の落下位置, 粗面の速度等に関係に摩擦係数および反ばつ係数の値を一定と見なしたことによるものと思われる。

以上第1報より第2報にわたる研究は二次元自励振動に対する一つの考え方を示したものであるが, 今後この種の問題に対するなんらかの参考ともなれば筆者

らの幸これに過ぎるものはない。

最後に, 本実験装置製作にあたり種々の便宜を与えられた通地信義氏に対し謝意を表する。

注:—

(1) 昭和 27 年 10 月 19 日 北関東地方講演会において講演。
原稿受付 昭和 28 年 8 月 20 日。

(2)(3) 正員, 群馬大学工学部。

621—52

むだ時間のある制御系の根軌跡⁽¹⁾

高 橋 安 人⁽²⁾

Root Loci of Retarded Control Systems

by Yasundo TAKAHASHI

This is an attempt to apply the root locus method to process control systems and to bring the method closer to optimum adjustments theories. Typical root loci graphically traced are shown with superposed constant setting lines to show the effects of controller adjustments, optimum points suggested thus far are also plotted in them.

The controller actions treated are from proportional to three term modes as defined by eq. 3. The process was assumed to be single capacity plus dead time types, fig. 3 and eq. 5.

Figs. 4 and 5 are principles of graphical solution for dimensionless form of loop transfer function of eq. 7. Figs. 7 to 9 are root loci for respective modes of control. The 25 % damping condition is expressed by OE lines in the figures. This line in fig. 7, J and C in fig. 8, and C in fig. 9 are for Cohen-Coon's optimum⁷⁾. ZN and J in fig. 7, Z in fig. 8 are Ziegler-Nichols's optimum^{8),9)}, and T in the figures are Takahashi's optimum¹⁰⁾ defined as the minimum control area of transient response.

摘要 周波数応答法の欠けたところを補うといわれる根軌跡法をプロセス制御系へ応用する。すなわちプロセスの代表特性へ比例から微積分比例までの諸制御動作をつけた閉ループの特に代表振動根軌跡を求める図解法を示す。次にこれによって求めた代表根軌跡線図へ制御動作調整効果を表わす曲線を記入し、この線図上でこれまでの諸最適調整公式の若干を比較する。最後に今後の根軌跡研究が形成主義におちいらないようにとの私見を付記する。

1. 緒 論

根軌跡法は線型制御回路の解析、シンセシスに用いられる一手法で, Evans が提案し⁽³⁾, 特にわが国では野本明によって紹介され研究されてきた⁽⁴⁾。

一般に根軌跡とは閉ループの特性式,

$$1 + kG(s) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

の根 $s = -\delta + j\omega$ が $k = 0 \sim \infty$ に対して s 面上に描く軌跡(すなわち G^{-1} 面の負の実軸の写像)と定義される。ここに k はゲイン常数, $kG(s)$ はループ巡

第1図 閉ループ

伝達かん数(第1図), δ と ω は正の実数, s はラプラス変換パラメータ, $j = \sqrt{-1}$ とする。根軌跡法では, まず(1)式の位相条件に

注目し,

$$\angle G(s) = \pm(2n+1)\pi, n=0, 1, 2, \dots\dots (2)$$

をみたす s をたとえば指標つき分度器を用いてさぐりあてる。それからこの s について $k=1/|G(s)|$ を決定する。このさい (a) $G(s)$ の極が根軌跡の起点 ($k=0$) となる, (b) $G(s)$ のゼロがその終点 ($k=\infty$) となる, (c) 実軸上の根軌跡はそれより右の実軸上に奇数箇のゼロ点または / および極のある区間を占めるなどの法則も軌跡のパターンをつかむのに役立つ。

こうして根軌跡を求めるとそれは特性方程式を解いたことになるので特に過渡応答に直結するインホメーションが得られる。これまでの研究はアメリカでは主として集中常数系が注目され⁽⁵⁾, たとえば Yeh らは

4次系までの根軌跡を究明に追及していくつかの法則を求めた⁽⁶⁾。これに対し野本明⁽⁴⁾は分布常数系も研究した。以下は主として、彼の注目した系の一つについて、より立入って検討する。

2. 閉ループの諸元

プロセス制御系のように制御対象と制御装置とが分離できるとき閉ループは第2図のブロック線図になる。

第2図 閉ループ構成要素

ここに制御装置の代表的伝達関数 $G_1(s)$ は;

