621.981.214.01 : 539.384.2 : 539.374

薄板の曲げ加工の研究 (第2報)⁽¹⁾益田 森 治⁽²⁾ 室田 忠 雄⁽³⁾

On the Plastic Research of Bending of the Sheet Metal (2nd Report)

by Moriji MASUDA and Tadao MUROTA

In the first report it was shown that the analysis of sheet metal bending might be based on the tensile stress-strain diagram only, although the deformation was very complicated.

From the point of this view, this report deals theoretically with the plastic bending of sheet metal by V-type punch and die. The analysis consists of two cases. First, sheet metal is supported on the edge of V-type die and loaded at the center line. Secondly the supports are transferred from the edge to the face of V-type die and load acts at the center as before.

The results obtained in the analysis very well agrees with the experiment.

1. 緒 言

プレス工作における曲げは複雑な変形をたどるが、引張試験の結果を基準として解析をすすめてさしつかえないということを第1報⁽⁴⁾で報告した。

本報では V 型ダイスによる薄板の塑性曲げを、以上の観点から解析した結果について述べる。

2. 解 析

いま幅 b , 厚さ h の薄板を第1図のような V 型ダイスで曲げる場合を考えてみる。ただしダイス肩の距離を $2L$, ダイス角を θ とし, $\alpha = (180^\circ - \theta)/2$ とおく。ここでは

第 1 図

i) 材料の応力・

ひずみ線図は引張りと圧縮と相等しく、ともに

$$\epsilon = (\sigma/F)^n \dots\dots\dots (1)$$

と表わせる。

ii) 弾性はりと同じように断面は曲げられた後も平面を保ち、かつその形状も変らない。

iii) セン断応力の影響は無視できる。

という仮定を設ける。しかるときは任意断面の曲げモーメント M と、中立軸の曲率半径 ρ の間には

$$M = 2 \int_0^{h/2} \sigma \cdot b \cdot \eta \cdot d\eta = A \left(\frac{1}{\rho} \right)^{\frac{1}{n}} \left. \begin{aligned} \text{ただし} \quad A &= \frac{2bF(h/2)^{2+\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

が成立する(第1報参照)。

次に V 型ダイスによる曲げ過程を解析するにあたり、ダイス肩でささえられているときと、さらにダイスの中に押しこまれてダイス斜面でささえられているときとの二つに分けて考察する。

2・1 ダイス肩でささえられているとき

(a) 理論 第2図のように板の中央にポンチ力

第 2 図

$2P$ が作用するとき中央の たわみ を Y とする。いま曲げられた板の中央に原点 O を選んで水平に x 軸、鉛直に y 軸をとり、さらに板(中立軸のたわみ曲線だけを考える)の任意の点 (x, y) における切線が x 軸となす角を φ , この点の曲率半径を ρ , 原点からこの点まで板に沿って測った長さを s とすれば,

$$ds = \rho \cdot d\varphi \dots\dots\dots (3)$$

$$dx = ds \cdot \cos \varphi \dots\dots\dots (4)$$

$$dy = ds \cdot \sin \varphi \dots\dots\dots (5)$$

となる。次に支点(ダイス肩)における板の x 軸に対する傾斜角を φ_L とし、支点において板に垂直に作用する反力を Q , Q による摩擦力を μQ とする。ただし μ は支点における摩擦係数で、摩擦角を ν とすれば

$$\mu = \tan \nu \dots\dots\dots (6)$$

とおける。反力 Q は y 軸と φ_L の角をなすから、 Q と μQ との合力 R は y 軸と $(\varphi_L - \nu)$ の角をなす。

いま $\omega = \varphi_L - \nu$ ..... (7)

とおき、合力 R を y 軸方向と x 軸方向の成分に分ければ、 y 軸方向の成分はポンチ力とつり合うから P となり、従って x 軸方向の成分は $P \tan \omega$ である。よって任意の点 (x, y) における曲げモーメント M は

$$M = P\{L - x + (Y - y)\tan \omega\} \dots \dots \dots (8)$$

となる。以上のことはダイス角 θ の大きさには無関係に、 $\varphi_L \leq \alpha$ である限り常に成立する。すなわちダイス角 θ がいくらであっても取扱いは同一である。結局曲げの解析は (2), (3), (4), (5) および (8) 式を連立させて解く問題に帰する。

まず (3), (4) および (5) 式より

$$dx = \rho \cos \varphi \cdot d\varphi, \quad dy = \rho \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \dots \dots (9)$$

