536.242:532.517.2

一様な水の流れの中におかれた平板の熱伝達

(物質特性値の温度による変化の影響)⁽¹⁾原 朝 茂⁽²⁾

Heat Transfer from Flat Plate in Longitudinal Flow of Water

by Tomoshige HARA

Considering the variation of properties depending upon temperature, the author calculated heat transfer and skin friction for a heated flat plate in longitudinal flow of water. The differential equations for laminar forced convection are solved by means of perturbation theory, using the Pohlhausen's solution for constant properties as 0 approximation. It is assumed that (1) density and specific heat are constant; (2) viscosity varies in proportion to T^{-6} , where T is absolute temperature; and (3) thermal conductivity varies in proportion to T^m , where m varies with temperature of general flow. Friction factor and Nusselt's number are given for the value of $(T_0 - T_1)/T_1$, where T_0 and T_1 are the absolute temperature of plate and general flow, respectively.

1. 緒 論

物質特性値が一定であるとした場合の一様な流れの中におかれた平板の層流熱伝達については Blasius⁽³⁾と Pohlhausen⁽⁴⁾の解がある。この論文では流体を水とし、その粘性係数と熱伝導率の温度による変化が表面摩擦や熱伝達に及ぼす影響を明らかにしたものである。

解法は Blasius と Pohlhausen の導いた境界層の微分方程式を物質特性値が温度によって変る場合に拡張し、これを摂動法を使って解いた。この場合 Blasius と Pohlhausen の解を第 0 近似とし、温度差に関係するパラメータ $\varepsilon = (T_0 - T_1)/T_1$ を使って解を展開し ε の項を求めた。計算した Prandtl 数は $Pr = 2, 3, 5, 8, 10, 14$ の各場合である。

2. 記 号

x : 平板の前縁から流れの方向に沿って測った距離

y : 平板の表面から垂直に測った距離

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{u_1}{\nu_1 x} \right)^{\frac{1}{2}} y$$

u : x 方向の流速

v : y 方向の流速

T : 水の絶対温度

ρ : 水の密度

μ : 水の粘性係数

c : 水の比熱

k : 水の熱伝導率

τ_0 : 表面摩擦応力

q_0 : 単位時間、単位表面積より流体に向かって流れる熱

$h = q_0 / (T_0 - T_1)$ 熱伝達率

$\nu = \mu / \rho$ 水の動粘性係数

$\alpha = k / c \rho$ 水の温度伝導率

$Re_1 = u_1 x / \nu_1$ Reynolds 数

$Pr_1 = \nu_1 / \alpha_1$ Prandtl 数

$Nu_1 = x h / \lambda_1$ Nusselt 数

$c_{f1} = \tau_0 / \left(\frac{1}{2} \rho_1 u_1^2 \right)$ 表面摩擦係数

$\xi = T / T_1$

$\theta = (T - T_1) / (T_0 - T_1)$

$\varepsilon = (T_0 - T_1) / T_1$

なお $T_0, \mu_0, \nu_0, k_0, \alpha_0, \tau_0, q_0$ 等はそれぞれ $y=0$ における値を、 $u_1, T_1, \mu_1, \nu_1, k_1, \alpha_1$ 等はそれぞれ一般流における値を示すものとする。

3. 微分方程式と物質特性値の温度による変化

流体の運動方程式、連続の式およびエネルギーの式はそれぞれ

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{c \rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \dots \dots \dots (3)$$

境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \text{ および } y=\infty \text{ で } u=u_1, T=T_1 \\ y=0 \text{ で } u=0, T=T_0 \end{array} \right\} \dots (4)$$

物質特性値の中で密度 ρ と比熱 c は一定と考える。

$$\rho = \text{const.}, \quad c = \text{const.} \dots (5)$$

粘性係数 μ と熱伝導率 k の温度による変化は絶対温度^{*} のべきで近似させた。すなわち

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^m, \quad \frac{k}{k_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^n \dots (6)$$