比例 (P) 制御 : $G_1(s) = S$
 積分比例 (PI) 制御 : $G_1(s) = S(1 + N/s)$
 微分比例 (PD) 制御 : $G_1(s) = S(1 + Ds)$
 微積分比例 (PID) 制御 :

$$G_1(s) = S \left(1 + \frac{N}{s} \right) (1 + Ds) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし S は比例感度, N はリセット率, D は微分時間。

なお PID 制御の式は普通は

$$G_1(s) = S'(1 + D's + N'/s) \quad \dots\dots\dots (3')$$

と書かれる。この式中の S' , D' , N' は上記の S , N , D に対し

$$S' = S(1 + ND), \quad S'D' = SD, \quad S'N' = SN \quad \dots\dots\dots (4)$$

なる関係にある。根軌跡検討には (3') 式より (3) 式の形の方が便利だから以後 (3') 式は用いない。

第3図 制御対象の過渡応答

次に制御対象の過渡応答は第3図の形と考える。これは多くのプロセスの代表置換形とみられるもので、その伝達関数 $G_2(s)$ は、

$$\begin{aligned} (a) \text{ に対し: } G_2(s) &= Re^{-sL}/s \\ (b) \text{ に対し: } G_2(s) &= Re^{-sL}/(R/M + s) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし R は標準応答速度, M は感度, L はむだ時間 (第3図参照)。

以上によると定値制御すなわち第2図で $V(s) = 0$ の場合に外乱 $U(s)$ が図示のように加わるときの応答 $X(s)$ は、

$$X(s) = G_2(s)U(s)/(1 + kG(s)) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし

$$G_1(s) \cdot G_2(s) = kG(s)$$

が一巡伝達関数であり、これへ (3), (5) 式を入れると次の一般無次元形を得る:

$$kG(s) = k \frac{e^{-q}}{a+q} (1+qd) \left(1 + \frac{n}{q} \right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに $k = SRL$, $a = RL/M$,

$$n = NL, \quad d = D/L,$$

また s の代りに $q = sL$ を用い、その複素形は $q = -\delta + j\omega$ とする。上記の $s = -\delta + j\omega$ との対応関係は $\delta L = \Delta$, $\omega L = \Omega$ 。

なお (7) 式は第3図 (b) を PID 制御する場合の形であり、第3図 (a) ならこの式で $a = 0$ とおき、PD 制御なら $n = 0$, PI 制御なら $d = 0$, P 制御なら $n = d = 0$ とおく。

さてむだ時間 L の作用は (7) 式中の e^{-q} となっており、根軌跡ではこれを次のようにとらえることが以下の研究の根本をなす。

$$Le^{-q} = -\Omega \text{ (rad)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$|e^{-q}| = e^{\Delta} \quad \dots\dots\dots (9)$$

3. 根軌跡の図解

上記 (7) 式の無次元形につき、 s 面ではなく q 面上で根軌跡を作図する幾何学的手法を記そう。ここに実根の軌跡は1の (c) として記した法則と $kG(s)$ の形から直ちに求まるので、以下は主として複素根、それも最も小さい Ω に対するいわゆる代表振動項を形成する枝に注目する。

まず最も簡単な例として第3図 (b) の系を P 制御する場合は、解くべき式は (1), (7) 式から

$$1 + ke^{-q}/(a+q) = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

これへ (2) 式をあてはめると第4図において

$$\overline{OQ} = \Omega = 2\pi n + \alpha$$

となる。ゆえに、原点 O から $OA = a$ にとり、 A から任意の $\overline{AP}$ を引き、図示の角 α をよみとり、 $(\alpha + 2\pi n)$ の高さの水平線 $\overline{PQ}$ と $\overline{AP}$ との交点 P を求めると、これが軌跡上の一点になる。そしてこの点でのゲインは

$$k = \overline{PA} \cdot e^{-\overline{PQ}}$$

によって計算される。

第3図 (b) のプロセスの PID 制御という最も一般的な場合の作図法を第5図に示す。図の P , Q 点は第4図と同一点とする。 AP 上に任意の一点 P_{id} をとり、無元リセット率 n に等しく ON をとって図示の角 γ をよみ、

