第 16 図 平面歯車とグロバイドウォーム

ウォーム口数 1 で歯車比 50:1 である他はいずれも歯車歯数 30, ウォーム口数 3 で, 歯車比は 30:1 である。

第 16 図は福井が試作した平面歯車とその包らぐ面ウォームの例で軸が直角のものを示す。手直しをせず機械で歯切れしたままでよくかみ合ったが高い負荷では摩耗が多かった。これを軸角を直角でない適当な角に変えたところよい当たりとなり効率もよく摩耗も少かった。

注:—

- (1) 昭和 28 年 9 月 19 日 関西支部講演会および昭和 28 年 11 月 16 日東海支部講演会において講演, 原稿受付 昭和 29 年 1 月 27 日.
- (2) 正員, 名古屋工業大学.
- (3) 正員, 植田歯車会社
- (4) 機械学会論文集, 19 巻 82 号 (昭 28).

534.014

二次元自励振動発生の一機構について (第 1 報)⁽¹⁾

浅野友一⁽²⁾, 山川出雲⁽³⁾

Some Mechanism of Self-sustained Two-dimensional Oscillation (the First Report)

by Tomokazu ASANO and Izumo YAMAKAWA

We studied analytically one type of self-sustained two-dimensional oscillations of the two degree-of-freedom system consisting of two bars with springs, produced when the free end of the system is in contact with the moving dry surface. From our study the following facts became clear:—

i) Oscillations occur when the bar-tip is made to remove from the surface by any motive and the rebound-velocity of the bar tip in every cycle satisfies an inequality determined from the constants of the system. ii) A steady oscillation occurs only when the jumping condition in every cycle is identical, and the period of the oscillation has a definite upper limit, showing that the oscillation is apt to occur in the lower speed range, etc.

Experimental demonstration of the theory may be shown in the next paper.

緒 言

一自由度系の自励振動に関しては, 従来多くの研究が発表されているが, 多自由度系の場合については未だ詳細な考察がなされていないように思われる。旋盤の刃物や きさげ 使用のさいにおこる「びびり」等, 無限の自由度を有する系の自励振動を解析的に取扱うことは容易でない。そこでわれわれは, このような多自由度系のもっとも簡単なモデルとして第 1 図のような 2 本の棒とばねよりなる二重振り子型の二自由度系をえらぶことにした。今, このような系の自由端を粗

面にかかるく接触させつつ系を平行移動するか, あるいは粗面を系に対して相対的に移動すると振動が発生するが, この場合, もしあたる条件さえ適当ならば系に定常振動をおこさせることができる。これは一様な速度で移動する粗面

第 1 図

(交番的でないエネ

ルギ源)からエネルギーをうけて持続する振動であるゆえ、一般に認められている定義により明らかに自励振動である⁽⁴⁾。しかしてこの振動系には境界条件のいかんによって、棒端が粗面と接触を保ちつつ往復するすべり振動と、棒端が粗面上を跳躍し空間に平面曲線を描く二次元振動と二つの場合が可能であるが、後に示すごとく前者は後者の特別の場合として含まれ、かつ一自由度の振動となる。

1. 運動方程式の誘導とその一般解

この種の自励振動は、移動する粗面から棒端(自由端)が毎回同一の反ばつ条件を初期条件としてうける自由運動の繰返しであると考えることができる。このような観点から、まず粗面に接触しない自由系についての一般運動方程式をたて、その一般解を求めておく必要がある。ただしわれわれの場合、系の減衰摩擦は無視しうるものとする。系は図に示すとおり懸垂軸 O に支持された根元の棒 A と、それにちようつがい O' でつながっている先の棒 B 、およびばね k_1, k_2 よりなり、ばねで結合された二重振り子であるゆえ、こ

第 2 図

第 3 図

こにその要点だけを記す。すなわち、第2図において m_1, m_2 = 元の棒および先の棒の質量; I_1 = 元の棒 A の懸垂軸 O のまわりの慣性モーメント; I_2 = 先の棒 B のその重心 G_2 のまわりの慣性モーメント; r_1, r_2 = 元の棒および先の棒の有効長さ; s_1 = 元の棒 A の重心の懸垂軸 O からの距離; s_2 = 先の棒 B の重心のち

ようつがい O' からの距離; k_1, k_2 = ばね k_1 および k_2 のばね定数; とし懸垂軸 O を原点とする直交座標系を $x-y$, また別に一般座標として(第3図), 二つの棒の重力によるつり合位置 (ϕ_0, ψ_0) からの角変位を $\delta\phi = q_1, \delta\psi = q_2$, かつ、そのときの棒の角位置を ϕ, ψ とすれば,

$$\phi = \phi_0 + q_1, \psi = \psi_0 + q_2 \dots\dots\dots (a)$$

しかるときは、系の運動エネルギーは、 $\dot{q}_1$ 等を q_1 等の時間に関する微分をあらわすものとすれば

$$\text{元の棒に対し } T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$\text{先の棒に対し } T_2 = \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$= \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[r_1^2 \dot{q}_1^2 + s_2^2 \dot{q}_2^2 + 2 r_1 s_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos\{\theta_0 + (q_1 - q_2)\} \right]$$

$$\text{ここに } \theta_0 = \phi_0 - \psi_0$$

で、われわれの考えている振動系では $(q_1 - q_2)$ を θ に比べて無視しうるから近似的に

$$\cos\{\theta_0 + (q_1 - q_2)\} \approx \cos \theta_0 \quad \text{とする。}$$

したがって、系の全運動エネルギーは

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} (I_1 + m_2 r_1^2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} (I_2 + m_2 s_2^2) \dot{q}_2^2 + m_2 r_1 s_2 \cos \theta_0 \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 \dots\dots (b)$$