粘性係数の指数は $m = -6$, 熱伝導率の指数は次表のように取った。

Pr_1	2	3	5	8	10	14
n	0.22	0.54	0.85	0.95	0.95	0.95

これら近似値と実測値とは第 1 図および第 2 図に比較してある。

第 1 図

第 2 図

$$\xi = T/T_1 \dots (7)$$

$$\theta = (T - T_1)/(T_0 - T_1) \dots (8)$$

とおくと (6) は

$$\mu = \mu_1 \xi^m, \quad k = k_1 \xi^n \dots (9)$$

(1), (3) は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\xi^m \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots (10)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \kappa_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\xi^n \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \dots (11)$$

4. 変数の変換および解法

流れのかん数 ψ を考え Blasius 流の変換を行う。

$$u = \partial \psi / \partial y, \quad v = -\partial \psi / \partial x \dots (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{u_1}{\nu_1 x} \right)^{\frac{1}{2}} y \\ \psi(xy) = (\nu_1 u_1 x)^{\frac{1}{2}} f(\eta) \\ \theta(xy) = \theta(\eta) \end{array} \right\} \dots (13)$$

これより

$$u = \frac{1}{2} u_1 f', \quad v = \frac{1}{2} (\nu_1 u_1 / x)^{\frac{1}{2}} (\eta f' - f) \dots (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_1}{4} \left(\frac{u_1}{\nu_1 x} \right)^{\frac{1}{2}} f'', \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_1}{\nu_1 x} \right)^{\frac{1}{2}} \theta' \dots (15)$$

ただし ' は η による微分を表わすものとする。(10),

(11) 式は

$$f''' + m \xi^{-1} \xi' f'' + \xi^{-m} f f'' = 0 \dots (16)$$

$$\theta'' + n \xi^{-1} \xi' \theta' + Pr_1 \xi^{-n} f f'' = 0 \dots (17)$$

境界条件 (4) は

$$\left. \begin{array}{l} \eta=0 \text{ で } f=f'=0, \quad \theta=1 \\ \eta=\infty \text{ で } f'=2, \quad \theta=0 \end{array} \right\} \dots (18)$$

$$\epsilon = (T_0 - T_1)/T_1 \dots (19)$$

を小さい量と考えて f, θ をこのべき級数に展開する。

$$\left. \begin{array}{l} f = f_0 + f_1 \epsilon + f_2 \epsilon^2 + \dots \\ \theta = \theta_0 + \theta_1 \epsilon + \theta_2 \epsilon^2 + \dots \\ \xi = 1 + \theta \epsilon \\ \quad = 1 + \theta_0 \epsilon + \theta_1 \epsilon^2 + \dots \end{array} \right\} \dots (20)$$

(20) を (16), (17) に代入して ϵ の各べきの係数を 0 とおくことにより $f_0, f_1, f_2, \dots; \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$ をきめる方程式が得られる。すなわち (16) より

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0''' + f_0 f_0'' = 0 \dots (21) \\ f_1''' + f_0 f_1'' + f_0' f_1 + m f_0'' (\theta_0' - \theta_0 f_0) = 0 \dots (22) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

(17) より

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0'' + Pr_1 f_0 \theta_0' = 0 \dots (23) \\ \theta_1'' + Pr_1 f_0 \theta_1' + Pr_1 f_0' \theta_0' + n (\theta_0'^2 + \theta_0 \theta_0'') = 0 \dots (24) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

この 2 群の方程式のそれぞれの第 1 式すなわち (21), (23) は Blasius と Pohlhausen が物質特性値を一定と考えて導いた式と同じ式であるから、この場合の解はそのまま f_0, θ_0 として使うことができる。この f_0, θ_0 を (22) に代入して f_1 を求め、 f_0, θ_0, f_1 を

* 絶対温度に取ったことについては、別に物理的理由はない。

(23) に入れて θ_1 を求める. このような手順で次々に微分方程式を解いてゆくことにより $f_2, f_3, f_4, \dots; \theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots$ が求まる. しかし実際に計算したのは f_1, θ_1 のみである.

f_0, θ_0 の境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} \eta=0 \text{ で } f_0=f_0'=0, \theta_0=1 \\ \eta=\infty \text{ で } f_0'=2, \theta_0=0 \end{array} \right\}$$

であることを考慮すると (16) より

$$\left. \begin{array}{l} \eta=0 \text{ で } f_N=f_N'=\theta_N=0 \\ \eta=\infty \text{ で } f_N'=\theta_N=0 \\ \text{ただし } N=1, 2, 3, \dots \end{array} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

となる.