また (8) 式より

$$dM = -P(dx + dy \cdot \tan \omega) \dots \dots \dots (10)$$

よって (9) および (10) 式より

$$dM = -\frac{P \cdot \rho}{\cos \omega} \cos(\omega - \varphi) d\varphi \dots \dots \dots (11)$$

一方 (2) 式より $\rho = A^n / M^n$ ..... (12)

となるから、(12) 式を (11) 式に代入して ρ を消去すれば未知数 M のみを含む式が得られる。すなわち

$$M^n \cdot dM = -\frac{A^n P}{\cos \omega} \cos(\omega - \varphi) \cdot d\varphi$$

$$\therefore \frac{1}{1+n} \cdot M^{1+n} = \frac{A^n P}{\cos \omega} \sin(\omega - \varphi) + C \dots (13)$$

ここで積分定数 C を決めるために、ダイス肩においては

$$\varphi = \varphi_L \text{ において } M = 0 \dots \dots \dots (14)$$

なる条件を用いることによって

$$\frac{M}{A} = \left[\frac{(1+n) \cdot P}{A \cos \omega} \{\sin(\omega - \varphi) + \sin \nu\} \right]^{\frac{1}{1+n}}$$

$$\dots \dots \dots (15)$$

(12), (15) の両式より

$$\rho = \left[\frac{(1+n) \cdot P}{A \cos \omega} \{\sin(\omega - \varphi) + \sin \nu\} \right]^{-\frac{n}{1+n}}$$

$$\dots \dots \dots (16)$$

これによって任意の点の曲率半径が求められた。しかし荷重 P と角 ω との関係がわかっていないので、このままでは計算できないから、次のようにして P を消去する。

(3) および (9) 式より、任意の φ に対応する s, x, y は次式で与えられる。すなわち

$$s = \int_0^\varphi \rho \cdot d\varphi, \quad x = \int_0^\varphi \rho \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi,$$

$$y = \int_0^\varphi \rho \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \dots \dots \dots (17)$$

ここで ρ は (16) 式で与えられるから簡単のため

$$\Phi_1(\varphi) = \int_0^\varphi \{\sin(\omega - \varphi) + \sin \nu\}^{-\frac{n}{1+n}} d\varphi,$$

$$\Phi_2(\varphi) = \int_0^\varphi \{\sin(\omega - \varphi) + \sin \nu\}^{-\frac{n}{1+n}} \cos \varphi \cdot d\varphi,$$

$$\Phi_3(\varphi) = \int_0^\varphi \{\sin(\omega - \varphi) + \sin \nu\}^{-\frac{n}{1+n}} \sin \varphi \cdot d\varphi$$

$$\dots \dots \dots (18)$$

とおくことにより

$$\frac{s}{\Phi_1(\varphi)} = \frac{x}{\Phi_2(\varphi)} = \frac{y}{\Phi_3(\varphi)} = \left\{ \frac{A \cdot \cos \omega}{(1+n) \cdot P} \right\}^{\frac{n}{1+n}}$$

$$\dots \dots \dots (19)$$

特に $\varphi = \varphi_L$ のとき $x = L$ となるから

$$L = \left\{ \frac{A \cdot \cos \omega}{(1+n) \cdot P} \right\}^{\frac{n}{1+n}} \Phi_2(\varphi_L) \dots \dots \dots (20)$$

よって (16) 式と (20) 式より

$$\frac{1}{\rho/L} = \Phi_2(\varphi_L) \cdot \{\sin(\omega - \varphi) + \sin \nu\}^{\frac{n}{1+n}} \dots (21)$$

また (19) 式と (20) 式より

$$\frac{s}{L} = \frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi_L)}, \quad \frac{x}{L} = \frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_2(\varphi_L)}, \quad \frac{y}{L} = \frac{\Phi_3(\varphi)}{\Phi_2(\varphi_L)}$$

$$\dots \dots \dots (22)$$

特に $\varphi = \varphi_L$ のとき $y = Y$ となるから

$$Y/L = \Phi_3(\varphi_L)/\Phi_2(\varphi_L) \dots \dots \dots (23)$$

かくして曲げられた板の中立軸の形状(たわみ曲線)が求められた。ここでは ρ, s, x, y を支点距離の半分 L で割って、無次元の取扱いとした。すなわち右辺はいずれも板の寸法には無関係で φ_L および φ のみのかん数である。