$$\gamma = (\overline{OQ} - \overline{OQ_{id}}) \text{ (rad)}$$

第4図 P制御の図解原理

第5図 PID制御の図解原理

に等しく $\angle OBC$ をとる. そして $\overline{BP_{ia}} \parallel \overline{CD}$ を引くと $\overline{OD}$ が P_{ia} 点に対する無元微分時間 d を与える. この作図原理は (7) 式右辺の () でまとめたベクトルの幾何学と (8), (9) 式から導かれるものである. そしてこの P_{ia} 点でのゲインは

$$k = e^{-\overline{P_{ia}Q_{ia}}} \frac{\overline{AP_{ia}} \cdot \overline{OP_{ia}}}{\overline{BC} \cdot \overline{NP_{ia}}}$$

により計算される. もちろん以上の作図では q 面の両軸 (d と Ω) を共通の尺度で目盛り, ベクトルの長さもその尺度で測らなければならない.

なお実根が共役根へ移る臨界減衰点から原点までの (実軸上の) 距離 l は Evans の一般則⁽³⁾を (8) 式を用いて少し改めると,

$$l + \frac{(n-a)l}{(l-n)(l-a)} = \frac{1}{1-l} \dots\dots\dots (11)$$

となることがわかる. l の大見当は上記の根軌跡から推定されるので (11) 式は試みの法により解くのがはよい.

4. 各種の根軌跡

以上の方法により求めた根軌跡を主として代表振動項に対して図示し, 制御動作調整量をパラメータとして記入し, これまで発表されてきた諸最適調整値の若干をこの面上で観察しよう.

4.1 P 制御 まず第3図 (a) の系の P 制御に対する根軌跡をかなり広い範囲にわたって図示すると第6図のようになる. 特性方程式が e^{-a} なる項をもつ

第6図 $a=0$ の系の P 制御に対する根軌跡全景

ので q の次数は無限大である. したがって根軌跡の枝の数も無限に多い. しかし主として応答に關与するのが実軸に最も近い一対の枝 (代表振動根) であることは図中に付記の k の値からも知られる. ゆえに以下はこの枝だけを拡大してしらべていく.

第7図がそれであって, 前図のように $a=0$ のものだけでなく, 各種の a (つまり第3図の b) に対して求めてある. そしてこれらに交わる k = 一定の線 (破

第7図 P 制御の代表根軌跡

線) も記してある.

多くの最適調整論で最適波形とみられている 25% 減衰の条件は

$$e^{-2\pi d/\Omega} = 0.25$$

だから $d/\Omega = 0.221$ となる. 図中の $\overline{OE}$ 線がこれを示す. この線にそっての k の値は, 当然のことながら Cohen-Coon の最適調整公式⁽⁷⁾,

$$k = 1.03 + 0.35 a$$

とほとんど一致する. また Ziegler-Nichols の“限界感度法”による最適値⁽⁸⁾は $Z-N$ 線となる. さらに $a=0$ に対しては Ziegler-Nichols の“過渡応答法”による最適値⁽⁹⁾が J 点, 高橋による最小制御面積点⁽¹⁰⁾が T 点となる. もちろん最適条件はある程度便宜的なもので, 外乱のパターンによっても違う⁽¹¹⁾が, 第7図のいま記した点や線からだいたいどの辺が適当かを目的に応じて判定することができよう.

4.2 PI および PD 制御 第8図が第3図 (a) に対する根軌跡 (実線) と k = 一定の軌跡 (破線) である. そして $d=0, n=0$ の線は前記 P 制御のもの, この線より下が PI 制御 ($d=0$ で $n=0.1, 0.2, 0.3$), 上が PD 制御 ($n=0$ で $d=0.1 \sim 0.5$) である.

図中の $\overline{OE}$ は前記の 25% 減衰条件を表わす. PI 制御に対してはこの線上の J が Cohen-Coon⁽⁷⁾ および Ziegler-Nichols の過渡応答法⁽⁹⁾による最適点, Z が Ziegler-Nichols の限界感度法⁽⁸⁾による最適点である. また Rutherford は $1/e$ 減衰 (図の $\overline{OF}$ 線) で

$$\text{周期 } 2\pi/\Omega = \text{積分時間} \equiv 1/n$$

を最適と提案した⁽¹²⁾. 図の R 点がこれを示す.