実際の計算は $P_{r1}=2, 3, 5, 8, 10, 14$ の各場合について行った. (22) は Runge Kutta の方法を使って数値解法を行った. (24) の解は次の積分の形で表わされる.

第1表 ($P_{r1}=2$)

η	f_1	f_1'	f_1''	θ_1	θ_1'
0	0	0	6.438	0	-0.787
0.2	0.120	1.157	5.062	-0.158	
0.4	0.444	2.026	3.544	-0.310	
0.6	0.907	2.571	1.897	-0.432	
0.8	1.448	2.786	0.273	-0.498	
1.0	2.008	2.696	-1.113	-0.488	
1.2	2.513	2.374	-2.030	-0.410	
1.4	2.944	1.920	-2.436	-0.293	
1.6	3.269	1.426	-2.380	-0.175	
1.8	3.519	0.982	-2.007	-0.084	
2.0	3.678	0.626	-1.532	-0.024	
2.2	3.775	0.369	-1.053		
2.4	3.830	0.200	-0.660		
2.6	3.862	0.098	-0.378		
2.8	3.873	0.042	-0.200		
3.0	3.878	0.013	-0.097		
3.2	3.879	0	-0.044		

第3表 ($P_{r1}=5$)

η	f_1	f_1'	f_1''	θ_1	θ_1'
0	0	0	6.901	0	-0.873
0.2	0.126	1.194	5.027	-0.182	
0.4	0.452	2.006	3.081	-0.373	
0.6	0.902	2.428	1.178	-0.488	
0.8	1.399	2.497	-0.415	-0.479	
1.0	1.883	2.298	-1.477	-0.349	
1.2	2.308	1.943	-1.991	-0.187	
1.4	2.655	1.531	-2.072	-0.075	
1.6	2.922	1.130	-1.903	-0.019	
1.8	3.112	0.780	-1.584	-0.003	
2.0	3.238	0.501	-1.202		
2.2	3.317	0.299	-0.833		
2.4	3.362	0.164	-0.527		
2.6	3.385	0.083	-0.304		
2.8	3.397	0.037	-0.161		
3.0	3.401	0.014	-0.080		
3.2	3.403	0.002	-0.036		

第2表 ($P_{r1}=3$)

η	f_1	f_1'	f_1''	θ_1	θ_1'
0	0	0	6.643	0	-0.815
0.2	0.123	1.172	5.068	-0.166	
0.4	0.448	2.019	3.377	-0.332	
0.6	0.907	2.517	1.612	-0.459	
0.8	1.431	2.671	-0.027	-0.505	
1.0	1.955	2.531	-1.303	-0.454	
1.2	2.429	2.185	-2.064	-0.332	
1.4	2.825	1.740	-2.313	-0.198	
1.6	3.127	1.285	-2.179	-0.096	
1.8	3.343	0.884	-1.819	-0.038	
2.0	3.486	0.564	-1.374		
2.2	3.575	0.333	-0.949		
2.4	3.625	0.180	-0.594		
2.6	3.651	0.086	-0.341		
2.8	3.664	0.038	-0.180		
3.0	3.668	0.012	-0.086		
3.2	3.668	0	-0.039		

第4表 ($P_{r1}=8$)

η	f_1	f_1'	f_1''	θ_1	θ_1'
0	0	0	7.070	0	-1.010
0.2	0.127	1.198	4.998	-0.213	
0.4	0.449	1.959	2.725	-0.447	
0.6	0.881	2.301	0.755	-0.512	
0.8	1.346	2.297	-0.683	-0.414	
1.0	1.786	2.072	-1.485	-0.224	
1.2	2.167	1.737	-1.805	-0.083	
1.4	2.478	1.369	-1.839	-0.027	
1.6	2.716	1.015	-1.691	-0.014	
1.8	2.887	0.706	-1.414		
2.0	3.002	0.456	-1.079		
2.2	3.074	0.273	-0.750		
2.4	3.116	0.152	-0.476		
2.6	3.137	0.073	-0.276		
2.8	3.150	0.032	-0.147		
3.0	3.154	0.011	-0.072		
3.2	3.156	0	-0.032		

第5表 ($P_{r1}=10$)

