論 文

669.14.017 : 539.413.011.24

集中荷重による鋼の曲げ降伏について⁽¹⁾

西原利夫⁽²⁾ 平 修二⁽³⁾ 若杉昇八⁽⁴⁾

On the Yielding of Steel Bar under Concentrated Bending Load

by Toshio NISHIHARA, Shūji TAIRA and Shōhachi WAKASUGI

The yielding phenomena of steel bar under uniform bending stress has been fully explained by the authors. The yielding phenomena of a twisted steel bar has also been discussed in the same manner. The idea is supported by their experiments for specimens of various sectional shapes of steel bars. But these are the cases where the stress gradient does not exist in the axial direction.

In the present paper, the authors intend to examine whether their theory is applicable even when the stress gradient exists in the axial direction, e.g., the yielding of bending steel bar under concentrated load. The problems of elastic-plastic bending are treated analytically in the same manner as in the former cases and the result is compared with the experiments. The both results agreed very well, and it is ascertained that the theory is applicable to the present case.

1. 緒 言

鋼材が曲げまたはねじりのごとく、不均一応力分布の下に降伏する場合、その見掛けの降伏応力は、引張降伏に比して著しく高く、その原因究明のために多くの研究がなされている。筆者はさきにX線による応力測定法をこの問題に適用し、曲げ降伏時のはりの断面の応力分布を明らかにし、これに基づいて、曲げ降伏の機構に関して解析を試みた⁽⁵⁾。すなわち、鋼材の降伏は引張降伏において見られるごとく、降伏点踊り場を有する点で他の材料と異なり、これについての考案に基づいて曲げ降伏を取扱ったもので、各種の形状および材質のはりについて、そのモーメントとたわみの関係をきわめてよく説明し得た。

同じ考えをねじり降伏⁽⁶⁾に適用したが、この場合も実験結果によく一致する結果を得た。

鋼材が降伏するのは、実際上、上のごとく軸方向に一樣な応力分布のときのみとは限らない。軸方向に応力こう配のある場合もしばしば起りうるので、筆者の方法がかかる場合にも適用しうるや否やを検討するのが本研究の目的である。その最も簡単な場合として、集中荷重による曲げ降伏を取扱った。

より測定した結果を第1図に示す。図において、縦軸は応力測定値、横軸ははり が弾性変形すると考えて得た計算値であって、降伏応力 σ_s 以下においては測定値と計算値は一致するけれども、降伏応力以上に対しては測定応力値は σ_s 以上には達しない。また荷重を除けば残留応力を生ずる。したがって集中荷重によ

第 1 図

2. 集中荷重による曲げ降伏の解析

集中荷重をうける鋼はりの外層表面の応力をX線に

る曲げの場合においても, この実験的事実は筆者理論の考え方の基礎と一致している. 次にこの場合に対して筆者理論を適用してみよう.

第2図に示すごとく鉛直上方に y 軸, 水平方向に x 軸をとり, 片持はりの自由端に集中荷重 P が加えら

第 2 図

れるものとする. はりの全長を l_0 , 固定端における最外層の応力が降伏応力 σ_s に達するときの荷重を P_s , また $M_s = P_s l_0$ とおく. すると M_s は任意の断面において最外層の応力が σ_s に達するときのその断面の曲げモーメントに等しくなる. したがって, いま $x=l$ より左方が塑性変形を生じているものとする, $x=l$ の断面は曲げモーメント M_s をうけていることになるゆえ,

$$M_s = P_s l_0 = P(l_0 - l),$$

$$\text{ゆえに } l = (1 - P_s/P) l_0 \quad \dots\dots(1)$$

また任意の断面における曲げモーメントを M とすれば,

$$M = P(l_0 - x), \quad \frac{M}{M_s} = \frac{P}{P_s} \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \quad \dots\dots(2)$$

次に塑性変形を生じている $x=l$ より左方の区域内に dx なる微小部分を取り, この部分に対して, 前理論⁽⁶⁾を適用すると,

$$\frac{\varphi}{1-\varphi} = \frac{\varepsilon_e^* - \varepsilon_e}{\varepsilon_e'' - \varepsilon_e} \quad \dots\dots(3)$$