次に、系の位置エネルギーは、ばねが無荷重の状態にあるときの系の角位置を $\phi_k, \psi_k, \theta_k = \phi_k - \psi_k, \theta = \phi - \psi$, かつ、 $\delta\phi_k = \phi_k - \phi_0, \delta\psi_k = \psi_k - \psi_0$ とすれば、ばねのひずみエネルギーは

$$V_1 = \frac{1}{2} k_1 \delta^2 \phi - k_1 \delta\phi_k \cdot \delta\phi - \frac{1}{2} k_2 (\delta\phi - \delta\psi)^2 - k_2 (\delta\phi_k - \delta\psi_k) (\delta\phi - \delta\psi) \dots\dots (c)$$

一方、重力による系の平衡条件より

$$\left. \begin{aligned} k_1 \delta\phi_k &= m_1 g s_1 \sin \phi_0 + m_2 g (r_1 \sin \phi_0 + s_2 \sin \psi_0) \\ k_2 (\theta_0 - \theta_k) &= -k_2 (\delta\phi_k - \delta\psi_k) = m_2 g s_2 \sin \psi_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (d)$$

ただし、 g は重力の加速度

(d) を (c) に代入し、 $\delta\phi = q_1, \delta\psi = q_2$ とかけば

$$V_1 = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_1 - q_2)^2 - (m_1 s_1 + m_2 r_1) g \sin \phi_0 \cdot q_1 - m_2 g s_2 \sin \psi_0 \cdot q_2 \dots\dots (e)$$

また、重心の移動にもとづく位置エネルギーの変化は重心 G_1, G_2 の縦変位をそれぞれ考慮して

$$V_2 = \frac{1}{2} (m_1 s_1 + m_2 s_2) g \cos \phi_0 \cdot q_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g s_2 \cos \psi_0 \cdot q_2^2 + (m_1 s_1 + m_2 r_1) g \cdot \sin \phi_0 \cdot q_1 + m_2 g s_2 \sin \psi_0 \cdot q_2 \dots\dots (f)$$

したがって系の位置エネルギーの総変化は

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 \\
 &= \frac{1}{2} \{ k_1 + k_2 + (m_1 s_1 + m_2 r_1) g \cos \phi_0 \} q_1^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} (k_2 + m_2 g s_2 \cos \psi_0) q_2^2 - k_2 q_1 \cdot q_2 \cdots (g)
 \end{aligned}$$

(b), (g) 両式を Lagrange の式,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial V}{\partial q_s} = 0 \cdots \cdots (h)$$

に適用して, 次の運動方程式がえられる.

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 \ddot{q}_1 + a_3 \ddot{q}_2 + c_1 q_1 + c_3 q_2 &= 0 \\
 a_2 \ddot{q}_2 + a_3 \ddot{q}_1 + c_2 q_2 + c_3 q_1 &= 0
 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (i)$$

ただし, 係数 $a_1 \sim a_3$, $c_1 \sim c_3$ の値は後記 (4) のとおり. 上式の一般解は次の形となる.

$$\left. \begin{aligned}
 q_1 &= \lambda_{11} \cos(p_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \cos(p_2 t + \alpha_2) \\
 q_2 &= \lambda_{21} \cos(p_1 t + \alpha_1) + \lambda_{22} \cos(p_2 t + \alpha_2)
 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (1)$$

ここに, λ_{11} , λ_{12} , α_1 , α_2 は初期条件によって定まる積分定数である.

二つの固有円振動数は振動数方程式から

$$p_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad p_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdots \cdots (2)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{ここに } a &= a_1 a_2 - a_3 \\
 b &= -a_1 c_2 - a_2 c_1 + 2 a_3 c_3 \\
 c &= c_1 c_2 - c_3^2
 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{かつ } a_1 &= I_1 + m_2 r_1^2 \\
 a_2 &= I_2 + m_2 s_2^2 \\
 a_3 &= m_2 r_1 s_2 \cos \theta_0 \\
 c_1 &= k_1 + k_2 + (m_1 s_1 + m_2 r_1) g \cos \phi_0 \\
 c_2 &= k_2 + m_2 g s_2 \cos \psi_0 \\
 c_3 &= -k_2
 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (4)$$

二つの固有振動の振幅比は

$$\left. \begin{aligned}
 n_1 &= \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = \frac{c_1 - a_1 p_1^2}{a_3 p_1^2 - c_3} = \frac{c_3 - a_3 p_1^2}{a_2 p_1^2 - c_2} \\
 n_2 &= \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} = \frac{c_1 - a_1 p_2^2}{a_3 p_2^2 - c_3} = \frac{c_3 - a_3 p_2^2}{a_2 p_2^2 - c_2}
 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (5)$$