η	f_1	f_1'	f_1''	θ_1	θ_1'
0	0	0	7.174	0	-1.127
0.2	0.127	1.198	4.831	-0.238	
0.4	0.447	1.931	2.530	-0.461	
0.6	0.872	2.229	0.530	-0.512	
0.8	1.321	2.188	-0.802	-0.356	
1.0	1.722	1.953	-1.465	-0.148	
1.2	2.098	1.631	-1.690	-0.033	
1.4	2.388	1.286	-1.718		
1.6	2.616	0.956	-1.572		
1.8	2.788	0.665	-1.321		
2.0	2.882	0.431	-1.009		
2.2	2.954	0.262	-0.713		
2.4	2.989	0.146	-0.454		
2.6	3.011	0.075	-0.263		
2.8	3.020	0.036	-0.141		
3.0	3.023	0.015	-0.068		
3.2	3.029	0.005	-0.032		

第6表 ($P_{r1}=14$)

η	f_1	f_1'	f_1''	θ_1	θ_1'
0	0	0	7.306	0	-1.324
0.2	0.128	1.201	4.671	-0.276	
0.4	0.445	1.882	2.188	-0.524	
0.6	0.850	2.109	0.215	-0.500	
0.8	1.267	2.026	-0.910	-0.262	
1.0	1.650	1.790	-1.379	-0.071	
1.2	1.979	1.494	-1.549	-0.008	
1.4	2.246	1.180	-1.565		
1.6	2.451	0.876	-1.945		
1.8	2.599	0.608	-1.219		
2.0	2.698	0.392	-0.937		
2.2	2.759	0.233	-0.654		
2.4	2.794	0.127	-0.417		
2.6	2.813	0.063	-0.242		
2.8	2.822	0.027	-0.129		
3.0	2.825	0.009	-0.063		
3.2	2.825	0	-0.029		

$$\theta_1 = \frac{\int_0^\infty e^{-I} \int_0^\eta Se^I d\eta d\eta}{\int_0^\infty e^{-I} d\eta} \int_0^\eta e^{-I} d\eta - \int_0^\eta e^{-I} \int_0^\eta Se^I d\eta d\eta \quad \dots (26)$$

$$\text{ただし } I = P_{r1} \int_0^\eta f_0 d\eta$$

$$S = P_{r1} f_1 \theta_0' + n(\theta_0'^2 + \theta_0 \theta_0'')$$

このようにして求めた f_1, θ_1 は第 1~6 表に示す。

5. 速度および温度分布

速度分布および温度分布は (14), (20) より

$$\frac{u}{u_1} = \frac{1}{2} f' \approx \frac{1}{2} (f_0' + f_1' \varepsilon) \quad \dots (27)$$

$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_1} = 1 - \theta \approx (1 - \theta_0) - \theta_1 \varepsilon \quad \dots (28)$$

$\varepsilon = \pm 0.1$ に対する値は第 3 図, 第 4 図に示す。

第3図 境界層内の速度分布

第4図 境界層内の温度分布

6. 表面摩擦係数と Nusselt 数

表面摩擦応力 τ_0 と単位時間, 単位表面積当りの伝熱量 q_0 は (15) より

$$\begin{cases} \tau_0 = \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu_0 \frac{u_1}{4} \left(\frac{u_1}{\nu_1 x} \right)^{\frac{1}{2}} f''_{\eta=0} \\ q_0 = -k_0 \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \\ = -k_0 \frac{T_0 - T_1}{2} \left(\frac{u_1}{\nu_1 x} \right)^{\frac{1}{2}} \theta'_{\eta=0} \end{cases}$$

したがって

$$\begin{aligned} c_{f1} &= \frac{\tau_0}{(1/2) \rho_1 u_1^2} = \frac{(1/4) \mu_0 u_1}{(1/2) \rho_1 u_1^2} \left(\frac{u_1}{\nu_1 x} \right)^{\frac{1}{2}} f''_{\eta=0} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_1}{u_1 x} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu_0}{\rho_1} f''_{\eta=0} \\ &= \frac{1}{2} R_{e1}^{-\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon)^m (f_0'' + f_1'' \varepsilon)_{\eta=0} \end{aligned}$$