ここに

φ : 微小部分における塑性部分の長さの総和のはりの微小長さに対する割合,

ε_e : その材料の引張りまたは圧縮降伏点に相当する弾性ひずみ, $\varepsilon_e = \sigma_s/E$ (E : 縦弾性係数)

ε_e'' : その材料の引張りまたは圧縮における降伏点踊り場終端における全ひずみ,

ε_e^* : はりが完全弾性の応力分布にてモーメントをささえると仮定したときの最外層のひずみ,

ε : はりが完全塑性の応力分布にてモーメントをささえると仮定したときの最外層のひずみ,

したがって, はりの材料と断面の形を与えると, 前論文⁽⁶⁾におけるごとく, (3) より φ を M/M_s すなわち $P(l_0 - x)/P_s l_0$ の関数として定めることができる. たとえば, 前論文⁽⁶⁾におけるごとく長方形断面に対しては,

$$\varphi = \frac{(M/M_s - 1)\sqrt{3 - 2M/M_s}}{\left(\frac{M_s}{M} - 1 + \frac{\varepsilon_e''}{\varepsilon_e}\right)\sqrt{3 - 2\frac{M}{M_s} - 1}} \quad \dots\dots(4)$$

また円形断面に対しては, D を媒介変数として,

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{M_s} &= \frac{4}{3\pi} (1 - 4D^2)^{3/2} \\ &+ \frac{2}{\pi} \left[(1 - 4D^2)^{1/2} + \frac{1}{2D} \sin^{-1} 2D \right], \\ \frac{\varphi}{1-\varphi} &= \frac{M/M_s - 1}{\varepsilon_e''/\varepsilon_e - 1/D} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(5)$$

と表わされる.

次に, 荷重とたわみの関係を求める. まず $P < P_s$ なるときは変形は全体が弾性的であって材料力学の理論より自由端におけるたわみ δ は次のごとく表わされる.

$$\delta = -(y)_{x=l} = \frac{Pl_0^3}{3EI} = \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_e}{h} \frac{P}{P_s} l_0^2 \quad \dots\dots(6)$$

ここに, h ははりの高さの1/2を表わし, I は断面二次モーメントを表わす. ただし, はりは上下対称の断面を有するものとする.

次に, $P > P_s$ なるときは, $0 \leq x \leq l$ においては塑性変形を生ずる. 最外層におけるひずみを ε' とすれば,

$$\varepsilon' = \varepsilon_e(1 - \varphi) + \varepsilon_e''\varphi = \varepsilon_e \left\{ 1 + \left(\frac{\varepsilon_e''}{\varepsilon_e} - 1 \right) \varphi \right\} \quad \dots\dots(7)$$

したがって,

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varepsilon'}{h} = \frac{\varepsilon_e}{h} \left\{ 1 + \left(\frac{\varepsilon_e''}{\varepsilon_e} - 1 \right) \varphi \right\} \quad \dots\dots(8)$$

同様に $l \leq x \leq l_0$ においては変形は弾性的であって

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{\varepsilon_e}{h} \frac{P}{P_s} \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \quad \dots\dots(9)$$

(8), (9) を x につき積分し, 固定端における条件, および $x=l$ における連続の条件より積分定数を定めれば, 荷重とたわみの関係を得ることができる. 特に自由端におけるたわみ δ は

$$\delta = -(y)_{x=l_0} = \frac{\varepsilon_e}{h} l_0^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{P_s}{P} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_e''}{\varepsilon_e} - 1 \right) \left\{ \frac{P_s}{P} \frac{1}{l_0} \int_0^l \varphi dx + \frac{1}{l_0^2} \int_0^l \int_0^x \varphi dx dx \right\} \right],$$

上式中の積分変数 x を (2) の関係により M/M_s に変換して, 少しく変形すれば

$$\delta = \frac{\varepsilon_e}{h} l_0^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{P_s}{P} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_e''}{\varepsilon_e} - 1 \right) \left(\frac{P_s}{P} \right)^2 \cdot \int_1^{P/P_s} \frac{M}{M_s} \varphi d \left(\frac{M}{M_s} \right) \right] \quad \dots\dots(10)$$

これに (3) より得られる (4), (5) のごとき関係を代入すれば, たわみ δ と荷重 P の関係を直接求められる. 以上の計算方法は, 一般に任意の荷重をうける対称断面をもつはりに対して応用出来るものである.