2. 粗面の存在と系に作用する外力

特に系の自由端 (棒端) の運動に注目するため, もとの $x-y$ 座標系に平行で, 棒端の重力による静止位置 (x_0, y_0) を原点とした固定座標系 $\xi-\eta$ を考える (第 4 図). しかるときは

$$\left. \begin{aligned}
 \delta x &= \xi = r_1 \cos \phi_0 \cdot q_1 + r_2 \cos \psi_0 \cdot q_2 \\
 \delta y &= \eta = -r_1 \sin \phi_0 \cdot q_1 - r_2 \sin \psi_0 \cdot q_2
 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (6)$$

次に, 棒端に外力が作用する場合を考え, その ξ および η 方向の成分をそれぞれ F_ξ , F_η とすれば

$$\left. \begin{aligned}
 F_\xi &= \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) \\
 F_\eta &= \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} \right)
 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (7)$$

第 4 図

ここで, 粗面の存在を考慮すると, 棒端が粗面に触れている間は, 粗面より拘束力 R , および摩擦力 μR をうける. ただしこの場合, μ は棒端と粗面間にすべりがないうちは静摩擦係数を, すべりがあるときは動摩擦係数をあらわす.

したがって棒端が粗面上にあるときは

$$F_\xi = R, \quad F_\eta = \mu R \cdots \cdots (8)$$

さて, (7) 式における右辺の値は

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial V}{\partial \xi} &= \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \xi} \\
 &= -\frac{\sin \phi_0}{r_1 \sin \theta_0} (c_1 q_1 + c_3 q_2) \\
 &\quad + \frac{\sin \phi_0}{r_2 \sin \theta_0} (c_2 q_2 + c_3 q_1) \\
 \frac{\partial V}{\partial \eta} &= -\frac{\cos \psi_0}{r_1 \sin \theta_0} (c_1 q_1 + c_3 q_2) \\
 &\quad + \frac{\cos \phi_0}{r_2 \sin \theta_0} (c_2 q_2 + c_3 q_1) \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{\xi}} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \dot{\xi}} \right) \\
 &= -\frac{\sin \phi_0}{r_1 \sin \theta_0} (a_1 \ddot{q}_1 + a_3 \ddot{q}_2) \\
 &\quad + \frac{\sin \phi_0}{r_2 \sin \theta_0} (a_2 \ddot{q}_2 + a_3 \ddot{q}_1) \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} \right) &= -\frac{\cos \psi_0}{r_1 \sin \theta_0} (a_1 \ddot{q}_1 + a_3 \ddot{q}_2) \\
 &\quad + \frac{\cos \phi_0}{r_2 \sin \theta_0} (a_2 \ddot{q}_2 + a_3 \ddot{q}_1)
 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (9)$$

もし, 棒端が一定速度で移動する粗面とともに動くときは, $\ddot{\xi} = 0$, $\ddot{\eta} = 0$ である. したがって (6) より知られる次の関係式

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_1 &= -\frac{1}{r_1 \sin \theta_0} (\ddot{\xi} \sin \phi_0 + \ddot{\eta} \cos \psi_0) \\
 \ddot{q}_2 &= -\frac{1}{r_2 \sin \theta_0} (\ddot{\xi} \sin \phi_0 + \ddot{\eta} \cos \phi_0)
 \end{aligned}$$

によって明らかに $\ddot{q}_1 = 0$, $\ddot{q}_2 = 0$ となるゆえ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} \right) = 0 \cdots \cdots (10)$$

このような場合, 棒端に作用する力は系の復元力とつりあい次の関係がある.

$$F_{\xi} = \mu R \geq \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad F_{\eta} = R = \frac{\partial V}{\partial \eta} \quad \dots\dots\dots(11)$$

上の関係が破れると棒端は粗面に対し相対運動を生ずる。その限界位置は

$$\tan \psi_{cr} = \mu_0 = F_{\xi}/F_{\eta} \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 μ_0 は棒端、粗面間の静摩擦係数、 ψ_{cr} は静止の摩擦角とする。

棒端が粗面に沿って相対的にすべるときにも (7) の関係がなりたつ。ここで両者の運動の向き同一の前半サイクルと逆の後半サイクルとを比較して、前者の摩擦仕事は後者のそれより大なる場合は、ヴァイオリンの絃と弓の關係に類似の原理で自励振動を発生することが考えられる。この場合、半サイクル間の摩擦係数の平均値 μ で処理できるものとすれば、 F_{ξ} と F_{η} とは μ を介して次のように関係づけることができ、

$$F_{\xi} = \mu F_{\eta} \quad \dots\dots\dots(13)$$

したがって、(7) の二つの式は次の形の一つの式にまとめられる。

$$A \ddot{\xi} + B \dot{\xi} + C = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここに、 A 、 B 、 C 等は系の諸元によって定まる定数であるが、 μ にも関係があるから各半サイクルごとに異なった値となる。

この振動は一自由度の振動であるから本報では、これ以上触れないことにする。

3. 二次元振動発生条件

本系に生ずる自励振動には棒端がつねに粗面に沿って動くすべり型と、棒端が粗面より離れる跳躍型すなわち二次元振動との二つが考えられるが、そのいずれを生ずるかは初期における棒端の運動方向および棒端がえがくべき軌跡曲線の曲率の正負によってきまる。初期における運動の方向は、時間 t をパラメータにとれば