次に PD 制御に関して, 特に美しい最適条件は

第 8 図 PI および PD 制御の
代表根軌跡, $a=0$

第 9 図 (a) PID 制御の代表根軌跡, $a=0$, (a) は $n=0.3$, (b) は $n=0.6$

第 9 図 (b)

Cohen-Coon のそれである⁽⁷⁾。これは 25% 減衰で、しかも k が最大 (オフセット最小!) になる C 点で表わされる。制御面積最小という高橋の値⁽¹⁰⁾は上方の T 点になる。

4.3 PID 制御 この場合には $a=0$ (第 3 図の (a) に相当) としても n と d の二つがパラメータとなるので 1 枚の図にはまとめにくい。第 9 図は $n=0.3$ と $n=0.6$ に対する例を示す。

ここに (4) 式の関係により諸研究者の最適調整値を k, n, d へ換算すると次のようになる:

	k	n	d
Cohen-Coon ⁽⁷⁾	1.11	0.486	0.450
高橋 ⁽¹⁰⁾	0.96	0.625	0.625
Ziegler-Nichols 限界感度法 ⁽⁸⁾	0.47	1.0	1.0
同 過渡応答法 ⁽⁹⁾	0.60	1.0	1.0

これらはいずれも第 9 図とは n が違うので根を図上にプロットしても図中の曲線との対応関係は得られない。しかし参考のために Cohen-Coon および高橋のものを記すと C および T 点になる。前者といえども PD 制御におけるように 25% 減衰で k を最大にするとの条件だけではまだただ一つの点を決定することはできない。そこでたとえば実軸上の根の作用も考慮に加える必要がおこるが、これは他の場合にも忘れてはならないことである。

5. 過 渡 応 答

根軌跡法の特徴の一つは、それから得られるインホ

メーションが過渡応答に直結する点にある。野本⁽⁴⁾はその係数の新計算法を提案しているが、Evans の一般論による次のような図上のベクトル計算も便利である。

たとえば (6) 式へ (7) 式を適用し、外乱 $U(s)$ が大きさ ΔF の突変、

$$U(s) = \Delta F/s$$

とすれば、所要の制御経過は

$$\frac{x(\tau)}{RL \cdot \Delta F} = L^{-1} \frac{e^{-q}}{q(a+q)} \frac{1}{1 + \frac{ke^{-q}}{a+q} \left(1 + \frac{n}{q}\right) (1+qd)}$$

ただし $\tau = t/L$

となる。このラプラス逆変換は留数計算により求められる。ここに閉ループ極 q_i (すなわち、根軌跡上の一点) に対する留数は、(1), (7) 式の関係を利用して不定形の極限値を算定すると

$$R_i = \frac{-1/k}{(1+q_i d)(n+q_i) \left(1 + \frac{1}{a+q_i}\right) + \frac{n}{q_i} - q_i d} \dots \dots \dots (12)$$

となる。 q_i が複素根なら R_i はベクトルとなり、このベクトルは第 5 図において

$$q_i \text{ が } \overline{OP_{ia}}, (a+q_i) \text{ が } \overline{AP_{ia}}, (1+q_i d) \text{ が } \overline{BC}, (n+q_i) \text{ が } \overline{NP_{ia}}$$

であることから図上ベクトル計算によって求まる。こうして R_i ベクトルがわかると一対の複素根から生ずる応答成分⁽¹³⁾は

$$2|R_i|e^{-d\tau} \cos(2\tau + \angle R_i) \dots \dots \dots (13)$$

また積分動作を含まないとき ($n=0$) は $q=0$ に外乱

による極ができ、その留数

$$R_0 = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{e^{-q}}{q + a + k e^{-q}(1 + q d)} = \frac{1}{a + k} \quad \dots (14)$$

がオフセットを与える。かくて (13), (14) 式のような項の和が所要の応答となる。

たとえば第 3 図 (a) のプロセスの P 制御で $k=1$ ならば、(12) 式は

$$R_i = -1/(1 + q_i)$$

ここに q_i は第 7 図の J 点だから $(1 + q_i)$ ベクトルは $\overline{BJ}$, ゆえに図上から

$$|R_i| = 1/|\overline{BJ}| = 0.676$$

$$\angle R_i = -180^\circ - \angle JBO = -243^\circ = -4.24$$

$$\Omega = 1.32, \Delta = 0.34$$

これらを (13), (14) 式に入れると

$$\frac{x(\tau)}{RL \cdot \Delta F} \approx 1 + 1.35 e^{-0.34 \tau} \cos(1.32 \tau - 4.24)$$