$$= \frac{(f_0'')_{\eta=0}}{2} R_{e1}^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \left\{ \left(\frac{f_1''}{f_0''} \right)_{\eta=0} + m \right\} \varepsilon \right] \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\begin{aligned} N_{u1} &= \frac{xh}{k_1} = - \frac{x}{k_1} \frac{k_0}{2} \left(\frac{u_1}{\nu_1 x} \right)^{\frac{1}{2}} \theta'_{\eta=0} \\ &= - \frac{1}{2} \left(\frac{u_1 x}{\nu_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{k_0}{k_1} \theta'_{\eta=0} \\ &= - \frac{1}{2} R_{e1}^{\frac{1}{2}} [1 + \varepsilon] n (\theta_0' + \theta_1' \varepsilon)_{\eta=0} \\ &= - \frac{(\theta_0')_{\eta=0}}{2} R_{e1}^{\frac{1}{2}} \left[1 + \left\{ \left(\frac{\theta_1'}{\theta_0'} \right)_{\eta=0} + n \right\} \varepsilon \right] \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

$$(c_{f1})_{\varepsilon=0} = \frac{(f_0'')_{\eta=0}}{2} R_{e1}^{-\frac{1}{2}},$$

$$(N_{u1})_{\varepsilon=0} = - \frac{(\theta_0')_{\eta=0}}{2} R_{e1}^{\frac{1}{2}}$$

であることを考慮すれば (27), (28) より

$$\frac{c_{f1}}{(c_{f1})_{\varepsilon=0}} = 1 + F(P_{r1}) \varepsilon \quad \dots\dots\dots (31)$$

ただし $F(P_{r1}) = \left(\frac{f_1''}{f_0''} \right)_{\eta=0} + m$

$$\frac{N_{u1}}{(N_{u1})_{\varepsilon=0}} = 1 + G(P_{r1}) \varepsilon \quad \dots\dots\dots (32)$$

ただし $G(P_{r1}) = \left(\frac{\theta_1'}{\theta_0'} \right)_{\eta=0} + n$

第 7 表

P_{r1}	F	G	G^*
2	-1.15	1.15	1.09
3	-1.00	1.38	—
5	-0.80	1.61	1.21
8	-0.67	1.70	—
10	-0.60	1.72	1.29
14	-0.50	1.76	—

計算した F , G は第7表に示す。 $c_{f1}/(c_{f1})_{\varepsilon=0}$ と $N_{u1}/(N_{u1})_{\varepsilon=0}$ の $\varepsilon = (T_0 - T_1)/T_1$ による変化は第5図, 第6図に示す。

7. $k = \text{const.}$ と仮定した場合

粘性係数 μ の温度による変化のみ考え, 熱伝導率 k の温度による変化を無視した場合, すなわち

$$\mu/\mu_1 = (T/T_1)^{-6}, \quad k = \text{const.}$$

の場合についても計算を行った。その場合 (31) 式の $F(P_{r1})$ は上の場合と変わらないが, (32) 式の $G(P_{r1})$ はかなり違った値になる。今考えている $k = \text{const.}$ の場合の値を $G^*(P_{r1})$ と書くことにすれば, その値は第7表の右の欄のようになる。

第5図 $c_{f1}/(c_{f1})_{\varepsilon=0}$ の ε による変化

第6図 $N_{u1}/(N_{u1})_{\varepsilon=0}$ の ε による変化

k の変化は μ の変化よりはるかにゆるやかであるが, 熱の移動に直接関係しているので無視できない程度の影響を与えるものと考えられる。

8. 結 論

一様な水の流れの中におかれた平板の熱伝達において, 物質特性値の温度による変化が境界層内の速度分布, 温度分布, 表面摩擦係数, Nusselt 数に及ぼす影響を明らかにすることができた。

附帯的な事柄であるが熱伝導率が温度によって変らないと仮定した場合についても N_{u1} を計算してみた結果, 温度による変化を考慮した場合に較べてかなりの相違のあることを知った。

(附記) この数値計算は一部分鉄研の松本正氏に手伝っていただいた。ここに感謝の意を表する。

注:—

(1) 昭和 28 年 6 月 1 日 第 568 回講演会において講演, 原稿受付 昭和 28 年 11 月 24 日。

(2) 正員, 鉄道技術研究所。

(3) Blasius, Z. M. P., Bd. 56, S. 1, (1908).

(4) Pohlhausen, Z. A. M. M., Bb. 1, S. 115, (1921).