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta/dt}{d\xi/dt} = \frac{\dot{\eta}}{\dot{\xi}} \quad \dots\dots\dots(15)$$

によって知ることができ、また曲率は同じ t をパラメータにして

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\dot{\eta}}{\dot{\xi}} \right) = \frac{d(\dot{\eta}/\dot{\xi})/dt}{d\xi/dt} = \frac{\dot{\xi}\ddot{\eta} - \dot{\eta}\ddot{\xi}}{\dot{\xi}^3} \quad \dots\dots\dots(16)$$

であらわされる。

(1) 振動発生必要条件 二次元振動を発生するためには、最初なんらかの動機によって一度棒端が粗面から離れることが必要であって、かつ棒端が粗面にもどったときの反ばつ速度が次に示す条件を満足しなければならない。すなわち、第一の条件は、速度が上向きの成分をもつことで

$$\dot{\eta}_{t=0} < 0, \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_{t=0} > 0 \quad \dots\dots\dots(17)$$

第二の条件は反ばつ直後における棒端の運動曲線の曲率が負であることを要し

$$\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)_{t=T} < 0 \quad \dots\dots\dots(18)$$

今の場合、 $\dot{\xi} < 0$ であるから、(16) より

$$\dot{\xi}\ddot{\eta} - \dot{\eta}\ddot{\xi} > 0 \quad \dots\dots\dots(19)$$

上の関係を $q_1 - q_2$ 座標系であらわせば

$$r_1 r_2 (\dot{q}_1 \ddot{q}_2 - \dot{q}_2 \ddot{q}_1) \sin(\phi_0 - \phi_1) > 0$$

であるが、 $\frac{\pi}{2} > \phi_0 - \phi_1 > 0$ 、 $r_1 r_2 > 0$ であるから

$$\dot{q}_1 \ddot{q}_2 > \dot{q}_2 \ddot{q}_1 \quad \dots\dots\dots(20)$$

(20) に初期値 $\dot{q}_1 = \dot{q}_{10}$ 、 $\dot{q}_2 = \dot{q}_{20}$ 、 $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_{10}$ 、 $\ddot{q}_2 = \ddot{q}_{20}$ を代入すれば

$$\lambda_{11} \lambda_{12} p_1 p_2 (n_1 - n_2) (p_1 \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 - p_2 \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2) > 0$$

よって $\lambda_{11} \lambda_{12} (n_1 - n_2) \geq 0$ に応じて

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{p_2} &\geq \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

となることを要する。振動を継続するためには毎回の反ばつ速度と位置が (17)、(21) を満足する範囲内にあれば十分であるが、もしそれらの値が毎回異なれば振動は一般に不規則なものとなる。この場合の振幅は衝突時の条件いかにによって次第に増加することもあり、減小することもありうるが、実際には減衰摩擦が存在するためその大きさには限度がある。

(2) 定常振動発生条件 定常振動を発生するためには毎回の反ばつ条件がまったく等しいことが必要である。

振動の周期を T 、 $t=0$ および $t=T$ に対する q_1 、 q_2 の値を $t=0$ に対し $q_1 = q_{10}$ 、 $q_2 = q_{20}$

$$t=T \quad \text{''} \quad q_1 = q_{1T}, \quad q_2 = q_{2T} \quad \text{とすれば}$$

$$q_{10} = q_{1T}, \quad q_{20} = q_{2T} \quad \dots\dots\dots(22)$$

を満足するためには (1) より次の関係がなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos(p_1 t + \alpha_1) \\ \cos \alpha_2 &= \cos(p_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

上の関係がなりたつための T の値は

$$\left. \begin{aligned} p_1 T + \alpha_1 &= 2\pi \pm \alpha_1 \\ p_2 T + \alpha_2 &= 2\pi \pm \alpha_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

(24) 右辺の複号中正号は今の場合不適当であるゆえ、負号をとれば

$$T = \frac{2(\pi - \alpha_1)}{p_1} = \frac{2(\pi - \alpha_2)}{p_2} \quad \dots\dots\dots(25)$$

これより

$$\frac{\pi - \alpha_1}{\pi - \alpha_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \dots\dots\dots(26)$$

(25)、(26) は定常振動の周期には上限があり、一定の値をこえないことを示している。したがって定常振動は小さな振動に限っておこることがわかる。また、定常振動では棒端の反ばつ前後の軌跡曲線が一致しループの幅は 0 に近いことも想像される。