これは第 10 図のようになり $\tau > 1$ では十分の精度をもつ。

第 10 図 過渡応答の例

6. あとがき

この研究では、プロセスの代表特性へ主たる連続制御動作を加えた場合の根軌跡の図解法を示し、それによって求めた根軌跡上で制御動作調整効果も図示し、若干の最適調整値が根軌跡上でどんな位置を占めるかを指摘した。

最後に根軌跡法に関する私見を付記する。閉ループ系の過渡応答を与えるのは一般に根軌跡ばかりではない。アナログ計算機で即座に求まることがあるし、周波数特性からの数値計算や近似計算法もある。ここに根軌跡法は周波数応答法とは別の視野から、各制御系に対するインホメーションを与えるところに意義があり、その応用がもっと開拓される可能性もあると思う。

しかしそれはどこまでも目的に合致した使い方をされなければならない。ここに根軌跡はその形式が美しく整っているために、どうかすると克明ではあるが一つの幾何学的模様にすぎない図形を追及すること自体が目的と誤認されるおそれはないだろうか？

制御工学では他の工学分野におけると同じく、実際上さして関係しない因子は無視したり近似的に扱ったりして手数を省き真の目的追及へ直進する。たとえば

根軌跡の図形は、もし代表振動だけを推定するのが目的の場合には、周波数応答計算で同じ目的のときに許されると同程度の省略や近似を行っても、曲線のパターンは注目部分ではほとんど変わらないはずである。しかるに上の例からもわかるように伝達関数の形が少しでも変ると曲線の様相が一変するように見えるのは、 $k=0$ とか $k=\infty$ という極限を考えるからである。もちろんこのような極限が伝達関数の極やゼロに対応するというのは實際上重要な法則であるが、たとえばいつの場合にも曲線を完全に追跡することにのみ没頭するとすれば、時には労多くして価値の乏しい形式論におちいるおそれがあると思う。

付. 主たる記号と単位例

記号	単 位	定 義	対応無元量
s	1/mn	ラプラス変換パラメータ (複素根)	$q = sL$
δ	1/mn	その負の実数部	$\Delta = \delta L$
ω	1/mn	その虚数部 (円振動数)	$\Omega = \omega L$
M	in/psi	プロセス感度	$a = RL/M$ $k = SRL$
R	in/psi · mn	制御対象の標準応答速度	
S	psi/in	調節器の比例感度	—
L	mn	回路のむだ時間	
N	1/mn	リセット率	$n = NL$
D	mn	微分時間	$d = D/L$
U	psi	外乱	—
X	in	制御量偏差のラプラス変換形	—
x	in	制御量偏差	—

注: —

- (1) 昭和 28 年 11 月 12 日 九州支部 化学機械に関する特別講習会において講演。
- (2) 正員、東京大学生産技術研究所。
- (3) W. R. Evans, Trans. AIEE, 67 (1948) 547.
- (4) 野本明, Proc. 2nd Japan Nat. Congress for Applied Mech. (1952) 359.
- (5) Yaohan Chu, AIEE Paper No. 52-200, 1952 はむだ時間のある場合を扱った由だが筆者はまだ原文を見ていない。
- (6) V. C. M. Yeh, Trans. ASME., 76, 3 (1954-4) 349 および V. C. M. Yeh, Yaohan Chu, ASME Paper 53-F-21, 1953. 高橋安人, 自動制御計算法 (1954) の第 8.1 表。
- (7) G. H. Cohen, G. A. Coon, Trans. ASME., 75, 5 (1953-7), 827, 機械学会誌, 56 巻 417 号 (1953-10) 文獻紹介 [289]。
- (8) 機械工学便覧, 3 分冊 (1953) 7-232, 第 195 表。
- (9) 同, 第 194 表。
- (10) 高橋安人, 自動制御 (1949)。
- (11) 堀昭史, 計測, 3, 2 (1953) 78.
- (12) C. I. Rutherford, Proc. IME., 162 (1950), 334, 機械学会誌, 54 巻 399 号, 文獻紹介 [133]。
- (13) オルテンブルグ・サルトリウス, 高橋, 伊沢訳, 自動制御の力学 (1953)。