また (20) 式より荷重 P は

$$P = \frac{A \cos \omega}{1+n} L^{-\frac{1+n}{n}} \{\Phi_2(\varphi_L)\}^{\frac{1+n}{n}} \dots \dots \dots (24)$$

ここで A は (2) 式で与えられているから

$$\frac{2P}{bL} / F = \frac{\xi^{2+\frac{1}{n}} \cos \omega}{2^{\frac{1}{n}} (1+n) \left(2 + \frac{1}{n}\right)} \{\Phi_2(\varphi_L)\}^{1+\frac{1}{n}}$$

$$\dots \dots \dots (25)$$

ただし $\xi = h/L$ とする。すなわち ξ は板の厚さを示す無次元の定数である。

(b) 数値計算と実験結果 いま第1報に用いたと同じ 99.8% のアルミニウム板を対象として計算する。引張試験の結果から (1) 式の定数は、

$$\epsilon < 0.04 \text{ では } n = 2.600, F = 2230 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon < 0.08 \text{ では } n = 3.002, F = 1816 \text{ kg/cm}^2$$

よって $\mu = 0, 0.2, 0.3, 0.4$ と仮定し、それぞれの μ について計算した。ここでは $\theta = 90^\circ$ したがって $\alpha = 45^\circ$ のダイスを対象として、 φ_L は 45° までについて計算した。

(i) 中央のたわみ Y/L が φ_L とともに変化する様子を (23) 式から計算して第3図に示す。この関係は μ の値によってはほとんど変らない。なおアルミニウム ($L = 2.40 \text{ cm}, b = 4.9 \text{ cm}, h = 0.150 \text{ cm}$) について行った実験結果と比較してよく一致していることが認められる。

(ii) ポンチ力 $2P/bL$ は (25) 式より φ_L のかん

数として計算される。また φ_L をパラメータとして $2P/bL$ と Y/L を結びつけることができる。かくして求めたポンチ力と中央のたわみとの関係を示すと第4図の曲線群 0A となる。ただしこれは $\xi=0.150/2.40=0.0625$ の場合である。 μ は $0.2 \sim 0.4$ の範囲で実験値と一致した。この計算によると、ダイス肩の

第 3 図

第 4 図

摩擦係数 μ の値は曲げが進行するにつれて次第に増大すると考えられる。

このように摩擦係数は増大すると考えられるにもかかわらずポンチ力はある所で極大値を有し以後曲げの進行とともに減小してゐる。これは(8)式の右边において φ_L の増加とともに $\{ \}$ の中の増加がはなはだしくて P が減少しても曲げモーメント M は増大するためである。

(iii) おおのこの φ_L に対して(21)および(22)式を計算することによってたわみ曲線の形状が求まる。一例として $\mu=0.4$ に対して $\varphi_L=45^\circ$ の場合の結果を第5図に示す。このような関係より $\frac{1}{\rho/L} \sim s/L$ お

第 5 図

第 6 図

第 7 図

よび $x/L \sim y/L$ の関係に直すと、それぞれ第6図および第7図のようになる。第7図には比較のため $\mu=0$, $\varphi_L=45^\circ$ の場合も記入してあるが、 μ による影響はわずかである。また第6図で縦軸の尺度を適当にとれば板の表面におけるひずみを表わすことになる。

2.2 ダイス斜面でさえられているとき

(a) 理論 $\varphi_L=\alpha$ になると板はダイス肩においてダイス斜面に切することになり、更に押しこまれる

と支点はダイス斜面上に移り、これは次第に下方へ移動していく。一方板のダイスに切する点は次第に中央へ移動して曲げモーメントをうける範囲が狭くなる。

いま第 8 図のように板の B 点でダイス斜面上に切している状態を考えると、それより少し以前には B 点

第 8 図

は支点より内側にあって曲げモーメントをうけていたのが、この状態ではモーメントは零となる。これを第 9 図の曲げモーメント～曲率線図にあてはめると一たん A まで曲げら

第 9 図

れた状態から曲げモーメントを除去した B の状態にあるものと考えられる。このことは支点 B の内側の部分でも起っており、 B 点の近くの点では第 9 図の C 点のような状態になっていると考えられる。したがってこの部分では M と $1/\rho$ との関係はもはや (2) 式で表わすことはできない。しかし中央の点 O に近づけばモーメントは増加の状態におかれ、第 9 図の曲線 OA で表わすことができる。