4. 棒端と移動粗面の衝突

二次元振動においては棒端が粗面に衝突し反ばつさ

第 5 図

れる運動が繰返される。この場合の反ばつ速度を知るために両者の衝突現象を解析する。

今第5図において、両者が衝突のさい棒端に作用する撃力の成分を x 方向に X , $-y$ 方向に Y とする。また衝突に要する時間を τ とすれば、力積は

$$F' = \int_0^\tau X dt, \quad R' = \int_0^\tau Y dt \quad (27)$$

ここで、 X, Y の系に対する影響を根元の棒と先の棒とにわけて考えることとし、衝突直前直後における各棒の角速度を、根元の棒に対しては ω_{10}, ω_1 , 先の棒に対しては ω_{20}, ω_2 とする。また、衝突中系の位置は変らぬものと見なす。次に、二つの棒のちようつがい (O') 点に X, Y と同じ大きさの力の組 $X' - X'$, $Y' - Y'$ を考えると、二組の偶力 XX', YY' は先の棒に角加速度を与え、一方他の一組の力 X', Y' は根元の棒に角加速度を与えるとともに先の棒の重心の速度変化に寄与する。かくして衝突前後における系の運動量の変化は、先の棒に対してはちようつがい (O') のまわりの、根元の棒に対しては懸垂軸 (O) のまわりのモーメントをそれぞれ考えて

$$\left. \begin{aligned} (I_2 + m_2 s_2^2)(\omega_2 - \omega_{20}) &= r_2(R' \sin \psi + F' \cos \psi) \\ I_1(\omega_1 - \omega_{10}) &= r_1(R' \sin \phi + F' \cos \phi) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

(28) の両式より、衝突直前の角速度 ω_{10}, ω_{20} と力積の成分 F', R' が与えられれば系の衝突直後における角速度 ω_1 および ω_2 を知ることができる。

ここで力積 F', R' の決定は次の物理的事実を前提にして行う。まず (1) 衝突の撃力が働いている間に、両物体の接触点における相対法線速度が 0 になる瞬間 τ_0 が必ず存在すること。

すなわち $t = \tau_0 < \tau$

Y をその瞬間まで積分すれば

$$R_0 = \int_0^{\tau_0} Y dt \quad (29)$$

$$\text{かつ } R' = (1+e)R_0 \quad (30)$$

ここに e は両物体間の反ばつ係数である。これはいわゆる最大圧縮の状態に外ならない。

次に (2) 接触点における相対接線速度は、もし両物体間にすべりが無いものとすれば 0 でなければならない。したがって両物体間にすべりが無い状態をつ

づけるためには次の関係が存在すべきである。

$$-\mu Y \leq X \leq +\mu Y \quad (31)$$

あるいは、 $X = dF/dt$, $Y = dR/dt$ なることより

$$-\mu dR \leq dF \leq +\mu dR \quad (32)$$

ここに μ は両物体間の摩擦係数とする。この場合もしすべりがおこるものとすれば、摩擦係数を μ' とするとき次の関係がある。

$$dF = \mu' dR \quad (33)$$

さて、衝突中任意の瞬間における先の棒および根元の棒の角速度をそれぞれ Ω_1, Ω_2 , 移動粗面の x 方向の速度を V (y 方向には 0) とすれば、衝突中任意の瞬間までの運動をきめる式は

$$\left. \begin{aligned} (I_2 + m_2 s_2^2)(\Omega_2 - \omega_{20}) &= r_2(R \sin \psi + F \cos \psi) \\ I_1(\Omega_1 - \omega_{10}) &= r_1(R \sin \phi + F \cos \phi) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ここで棒と粗面の接触点における相対速度に注目するために、 P を棒端に属する接触点、 Q を粗面に属する接触点とすれば、 P 点の Q 点に対する相対速度は

$$\left. \begin{aligned} -y \text{ 方向に } u &= u_P - u_Q \\ x \text{ 方向に } v &= v_P - v_Q \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

今考えている系では $u_Q = 0$, $v_Q = V$ であるから明らかに

$$\left. \begin{aligned} u &= r_1 \Omega_1 \sin \phi + r_2 \Omega_2 \sin \psi \\ v &= r_1 \Omega_1 \cos \phi + r_2 \Omega_2 \cos \psi - V \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

(35) から Ω_1, Ω_2 を求めて上式に代入すれば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 \omega_{10} + a_2 \omega_{20} + \alpha R + \beta F \\ v &= b_1 \omega_{10} + b_2 \omega_{20} + \beta R + \gamma F - V \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= r_1 \sin \phi, & a_2 &= r_2 \sin \psi \\ b_1 &= r_1 \cos \phi, & b_2 &= r_2 \cos \psi \\ \alpha &= \frac{r_1^2}{I_1} \sin^2 \phi + \frac{r_2^2}{I_2 + m_2 s_2^2} \sin^2 \psi > 0 \\ \beta &= \frac{r_1^2}{2 I_1} \sin 2 \phi + \frac{r_2^2}{2(I_2 + m_2 s_2^2)} \sin 2 \psi > 0 \\ \gamma &= \frac{r_1^2}{I_1} \cos^2 \phi + \frac{r_2^2}{I_2 + m_2 s_2^2} \cos^2 \psi > 0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$t=0$ に対しては、 $R=0$, $F=0$ であるからこの場合の u, v の値を u_0, v_0 とかくことにすれば、(37) は更に簡単な次の形となる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \alpha R + \beta F \\ v &= v_0 + \beta R + \gamma F \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

R および F の値、したがって R', F' の値は (39) を図上に表わして物理的に求めることができる。その手続きは (第6図参照) F も R もともに t のかん数であるゆえ F を R のかん数と考えて、 $F-R$ 平面上に $u=0, v=0$ 両直線を (39) によりえがき、さらに同一平面上に、原点が $v>0$ の範囲にあれば $F=-\mu R$ 直線を、 $v<0$ の範囲にあれば $F=\mu R$ 直線をひく。しかして原点より出発したこの直線が $v=0$ 直線と交

