539.31 : 621-272.2

任意断面を有するコイルばねの応力⁽¹⁾大 橋 義 夫⁽²⁾

The Stress of a Coil Spring which has an Arbitrary Sectional Form

by Yosio ŌHASI

In this paper, the general solution of stress of a coil spring which has an arbitrary sectional form is obtained by using the orthogonal curvilinear coordinate system to express the sectional form of coil spring.

According to this result, the stress of a coil spring which has a complicated section is easily obtained by using the general solution.

1. 緒 言

コイルばねの応力に関する研究は従来も行われており、たとえばピッチの影響を無視しうる場合については O. Göhner がまず円形断面⁽³⁾につき、ついで円および長方形断面⁽⁴⁾についての近似解を求めている。その後 B. Sen は円形断面⁽⁵⁾および長方形断面⁽⁶⁾を有する円環のねじりにつき応力の厳密解を求めている。その他これに類する研究⁽⁷⁾⁽⁸⁾も行われている。

しかしながら従来の結果は特定の断面個々について解かれたもので、未だ任意断面を有するコイルばねの応力を一般的に取扱われた例はないようである。

今一般の直交曲線座標で表わされた任意の断面を有するコイルばねにつき、コイルばねの基礎式を解いて応力の一般式を求めておけば、断面を表わす関数を応力の一般式に入れる操作のみで応力を求めることができる。断面が複雑になると、従来の方法では基礎式を直接解くためすこぶる操作が繁雑となって手に負えなくなるとも考えられるので、かような場合、この方法ははなはだ有利であると考えられる。また後から述べるごとく、この場合の第0次近似応力は真直棒のねじり応力の一般解に当たっている。

2. 基礎式および応力の式

第1図に示すように、コイルばねの軸方向に z 軸をとり、素線断面の中心 M を通り水平に r 軸をとってその交点を原点 O とする。また断面上にも M を原点として図に示すように直角座標

第 1 図

系 (r', z) を設ける。ここで OM はコイルばねの半径に当り、これを R とする。また図において、応力 $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$ は矢印の方向を正にとる。ここで r 軸の紙面に直角な方向の偏角を θ とすると、コイルばねは円柱座標 (r, θ, z) で表わされることになる。

そこで円柱座標で表わした応力の平衡方程式を考え

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

また適合条件式は

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} &= 0, \\ \Delta \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} &= 0, \\ \Delta \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0, \\ \Delta \tau_{\theta z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial r} - \frac{\tau_{\theta z}}{r^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \theta \partial z} &= 0, \\ \Delta \tau_{rz} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial z} &= 0, \\ \Delta \tau_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} - \frac{4\tau_{r\theta}}{r^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial \theta} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに ν はポアソン比を示し、

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\theta = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$$

である。ピッチのごく小さいときを考えると $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$ 以外の応力はすべて無視しうるので (1) より

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

また (2) より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{\theta z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tau_{\theta z}}{\partial z^2} - \frac{\tau_{\theta z}}{r^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{4\tau_{r\theta}}{r^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

が残る。

今応力関数 ϕ を用い

$$\tau_{r\theta} = \frac{GR^2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{GR^2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \dots\dots\dots (5)$$

ここに G はせん断弾性係数

とおけば (5) は (3) を満足する。

(5) を (4) に入れると、容易に次式をうる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + 2C = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここに C は定数。

ここで $r = R + r'$ において素線断面に座標をうつすと (6) より

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{3}{R(1+r'/R)} \frac{\partial \phi}{\partial r'} + 2C = 0 \dots\dots\dots (7)$$

を得る。一般に $r' \ll R$ であるから、次の展開式

$$\frac{1}{1+r'/R} = 1 - \frac{r'}{R} + \frac{r'^2}{R^2} - \frac{r'^3}{R^3} + \dots\dots\dots (8)$$

を用いることができる。そこで (8) を (7) に代入し、Göhner と同様と逐次近似法によって (7) をとくため ϕ を次のようにおく。

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots\dots\dots (9)$$

しかし $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\dots$ が次の式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r'^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} + 2C &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r'^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - \frac{3}{R} \frac{\partial \phi_0}{\partial r'} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r'^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} - \frac{3}{R} \frac{\partial \phi_1}{\partial r'} + \frac{3r'}{R^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial r'} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

を満足するように決定するならば (9) の項数を増すに従って (10) の和はますます (7) に近づき、したがって (9) はますます応力の関数 ϕ の厳密解に近づく。