いま境界点 A を考え、 A より内側の部分では曲げモーメント増加の状態にあり、 A 点より外側では曲げモーメント減少の状態にあるものとする。すなわち OA の部分では M と $1/\rho$ の間には (2) 式が成立し、 A 点より外側の曲率は近似的にダイス肩でささえられていたときの最大値がそのまま残留しているものと仮定する。

いま支点がダイス肩にあり、 $\varphi_L = \alpha$ であった状態 (第 8 図の点線 $O'A'D'$) を考え、 A' 点が A 点に、 $B' \rightarrow B$, $C' \rightarrow C$, $D' \rightarrow D$ にきたものとする。曲線 $ACBD$ は曲線 $A'C'B'D'$ そのままの状態が残っていると考える。

ここで第 8 図のような記号を用いる。すなわち

x_a, y_a : A 点の座標, x_b, y_b : B 点の座標, φ_a :

A 点における板の切線が x 軸となす角, s_a : 原点 O から A 点までの中立軸に沿う長さで、これは O' 点から A' 点までの長さに相等的。なお点線で示す状態のときの諸量はすべて “'” をつけて区別する。

(i) $0 \leq x \leq x_a$ ($0 \leq \varphi \leq \varphi_a$) の範囲では曲げモーメント増加の状態にあるから、 OA 上の任意の点については前と同様に (2), (3), (4) および (5) の諸式が成立し、(8) 式は次のごとく書きかえられる。

$$M = P\{x_b - x + (y_b - y) \cdot \tan \omega_0\} \dots \dots (8)'$$

$$\text{ただし } \omega_0 = \alpha - \nu$$

摩擦係数 $\mu = \tan \nu$ が変らない限り、 ω_0 は曲げ過程には無関係な定数である。よって以上の諸式を連立させて解く方法は前と同様であるが、この場合境界条件としては (14) 式の代りに、 A 点の曲げモーメントを M_a として、 $\varphi = \varphi_a$ のとき $M = M_a$ を用いて (15) 式と同様に

$$M = \left[\frac{(1+n)A^n P}{\cos \omega_0} \{\sin(\omega_0 - \varphi) - \sin(\omega_0 - \varphi_a)\} + M_a^{1+n} \right]^{\frac{1}{1+n}} \dots \dots (26)$$

いま A 点の曲率半径 ρ_a をパラメータにとれば

(2) 式より $M_a = A(1/\rho_a)^{\frac{1}{n}}$ であるから (26) 式より、(16) 式と同様に

$$\rho = \left[\frac{(1+n) \cdot P}{A \cos \omega_0} \{\sin(\omega_0 - \varphi) - \sin(\omega_0 - \varphi_a)\} + (1/\rho_a)^{\frac{1+n}{n}} \right]^{-\frac{n}{1+n}} \dots \dots (27)$$

ρ は OA 上の任意の点における中立軸の曲率半径であるから

$$\int_0^{\varphi_a} \rho \cdot d\varphi = s_a \dots \dots (28)$$

を満足しなければならない。

(ii) $x_a \leq x \leq x_b$ ($\varphi_a \leq \varphi \leq \alpha$) の範囲において、任意の点 $C(\varphi)$ が第 8 図の点 $C'(\varphi')$ にあったときの曲率半径は (21) 式より $\varphi_L = \alpha$ として

$$\rho = \frac{L}{\Phi_2(\alpha)} \{\sin(\omega_0 - \varphi') + \sin \nu\}^{-\frac{n}{1+n}} \dots \dots (29)$$

しかして $\widehat{AB}$ は $\widehat{A'B'}$ を反時計方向に $(\varphi_a - \varphi_a')$ だけ回転してから平行移動したものと考えられるから、回転角を β とすれば、

$$\varphi - \varphi' = \varphi_a - \varphi_a' = \beta \dots \dots (30)$$

(30) 式を (29) 式に代入して

$$\rho = \frac{L}{\Phi_2(\alpha)} \{\sin(\omega_0 + \beta - \varphi) + \sin \nu\}^{-\frac{n}{1+n}} \dots \dots (31)$$

これが任意の点 C の曲率半径である。

(iii) 両域の連結 原点 O における曲げモーメントを M_0 とすれば、(8)' 式より

$$M_0 = P(x_b + y_b \cdot \tan \omega_0)$$

また (26) 式より

$$M_0 = A \left[\frac{(1+n) \cdot P}{A \cos \omega_0} \{\sin \omega_0 - \sin(\omega_0 - \varphi_a)\} + (1/\rho_a)^{\frac{1+n}{n}} \right]^{\frac{1}{1+n}}$$