第 6 図

わる前に $u=0$ 直線と交われば、その最初の交点が R_0 の値を与え、もしそうでない場合は $u=0$ と $v=0$ との交点が R_0 の値を与える。この手続きの物理的意味は、(1) $v=0$ の状態ではつねに (32) の関係があることおよび $v \geq 0$ のときは $dF = \mu R$ (μ はすべりの摩擦係数) でなければならぬこと。(2) R_0 に対応する接触点の絶対法線圧力は 0 であること、かつ、いかなる場合も $Y = dR/dt > 0$ より、 $R > 0$ なるべきこと。

このようにして R_0 、したがって R' 、 F' の値がわかり系の反ばつ速度が求まる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{10} + \frac{r_1}{I_1} (R' \sin \phi + F' \cos \phi) \\ \omega_2 &= \omega_{20} + \frac{r_2}{I_2 + m_2 s_2^2} (R' \sin \psi + F' \cos \psi) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(40)}$$

なお、上述の方法を用いる場合、留意すべき事項は

(a) 棒端と粗面の衝突はつねに次の条件を満足するような位置で行われること。

$$\dot{\eta}_0 = -r_1 \sin \phi \cdot q_1 - r_2 \sin \psi \cdot q_2 \quad \text{.....(41)}$$

(b) 次の条件式は棒端の ξ 方向の速度成分が粗面の移動速度に等しいときのみ成立すること。

$$-V_0 = r_1 \cos \phi \cdot \omega_1 + r_2 \cos \psi \cdot \omega_2 \quad \text{.....(42)}$$

5. 定常振動における反ばつ速度の式

棒端が粗面を離れて再び粗面にもどるまでの一周期を考えるに、自由振動の一般解 (1) を t に関して微分し $t=0$ とおけば初速度として

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_{10} &= -\lambda_{11} p_1 \sin \alpha_1 - \lambda_{12} p_2 \sin \alpha_2 \\ \dot{q}_{20} &= -\lambda_{21} p_1 \sin \alpha_1 - \lambda_{22} p_2 \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(43)}$$

同じく、 $t=T=2(\pi-\alpha_1)/p_1=2(\pi-\alpha_2)/p_2$ とすれば終速度として

$$\left. \begin{aligned} \omega_{10} &= \lambda_{11} p_1 \sin \alpha_1 + \lambda_{12} p_2 \sin \alpha_2 \\ \omega_{20} &= \lambda_{21} p_1 \sin \alpha_1 + \lambda_{22} p_2 \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(44)}$$

をうる。(43) と (44) の比較により一つのサイクルにおける初速度と終速度は、大きさ等しく向きが反対であることがわかる。また定常振動であることより毎サイクルの反ばつ速度は同じでなければならない。したがって、今考えているサイクルの初速度を $\dot{q}_{10} = \omega_1$ 、 $\dot{q}_{20} = \omega_2$ 、一つ前のサイクルの終速度を ω_{10} 、 ω_{20} とすれば

$$\omega_1 = -\omega_{10}, \quad \omega_2 = -\omega_{20} \quad \text{.....(45)}$$

(40) に (45) の関係を適用し、かつ $R' = (1+e)R_0$ 、 $F' = \mu R'$ なることを考慮すれば

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{r_1}{2 I_1} (1+e) (\sin \phi + \mu \cos \phi) R_0 \\ \omega_2 &= \frac{r_2}{2 (I_2 + m_2 s_2^2)} (1+e) (\sin \psi + \mu \cos \psi) R_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(46)}$$

ここに R_0 はさきに図式でもとめることを述べたが、これは二つの直線の交点であるから代数的にあらわすことができる。

まず、(a) R_0 が $u=0$ と $v=0$ との交点として与えられるときは

$$R_0 = \frac{\beta v_0 - \gamma u_0}{\alpha \gamma - \beta^2} \quad \text{.....(47)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{かつ } u_0 &= -a_1 \omega_1 - a_2 \omega_2 \\ v_0 &= -b_1 \omega_1 - b_2 \omega_2 - V \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(48)}$$

であるから上の両式から結局

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= A \omega_1 + B \omega_2 + CV \\ \text{ここに } A &= \frac{\gamma a_1 - \beta b_1}{\alpha \gamma - \beta^2}, \quad B = \frac{\gamma a_2 - \beta b_2}{\alpha \gamma - \beta^2}, \quad C = \frac{-\beta}{\alpha \gamma - \beta^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(49)}$$

(49) を (46) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= M(A \omega_1 + B \omega_2 + CV) \\ \omega_2 &= N(A \omega_1 + B \omega_2 + CV) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(50)}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{r_1}{2 I_1} (1+e) (\sin \phi + \mu \cos \phi) \\ N &= \frac{r_2}{2 (I_2 + m_2 s_2^2)} (1+e) (\sin \psi + \mu \cos \psi) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(51)}$$

(50) を ω_1 、 ω_2 に関してとけば

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{MC}{1-MA-NB} V \\ \omega_2 &= \frac{NC}{1-MA-NB} V \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(52)}$$