$$\delta = \frac{\varepsilon_e}{h} l_0^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{P_s}{P} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon_e} - 1 \right) \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon''}{\varepsilon_e} \cdot \frac{P_s}{P} + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon_e} + \frac{1}{2} - \sqrt{D} \right) \left(\frac{P_s}{P} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon_e} - 1 \right) \frac{1}{2} \left(\frac{P_s}{P} \right)^2 \left\{ \sum_{i=1,2,3} A_i (3 - \alpha_i) \log \frac{1 - \alpha_i}{\sqrt{D} - \alpha_i} \right\} \right] \dots \dots \dots (11)$$

ここに, $D = 3 - 2P/P_s$

$$\alpha_i = 2\sqrt{B} \cos(\varphi + 2i\pi/3) \quad (i=1, 2, 3)$$

$$A_1 = \frac{\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3)\{(3B-1)\alpha_1 - 2\}}{6\sqrt{3} \sqrt{B^3 - 1}}, \dots$$

$\dots, \dots$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } B &= \frac{1}{3} \left(2 \frac{\varepsilon''}{\varepsilon_e} + 1 \right) \\ \cos \varphi &= -\sqrt{1/B^3} \end{aligned} \right\}$$

第1表⁽⁷⁾に示す材料 A, C について数値計算を行った結果を第3図に示す. 円形断面の場合には, 同様に (5) を (10) に代入して求めればよいが, このときは解析的に求めることは困難である. 筆者は (10) に含まれる積分を図式積分によった. 第1表に示す材料 B について計算した結果を第4図に示す. 両図において, 実線は筆者理論, 破線および鎖線は, それぞれ材料が完全塑性または完全弾性をなすと仮定したときの荷重と たわみ の関係である. また, 斜線を引いた部分は固定端にて $\varphi=1$, すなわち $\varepsilon'=\varepsilon''$ に達したときの状態 (このときの荷重を P_y , モーメントを $M_y=P_y l_0$ とする) を示し, 筆者理論は一応この状態

第 1 表

材料	炭素量 %	熱 処 理	ε_e %	ε'' %
A	0.10	900°C 1 時間焼なまし 炉冷	0.114	3.14
B	0.44	780°C " "	0.138	1.31
C	0.65	750°C " "	0.140	0.60

第 3 図

る. 次に, 長方形および円形断面の はり について, (10) の計算を行ってみる.

長方形断面に対しては, (4) を (10) に代入して,

第 4 図

までを論ずるものである. この図において δ と P の関係が直線関係より少し離れた点において $\varphi=1$ すなわち, 固定端最外層の ひずみ が ε'' にまで達しており, かつ, $\varepsilon''/\varepsilon_e$ の大きい軟鋼ほどそれが著しいことはきわめて注目すべき結果であると考えられる.

3. 実 験

荷重と たわみ の関係の計算値と実験結果の比較の例として, 第1表⁽⁷⁾に示す材料を用いて実験を行っ

第5図 荷重附加装置

た. 実験は Mohr-Federhaff 400 kg 引張試験機を用いて, 両端支持はりの中央に集中荷重を加えるごとく, 第5図のごとき装置を附して実験を行った. たわみの測定は第6図のごとき, てこを用いて 5/2 倍に拡大し, ダイアルゲージにて測定した.

得られた結果を第 7, 8, 9 図に白丸にて示す。図において実線は理論曲線で、実験結果とだいたいにおいてよく一致している。したがって、筆者の鋼の曲げ降伏に関する理論は、集中荷重による曲げの場合にもよく成立するものと考えられる。

第 6 図 たわみ測定装置 (材料: 帯鉄 20×3 mm²)

第 9 図

験片を試験機より取りはずしてみると、荷重の着力点に傷を生じており、集中応力による影響を多少うけているらしく思われた。この集中応力の降伏に及ぼす影響や、 $\varphi=1$ を越えた後の塑性曲げの問題もまた現在のところ明らかでない。

4. はりの曲り

固定端 (実験においては荷重の加えられる中央の点) の最外層の ひずみ が ϵ'' に達した後、更に荷重を加えたときの荷重と たわみの実験的關係は、第 7, 8, 9 図に示したごとくであって、一般に荷重の増加に比べて ひずみの増加は顕著である。殊に 0.1% C 鋼の場合には、荷重の増加はほとんど認められない。しかし、このときにおける試験片は中央において “く” 字形に曲り、たわみは主として はり の中央におけるこの曲りによって生ずる。このことは特に軟鋼ほど著しい。これは筆者の考えによると次のごとく説明される。

