.5000	1/2
10	0.1001	1/10

和を検してみる。まず (11) で各 q に対して左辺と右辺とを比べると第 3 表のようになる。次に (12) から A_p の総和が 1 となるべきであるが

まず変域を $(0, 1)$ ； $\varphi_p(y)$ を $\sqrt{2} \sin \{(2p-1)\pi y/2\}$ と選ぶと (9) は、

$$2\sqrt{2} \int_0^1 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin \{(2p-1)\pi y/2\}}{2p-2q-1} u(y) dy = \frac{1}{q} \dots\dots\dots (13)$$

次に $u(y)$ を表わす近似多項式として次式を仮定する。

$$u(y) = c_0\sqrt{y} + c_1y + c_2y^2 + \dots\dots\dots + c_iy^i \dots\dots\dots (14)$$

上式に定数項を入れなかった理由は、(12) から、 $\sum A_p$ が有限値をとるべきことであり、 $\sqrt{y}$ を第 1 項にとった理由は試行によって $u(y)$ 曲線の概略の形を知ったからである。(14) を (13) に入れて q を 1, 2, 3, …… とすると $(i+1)$ 元の連立方程式が得られ、これを消去法によって解くと各の c が求められる。かくして (14) において項数を 3, 4, 5 と増して $u(y)$ の変動を見ると第 1 表のようになる。すなわち $u(y)$ は初めの 3 項を用いただけでほぼ定まることがわかる。ここでは 3 項の場合を採用すると、

実際に上の A_p を用いて計算すると 1.000 である。したがって原点におけるくい違いは、前報では 100°C にも達したものが、この方法では $1/2^\circ\text{C}$ 以下となり、等温線図を描く目的では十分満足な結果であると言える。

なお、誤差の分布については概略次のように考えられる。 A_p の誤差は $u(y)$ の誤差にもとづくから、正しいものを $*$ で、誤差を Δ で表わすと、

$$\Delta u(y) = u^*(y) - u(y)$$

$$\frac{\Delta A_p}{A_p^*} = \frac{\int_0^1 \Delta u(y) \varphi_p(y) dy}{\int_0^1 u^*(y) \varphi_p(y) dy}$$

$u(y)$ は一般に第 1 項の支配を最も強くうけるから、概略、

$$\Delta A_p / A_p^* \approx \Delta c_0 / c_0^*$$

すなわち、 A_p が途中で急に大きな誤差を生ずることはない。

6. 結 言

以上、ただ一組の解を持つ無限元 1 次連立方程式に

ついて、厳密解を求めること、またこれが求められない場合には近似解を求めることについて述べた。その間、数学的に見て不備な点が多いことと思われるが、筆者が当面した熱伝導の問題に応用してよい結果を取めたため、一つの試みとして報告する。

終りに臨んで、常々懇篤な御指導を仰いでいる大阪大学阿部久三郎教授；数学上の質義に対して数々の御教示を賜った坪光松二教授；きわめて有力な御助言をいただいた谷村正義助教授、菊川真助教授ならびに畏友伊藤健三理学士の方々に對し深甚の謝意を表する。

附 録 1.

以上の方法により厳密解が求められる場合の例をあげる。

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{(2q)^2 - (2p-1)^2} = \frac{1}{q^2}, \quad (q=1, 2, 3, \dots)$$

から A_p を求めようとする。

変域を $(0, 1)$ ，法化直交かん数系を

$$\varphi_p(y) = \sqrt{2} \cos \frac{2p-1}{2} \pi y,$$

$$\psi_q(x) = \sqrt{2} \cos q\pi x.$$

(3) から

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\cos q\pi x}{q^2} = \sqrt{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3} \right).$$

(4) から

$K(x, y)$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2}{(2q)^2 - (2p-1)^2} \cos q\pi x \cdot \cos \frac{2p-1}{2} \pi y$$

$$= -2 \sum_q \cos q\pi x \sum_p \frac{\cos \frac{2p-1}{2} \pi y}{(2p-1)^2 - (2q)^2}$$

$$= -2 \sum_q \cos q\pi x \frac{\pi \sin q\pi(1-y)}{8q \cos q\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2^3} \sum_q \left[\frac{\sin q(x+y)\pi}{q} - \frac{\sin q(x-y)\pi}{q} \right]$$

$$= \begin{cases} -\frac{\pi^2}{2^3} y, & x > y, \\ \frac{\pi^2}{2^3} (1-y), & x < y. \end{cases}$$

これらを (7) に代入すると、この積分方程式は容易

にとけて、

$$u(y) = \frac{2^3}{\sqrt{2}} (1-y).$$

ゆえに、

$$A_p = 2^3 \int_0^1 (1-\eta) \cos \frac{2p-1}{2} \pi \eta d\eta \\ = \frac{2^5}{\pi^2} \frac{1}{(2p-1)^2}$$

附 録 2.