となるが、ここに V の係数は (38), (49), (51) によって

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{MC}{1-MA-NB} = -\frac{1+e}{1-e} \frac{(\sin \phi + \mu \cos \phi) \left(\frac{a}{2} \sin 2\phi + \frac{b}{2} \sin 2\psi \right)}{b r_1 \sin^2(\phi - \psi)} \\ \Phi_2 &= \frac{NC}{1-MA-NB} = -\frac{1+e}{1-e} \frac{(\sin \psi + \mu \cos \psi) \left(\frac{a}{2} \sin 2\phi + \frac{b}{2} \sin 2\psi \right)}{a r_2 \sin^2(\phi - \psi)} \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(53)}$$

(53) に明らかなように係数 Φ_1, Φ_2 は e, μ, q_{10} , q_{20} のかん数であるが, q_{10} と q_{20} との関係

$$\left. \begin{aligned} q_{20} &= \varepsilon + f q_{10} \\ \text{ただし } \varepsilon &= -\frac{\gamma_0}{r_2 \sin \psi_0}, \quad f = -\frac{r_1 \sin \phi_0}{r_2 \sin \psi_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

を考慮すれば, Φ_1, Φ_2 は e, μ, q_{10} 三変数のかん数と考えることができ, したがって (52) は次のごとくかける.

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \Phi_1(e, \mu, q_{10}) \cdot V \\ \omega_2 &= \Phi_2(e, \mu, q_{10}) \cdot V \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

(b) R_0 が $u=0$ と $F=\pm\mu R$ の交点として与えられる場合は

$$R_0 = -\frac{u_0}{\alpha \pm \beta \mu} \dots\dots\dots (47)'$$

(a) の場合と同様な手続きによって (50) に対応する式は

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= M(A'\omega_1 + B'\omega_2) \\ \omega_2 &= N(A'\omega_1 + B'\omega_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)'$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } A' &= \frac{a_1}{\alpha \pm \beta \mu}, \quad B' = \frac{a_2}{\alpha \pm \beta \mu} \\ M, N &\text{ は (51) に同じ} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)'$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{11} &= \pm \frac{1}{n_2 - n_1} \sqrt{(n_2 q_{10} - q_{20})^2 + \left(\frac{n_2 \dot{q}_{10} - \dot{q}_{20}}{p_1} \right)^2} \\ &= \pm \frac{\operatorname{cosec} \theta_0}{n_2 - n_1} \sqrt{(A' \xi_0 + B' \eta_0)^2 + \left(\frac{A' v_0 + B' u_0}{p_1} \right)^2} \\ \lambda_{12} &= \pm \frac{1}{n_2 - n_1} \sqrt{(n_1 q_{10} - q_{20})^2 + \left(\frac{n_1 \dot{q}_{10} - \dot{q}_{20}}{p_2} \right)^2} \\ &= \pm \frac{\operatorname{cosec} \theta_0}{n_2 - n_1} \sqrt{(A \xi_0 + B \eta_0)^2 + \left(\frac{A v_0 + B u_0}{p_2} \right)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha_1 &= -\frac{n_2 \dot{q}_{10} - \dot{q}_{20}}{n_2 q_{10} - q_{20}} \Big/ p_1 = -\frac{A' v_0 + B' u_0}{A' \xi_0 + B' \eta_0} \Big/ p_1 \\ \tan \alpha_2 &= -\frac{n_1 \dot{q}_{10} - \dot{q}_{20}}{n_1 q_{10} - q_{20}} \Big/ p_2 = -\frac{A v_0 + B u_0}{A \xi_0 + B \eta_0} \Big/ p_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } A &= \frac{n_1}{r_1} \sin \psi_0 + \frac{1}{r_2} \sin \phi_0 \\ B &= \frac{n_1}{r_1} \cos \psi_0 + \frac{1}{r_2} \cos \phi_0 \\ A' &= \frac{n_2}{r_1} \sin \psi_0 + \frac{1}{r_2} \sin \phi_0 \\ B' &= \frac{n_2}{r_1} \cos \psi_0 + \frac{1}{r_2} \cos \phi_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

む す び

第1図のような二自由度系の自由端が等速移動粗面にふれておりとき下記の条件によって二次元の自励振動を発生する.

しかして

(a) 二次元振動発生のための必要条件は

最初なんらかの動機によって棒端が粗面からはなれること, および棒端の粗面よりの反ばつ速度が毎回次

(50)' を満足する ω_1, ω_2 の値は, $\omega_1=0, \omega_2=0$ 以外にはない. したがって $R_0=0$. これはこのような状態では振動がおこらぬこと, すなわち定常振動では棒端と粗面との衝突がこのような状態でおこることがありえないことを示す.

次に, 位相角の式は (54) の関係を考慮して

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \tan^{-1} \left\{ \frac{\omega_2 - n_2 \omega_1}{(n_2 - f) q_{10} - \varepsilon} \times \frac{1}{p_1} \right\} \\ \alpha_2 &= \tan^{-1} \left\{ \frac{\omega_2 - n_1 \omega_1}{(n_1 - f) q_{10} - \varepsilon} \times \frac{1}{p_2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

更に, 定常振動の条件式は (26) から

$$\alpha_1 = (1 - \kappa) \pi + \kappa \alpha_2 \left. \right\} \dots\dots\dots (57)$$

ここに $\kappa = p_1/p_2$

以上 (55), (56), (57) の都合五つの式を連立方程式としてとけば五つの未知量としての $\omega_1, \omega_2, q_{10}, \alpha_1, \alpha_2$ を知ることができる. ただしこれらの式中には超越かん数を含むゆえ図式法によらねばならない.