次に表面に外力が働かないものとすれば、断面の周辺曲線に垂直な方向の合成応力は 0 である。

したがって断面の周辺で

$$\phi_0 = \phi_1 = \phi_2 = \dots\dots = 0 \dots\dots\dots (11)$$

となるように ϕ を定めればよい。

したがって応力は各近似段階につき次のような式によって表わされる。すなわち

第 0 次近似

$$(\tau_{r\theta})_0 = G \frac{\partial \phi_0}{\partial z}, \quad (\tau_{\theta z})_0 = -G \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \dots\dots\dots (12)$$

第 1 次近似

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_1 &= G \left\{ \left(1 - \frac{2r'}{R} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial z} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right\}, \\ (\tau_{\theta z})_1 &= -G \left\{ \left(1 - \frac{2r'}{R} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial r'} + \frac{\partial \phi_1}{\partial r'} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

第 2 次近似

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_2 &= G \left\{ \left(1 - \frac{2r'}{R} + \frac{3r'^2}{R^2} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{2r'}{R} \right) \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right\}, \\ (\tau_{\theta z})_2 &= -G \left\{ \left(1 - \frac{2r'}{R} + \frac{3r'^2}{R^2} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial r'} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{2r'}{R} \right) \frac{\partial \phi_1}{\partial r'} + \frac{\partial \phi_2}{\partial r'} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

以上の関係を用いて応力を求めるには境界条件(11)を満足する (10) の解をそれぞれ (12), (13) および (14) に入れて計算すればよい。

3. 任意断面形を有するコイルばね

任意断面形を有するコイルばねの応力を求めるためには断面を直角座標で表わす代りに任意の直交曲線座標で表わす方が便利である。ゆえに次のような座標変換を行う。すなわち

$$r' + iz = f(w) \quad \text{かつ} \quad w = \alpha + i\beta \dots\dots\dots (15)$$

とし $f(w)$ の共役関数を $\bar{f}(\bar{w})$, かつ $\bar{w} = \alpha - i\beta$ とすると

$$r' = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \quad z = -\frac{i}{2}(f - \bar{f}) \dots\dots\dots (16)$$

$$\text{および} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial r'} &= \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{\bar{f}'} \right), \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} &= -\frac{\partial \beta}{\partial r'} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{\bar{f}'} \right), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

なる関係がえられる。

これらの関係を用いて、断面に設けられた直角座標 (r', z) から任意断面に個有の直交曲線座標 (α, β) に変換すると、任意断面は $f(\alpha + i\beta)$ にて表わされ、周辺曲線は変数 α を一定にした場合に対応せしめられる。したがって、これに応じ先に求めた (10) 式を直角座標 (r', z) より直交曲線座標 (α, β) に変換する。まず (17) を用いて $\partial \phi / \partial r'$ を直交曲線座標で表わせば

$$\frac{\partial \phi}{\partial r'} = \frac{1}{2f'\bar{f}'} \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

となる。同様にして

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{f'\bar{f}'} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta^2} \right) \dots\dots\dots (19)$$

となるゆえ、(18) および (19) を (10) に代入して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \beta^2} &= -2 C f' \bar{f}', \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \beta^2} &= \frac{3}{2R} \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \phi_0}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \phi_0}{\partial \beta} \right\} \\ \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \beta^2} &= \frac{3}{2R} \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} \right\} - \frac{3(f + \bar{f})}{4R^2} \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \phi_0}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \phi_0}{\partial \beta} \right\}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

が得られる。すなわち、ここに (10) は断面を表わす関数と関係づけて表わされたことになる。

(20) に断面を表わす具体的な関数を代入してとけばその断面に関する応力関数を得るゆえ、これを用いれば応力が求められるわけであるが、断面形が複雑になるとこの操作ははなはだ困難になる。

それゆえ、今この困難をさけるため (20) をこのままの形で解いて ϕ の一般解を得ることを考える。

$$\text{ここで演算子 } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$$

を考え、これを $f\bar{f}$ に作用させると $\Delta f\bar{f} = 4f'\bar{f}'$ なる関係がえられる。したがって (20) の第1式の特解は $-\frac{C}{2}f\bar{f}$ なることがわかり、これと任意の平面調和関数 ϕ_0 と組合せて ϕ_0 を次のようにおく。

$$\phi_0 = C \left(\phi_0 - \frac{1}{2} f\bar{f} \right) \dots\dots\dots (21)$$

$$\text{ここで周辺において } \phi_0 = \frac{1}{2} f\bar{f} \dots\dots\dots (22)$$

となるように ϕ_0 を定めると ϕ_0 は明らかに (20) の第1式を満足し、かつ (22) より周辺において

$$\phi_0 = 0$$

なることがわかるので、上に求められた ϕ_0 は所要 *

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \beta^2} &= \frac{3C}{4R^2} \left[\frac{3}{2} \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right\} + \frac{1}{2} (f + \bar{f}) \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} + \frac{1}{4} (f + \bar{f})^2 f' \bar{f}' + 6 f' \bar{f}' \left(\phi_0 - \frac{1}{4} f\bar{f} \right) \right] \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