荷重が P_y に達したとき、すなわち、固定端において $\varphi=1$, $\epsilon'=\epsilon''$ に達したときにおける はり の最外層のひずみ分布を筆者理論 ((7) 式参照) より計算すると第 10 図のごとくなる。この図によると、固定端、すなわち最大曲げモーメントの位置の極く近傍のみにおいて塑性変形がきわめて著しい。たとえば 0.1% C 鋼の場合についてみると、 $\epsilon'/\epsilon_e > 2$ となるのは、 $x < 0.002 l_0$ 程度以下の固定端近傍のみであって、そこではひずみ分布曲線はほとんど縦軸に一致するほどに極局部的に顕著である。

これに対して、完全塑性性をなすと仮定したときのひずみ分布は、筆理論に比べて ひずみこう配 はゆるやかであり、はるかに広い範囲にわたって ひずみの

第 7 図

第 8 図

第 7 図にみられるごとく、0.1% C 鋼の場合には、ねじり実験⁽⁶⁾における場合のごとく、荷重は $P_y=3/2 P_0$ より少し大きくなった後低下するようである。現在のところその理由は明らかでない。また、実験後試

第 10 図 はりの最外皮におけるひずみ分布
(固定端にて $\varphi=1$ に達した場合)

大きい部分が分布する。更に荷重を増加すると、筆者理論よりは、他の部分では比例的に少し変形するのみであるが、中央附近はきわめて顕著に変形することが予想され、試験片はますます外観上、“く”字形に変形するものと考えられる。これを完全塑性理論より考えると、定性的には上と同じような性質が考えられるけれども、筆者理論に比べると、はるかに小さい曲率でゆるやかに曲るのみである。それは塑性変形域中で“ほとんど”比例的に変形する部分が筆者理論に比べるとはるかに狭い範囲であり、したがって顕著に変形する部分が多いからである。完全塑性理論からは、極端に角のある曲り方は期待できない。また、筆者理論よりは第 10 図にみられるごとく、 ϵ''/ϵ_0 の比の大きい軟鋼ほど、“く”字形に変形する性質は顕著である

と考えられる。このことは実験からも認められる。

焼なました軟鋼の針金を指などに巻きつけて塑性変形させると、角のある多角形状になると言われる。この現象を E. Orowan⁽⁸⁾ は加工軟化の例と称しているけれども、筆者の考えによると、次のごとく説明される。すなわち、指その他の原因によって曲げモーメントが不均一に分布し、最大曲げモーメントの断面近傍のみが前述のごとく、きわめて著しい塑性変形を生じ、その他の部分は“ほとんど”比例的な変形を生ずるのみであるためと考えられる。なお、このときの最大曲げモーメントは、筆者理論および実験より考えると、 $M_y (= P_y l_0)$ 程度であろうと想像される。

5. 結 言

本論文は鋼の曲げ降伏に関する筆者の考察が、軸線方向に応力こう配の存する場合にも適用し得ることを実験との比較により確かめたものである。筆者の行った実験の範囲においては、前述のごとく計算値とだいたいよく一致している。各種の鋼の各種の断面をもつはりについて、任意の荷重を受ける場合についても全く同じ方法で扱い得るであろう。

また、軟鋼の塑性曲げにおいて、はりが“く”字形に変形する理由も筆者の理論により、合理的に説明できたものと考えられる。

注：一

- (1) 昭和 28 年 11 月 3 日 京阪神臨時大会講演会において講演。原稿受付 昭和 28 年 11 月 30 日。
- (2)(3) 正員、京都大学工学部。
- (4) 正員、福井大学工学部。
- (5) 著者、機械学会論文集、18 巻 65 号、84 ページ (第 1 報)、同 89 ページ (第 2 報) (昭 27)。
- (6) 著者、機械学会論文集、18 巻 68 号、65 ページ (昭 27)。
- (7) 前論文、第 2 報 (18 巻 65 号 89 ページ) に用いた材料と同一のものである。
- (8) E. Orowan; Phys. Soc., Proc., Vol. 52, p. 8. (1940)。