なお後の実数計算に使用するため, 解の未定定数をきめる式を掲げる. $t=0$ に対する初期値として

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \dot{\xi} = v_0, \quad \dot{\eta} = u_0 \\ q_1 &= q_{10}, \quad q_2 = q_{20}, \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_{10}, \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_{20} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

とすれば, λ および α の値は

の条件を満足する範囲内にあること. すなわち, 二つの固有振動の円振動数を p_1, p_2 , 位相角を α_1, α_2 , 振幅を $\lambda_{11}, \lambda_{12}$ および $\lambda_{21}, \lambda_{22}$, かつ $\lambda_{21} = n_1 \lambda_{11}, \lambda_{22} = n_2 \lambda_{12}$ とすれば

$$\lambda_{11} \lambda_{12} (n_1 - n_2) \geq 0 \quad \text{にしたがって}$$

$$\frac{p_1}{p_2} \geq \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \quad \text{となるべきこと.}$$

この場合, もし棒端の粗面上への落下位置および反ばつ速度が毎回異なれば振動は一般に不規則なものとなる.

(b) 上述の振動が定常振動となるためには, 更に次の条件を満足するを要する.

$$\frac{\pi - \alpha_1}{\pi - \alpha_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

これは衝突前後における棒端の運動径路が重なり, 描かれる閉曲線の面積が0であることを意味する.

(c) 定常振動の周期には, 系の諸元および定数によって定まる一定の上限がある。

(d) 棒端, 粗面間の摩擦係数, 反ばつ係数が与えられた場合, 棒端の運動は, 反ばつ速度の式, 位相角の式および上述の条件式を連立方程式として解くこと

により知ることができる。

注:—

(1) 昭和 27 年 10 月 19 日 北関東地方講演会において講演, 原稿受付 昭和 28 年 8 月 20 日。

(2)(3) 正員, 群馬大学工学部。

(4) たとえば Den Hartog, Mechanical Vibration.

534.014

二次元自励振動発生の一機構について (第2報)⁽¹⁾

浅野友一⁽²⁾, 山川出雲⁽³⁾

Some Mechanism of Self-sustained Two-dimensional Oscillation (the Second Report)

by Tomokazu ASANO and Izumo YAMAKAWA

To ascertain the propriety of our theory, a device for producing the oscillation was constructed, and the vertical component of the oscillation was recorded optically on a 35 mm running film simultaneously with the time and the displacement of the moving surface.

The oscillation-loci described on the plane by the bar-tip were also recorded on a standing film. From these records, the relations of the period as well as the amplitude with the surface velocity became clear in principle. By substituting in the theoretical expressions some experimental values, we obtained approximate values of the coefficient of the friction and that of the restitution in our apparatus. The wave-figures theoretically constructed for any surface speed, when the two coefficients were given as above, coincided fairly well with those of the experiment.

まえがき

われわれは第1報において, 二自由度系に生ずる二次元自励振動の一機構についての理論的解析を行った。本報ではさきにたてた理論の適否をしらべるために行った実験の装置, 方法および装置の諸元をわれわれの理論式に適用してえられた結果についてのべ, あわせて理論, 実験両結果の比較を行う。

実験装置および方法

実験に用いた自励振動発生装置は第1図に示すとおりでジュラルミン製のばねつき二重振子の先端(硬質ゴム)が有機ガラス製円板の表面に軽くふれており, 円板の回転によって系に振動を発生するようになっている。

第1表は実験装置の基本諸元を, 第2表は振動系としての諸定数を示す。

本実験装置では定数等測定の正確を期するために振子の先の棒と根元の棒の重心位置がそれぞれの中心線上にくるようあらかじめつり合おもりをつけて調整し

第1表 系の基本諸元

	元 の 棒	先 の 棒
棒 の 長 さ mm	$r_1 = 484^\circ 0$	$r_2 = 331^\circ 0$
重 心 位 置 mm	$s_1 = 273^\circ 0$	$s_2 = 152^\circ 0$
質 量 g	$m_1 = 433^\circ 0$	$m_2 = 291^\circ 0$
回 転 半 径 mm	$\gamma_1 = 154^\circ 0$	$\gamma_2 = 104^\circ 0$

た。しかる後各棒の重心位置と慣性モーメントとを微小振動法によって注意深く測定した。

また, ばね定数は棒に質量モーメントを順次加えたときの角変位の増加をはかってもとめた。

装置の円板を低速度で回転すると自励振動を発生する。振動の測定は第2図に示す光学的方法によった。まず, 粗面の速度と振動周期および振幅との関係を知るために, (イ) 棒端の運動の上下成分, (ロ) 円板の回転角, (ハ) 時間記録の三者を同時に同一フィルム上に記録した。

すなわち, 棒端の光点の運動を柱状レンズを通して 35 ミリの移動フィルム上に 2 倍のスケールで記録し,