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{(p+q)(p+q+1)} = \frac{1}{q+1}, \quad (q=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots (a)$$

上式を m 元で打ち切って A の初め数項の近似値を求めようとする、 m を増すに従って、おのこの $|A|$ が振動的に増して全く不確定である。これに以上の方法を用いてみる。

変域を $(0, 1)$ ， $\varphi_p(y) = \sqrt{2} \sin p\pi y$ とすると (9) は、

$$\sqrt{2} \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\sin p\pi \eta}{(p+q)(p+q+1)} u(\eta) d\eta = \frac{1}{q+1} \quad \dots\dots\dots (b)$$

この $u(y)$ の近似多項式を求めるためにベキ級数を用いて試みた結果、 $u(y)$ 曲線が c/y によっておよそ近似できそうなことを知った。そこで、

$$u(y) = c_{-1}y^{-1} + c_0 + c_1y + c_2y^2 + \dots\dots\dots + c_iy^i \quad \dots\dots\dots (c)$$

とおき、項数を変えて曲線の変動を見たところが 3 項で既に安定し、それ以後の変動はわずかである。まず 3 項までとつた場合には、

$$u(y) = 0.45006/y + 0.00746 - 0.40988y \\ A_p = \sqrt{2} [0.45006 S_i(p\pi) \\ + 0.00746(1 - \cos p\pi)/p\pi - 0.40988 \cos p\pi/p\pi] \quad \dots\dots\dots (d)$$

4 項までとつた場合には、

$$u(y) = 0.45030/y - 0.00518 - 0.33381y - 0.08997y^2 \\ A_p = \sqrt{2} [0.45030 S_i(p\pi) - 0.00518(1 - \cos p\pi)/p\pi \\ - 0.33381 \cos p\pi/p\pi \\ + 0.17994(1 - \cos p\pi)/(p\pi)^3] \quad \dots\dots\dots (e)$$

これらの A_p を比べると第 4 表のようになる。

第 4 表

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_{10}	A_{20}	A_{30}	A_{∞}
(d)	1.001	0.995	1.007	0.996	1.005	0.998	0.999	0.999	1.000
(e)	1.000	0.999	1.002	0.998	1.002	0.999	1.000	1.000	1.000

原式の解は、実は視察によって直ちに求められるもので A_p はすべて 1 である。これと比べることにより、上の結果がかなりよい値であることが知れる。

なお、原式を m 元で打ち切った場合に起る不確定さは次のように説明できる。いま (b) の $u(y)$ を決

定する目的であらかじめ $u(y)$ を (c) とは異なった

$$u(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi y \quad \dots\dots\dots (f)$$

で近似させようとしたものとする。これを (b) に代入すると c_n を定めるための連立方程式は、実は原式

(a) の形にもどってしまう。一方 (b) の厳密解は視察によって求められ、

$$u(y) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi y + f(y) \dots\dots\dots (g)$$

ただし $f(y)$ は $\sin n\pi y$ に対する直交かん数群であって、これは φ が不完全系であったために出てきたものである。この $f(y)$ は A_p の計算には消滅するものであるから第 1 項のみについて考える。かくして (f) と (g) とを比べると c_n の厳密な値は、実は、すべて $\sqrt{2}$ であったわけで、したがって (f) は一様収れん

級数ではなかったのである。すなわち、かかる級数を有限元で打ち切ろうとしたところに不確定な値が出た原因がある。

注：—

- (1) 昭和 25 年 11 月 25 日 関西支部第 172 回講演会において講演、原稿受付 昭和 28 年 8 月 4 日。
- (2) 正員、大阪大学。
- (3) 近藤、機械学会誌、34 巻 170 号、852 ページ (昭 6)。
- (4) 小笠原、機械学会論文集、16 巻 54 号、1 ページ (昭 25)。
- (5) Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik I, S. 136 (1931)。
- (6) 宮本、二次元問題、84 ページ。

536.33

ふく射による固体の冷却⁽¹⁾

小 笠 原 光 信⁽²⁾

Cooling of Solids due to Radiation

by Mitunobu OGASAWARA

In treating the cooling problem of a solid body situated in the air, when the initial temperature difference between the solid and the surroundings is not small, the effects of the air convection and the surface radiation of the solid must be considered separately.

In this report, taking only the effect of radiation into consideration and assuming that it follows the T^4 -law, the surface temperature variations due to cooling of a semi-infinite body, an infinite plate, an infinite cylinder and a sphere are calculated.

1. 緒 言

物体の冷却にさいして、周囲との温度差が小さいときには、放熱量は Newton の冷却則によって与えられるものとしてさしつかえない。このような場合、簡単な形の物体内の温度の推移は Gröber⁽³⁾, Bachmann⁽⁴⁾, Gurney-Lurie⁽⁵⁾ などの線図から容易に知ることができる。しかし温度差の大きい場合には、上のように、熱伝達率を一定と見なし、しかもその中に対流とふく射の両効果を含めることはできなくなる。熱伝達率を温度の かん数 とおいた場合については既に川下⁽⁶⁾, 佐藤⁽⁷⁾⁽⁸⁾ の研究がある。この報告では特に ふく射 のみによる固体の冷却—すなわち、現象としては真空内での固体の冷却—について考えた。そして、このふく射の現象が T^4 の法則に従うものと仮定して、半無限体、無限平板、無限円柱および球について表面温度の時間的変化をしらべ、実用上特に必要と思われる範囲のみについて線図を作った。

2. 半無限体

第 1 図において、考えている物体 I に向き合ってそれとふく射熱交換を行う第 2 の物体 II がある。II の温

度 θ_w は一定不変であり、また I の初期温度 θ_0 は一定であると仮定する。I 内の場所 x , 時刻 t における温度を $\theta(x, t)$, また特にその表面温度を $\theta_w(t)$ とする。ただし温度に

第 1 図

はすべて絶対温度を用いる。問題は $\theta_w(t)$ を求めることであるが、かりにこれが知れたとすれば $\theta(x, t)$ は $\theta_w(t)$ の かん数 として求めることができる。この $\theta(x, t)$ を求めるには次の基礎式および初期、境界条件を用うれば十分である。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \dots\dots\dots (1a)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0, \quad \theta(0, t) = \theta_w(t) \dots\dots\dots (2a)$$

ただし、 κ は温度伝導率で $\kappa = \lambda / c\gamma$; λ , c , γ はそれぞれ I の熱伝導率、比熱および比重でこれらは一定とする。(2a) を満足する (1a) の解はよく知られており、