両式より M_0 を消去すれば

$$x_b + y_b \cdot \tan \omega_0 = \frac{A}{P} \left[\frac{(1+n) \cdot P}{A \cos \omega_0} \{ \sin \omega_0 - \sin(\omega_0 - \varphi_a) \} + \left(\frac{1}{\rho_a} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] \frac{1}{1+n} \dots\dots\dots (32)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} x_b &= \int_0^{\varphi_a} \rho \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi + \int_{\varphi_a}^{\omega_0} \rho \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \\ y_b &= \int_0^{\varphi_a} \rho \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi + \int_{\varphi_a}^{\omega_0} \rho \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

(33)式の右辺において、それぞれ第1項の ρ には(27)式を、第2項の ρ には(31)式を代入して計算する。また中央のたわみ Y は

$$Y = y_b + (L - x_b) \cdot \tan \alpha \dots\dots\dots (34)$$

(b) 数値計算と実験結果 支点 B における傾斜角 φ_B は α に等しく一定となるから、曲げ過程を示すパラメータとしては荷重 P をとる。しかして任意の P に対応する A 点の位置が不明であるからこれを決定しなければならぬ。ここでは仮定した s_a に対する φ_a の値をきめるために(28)式を満足するように繰返し積分法によって A 点の位置をきめた。

まず OA の長さ s_a を適当に仮定し、 $\varphi_L = \alpha$ における $1/\rho \sim s$ の関係を第6図($\varphi_L = 45^\circ$ 参照)から求めれば、その s_a に対する ρ_a が求まる。次にこの ρ_a に対する φ_a' を第5図から求める。一方回転角 β を仮定して $\varphi_a = \varphi_a' + \beta$ から φ_a をきめて(28)式の左辺を計算し、これが始め仮定した s_a に一致するまで繰返せばよい。

かくして仮定せる s_a に対して、 ρ_a および β が決定すれば(27)および(31)式は計算できるから、こ

れを用いて(33)式を計算して(32)式の左辺に代入し、別に計算した右辺と比較する。もし左辺が大きければ最初に仮定した s_a を大きくして、以上の計算を繰返し、(32)式の両辺が一致するまでこれを続けられよい。

このようにして任意の P に対する Y を(34)式より求めた結果は、第4図の曲線 AB のようになり実験結果とよく一致した。なおポンチ力が極小値をとる A 点(第4図参照)は支点がダイス斜面に移り始める点で、以後ポンチ力は増加の一途をたどる。

3. 結 語

プレス工作における曲げの問題をできるだけ簡単な形で解決したいという考えから、 V 型ダイスによる薄板の曲げについて、

(i) まず板がダイス肩でささえられている間は板を二点でささえ、中央に荷重を加える場合と同じように取扱い、

(ii) 板がダイス肩を離れてからは下型のみ V 型として、荷重を中央に加える場合と同じように取扱って、

きわめてよく実験結果と一致した。これによって曲げ型設計に重要なスプリング・バックを求めるための基礎が得られたと思う。

注:—

(1) 昭和 28 年 11 月 7 日 第 575 回講演会において講演、原稿受付 昭和 28 年 11 月 9 日。

(2) 正員、東京工業大学。

(3) 正員、同上。

(4) 益田、機械学会論文集、18 巻 71 号、26 ページ (昭 27)。

621.981.214.01 : 539.384.2 : 539.374

変 位 歯 車 (仮 称) の 研 究

(1. 二 軸 平 行 の 場 合)⁽¹⁾

窪 田 雅 男⁽²⁾

Study on Gears with Variable Relative Position of the Axes

(1st Report, Case of Parallel Axes)

by Masao KUBOTA

This paper contains the theory of gears with variable relative position of the axes in the case of parallel axes, namely variable centre distance gears—angular velocity ratio, constant or variable—and applications of the theory to the methods (including new methods) for the cutting of non-circular gears.

1. ま え が き

二軸の相対的位置(たとえば二軸平行の場合は二軸

間の距離、二軸が相交わる場合は二軸の成す角、二軸が食い違っている場合は二軸間の距離と二軸のはさみ角との双方もしくは一方)が変化する歯車——角速比