となる。前と同様にして (26) の特解と任意の平面調和関数 ψ_2 とを組合せて ϕ_2 を次のようにおく。

$$\phi_2 = \frac{3C}{4R^2} \left[\psi_2 + \frac{3}{4} (f + \bar{f}) \psi_1 + \frac{1}{8} \left\{ (f + \bar{f})^2 \left(\phi_0 + \frac{1}{6} f\bar{f} \right) - \frac{5}{6} f^2 \bar{f}^2 \right\} + 5 \frac{1}{4} (f' \bar{f}') \phi_0 \right] \dots\dots\dots (27)$$

ここで周辺において

$$\phi_2 = - \left[\frac{3}{4} (f + \bar{f}) \psi_1 + \frac{1}{8} \left\{ (f + \bar{f})^2 \left(\phi_0 + \frac{1}{6} f\bar{f} \right) - \frac{5}{6} f^2 \bar{f}^2 \right\} + 5 \frac{1}{4} (f' \bar{f}') \phi_0 \right] \dots\dots\dots (28)$$

となるように ϕ_2 を定めると ϕ_2 は明らかに (20) の第3式を満足し、かつ (28) より周辺において $\phi_2 = 0$ なることがわかるので ϕ_2 は所要の関数となる。

以上のようにして $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ が求まれば、これらに対応する応力の近似式は (12), (13) および (14) から求め得る。応力式 (12), (13) および (14) はいずれも $\partial \phi / \partial r'$ および $\partial \phi / \partial z$ なる形を含むゆえ、まずこの計算を行わねばならぬ。(17) を用いれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{1}{2 f' \bar{f}'} \left\{ -i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + (f' + \bar{f}') \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right\}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial r'} &= \frac{1}{2 f' \bar{f}'} \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

なる関係が得られるから、 $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ をそれぞれ α および β で微分して (29) に入れれば前述の形を計算しうる。

* の関数となる。

次に (20) の第2式の右辺に (21) を代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \beta^2} &= \frac{3C}{2R} \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} \right. \\ &\quad \left. + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} - f' \bar{f}' (f + \bar{f}) \right\} \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

を得るが、この式の右辺はすべて既知なるゆえ、これを解いて ϕ_1 を求めることができる。

前と同様にして (23) の特解と任意の平面調和関数 ψ_1 を組合せて ϕ_1 を次のようにしておくことができる。

$$\phi_1 = \frac{3C}{4R} \left\{ \psi_1 + (f + \bar{f}) \left(\phi_0 - \frac{1}{4} f\bar{f} \right) \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ここで周辺において

$$\phi_1 = - (f + \bar{f}) \left(\phi_0 - \frac{1}{4} f\bar{f} \right) \dots\dots\dots (25)$$

となるように ϕ_1 を定めると ϕ_1 は明らかに (20) の第2式を満足し、かつ (25) より周辺において

$$\phi_1 = 0$$

なることがわかり、 ϕ_1 は所要の関数となる。

次に (20) の第3式の右辺に (21) および (24) を入れて整理すれば

そこで、これらの結果 (12), (13) および (14) に入れて各近似段階の応力式をまとめると、任意断面形を有するコイルばねの応力の一般式としては

第 0 次近似にて

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_0 &= \frac{CG}{2} \left[\frac{1}{f'f'} \left\{ -i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} + i(f - \bar{f}) \right], \\ (\tau_{\theta z})_0 &= -\frac{CG}{2} \left[\frac{1}{f'f'} \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} - (f + \bar{f}) \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

第 1 次近似にて

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_1 &= \frac{CG}{2f'f'} \left[\left\{ -i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} - \frac{1}{4R} (f + \bar{f}) \left\{ -i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4R} \left\{ -i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right\} \right] + \frac{CG}{2} \left\{ i(f - \bar{f}) - \frac{5i}{8R} (f + \bar{f})(f - \bar{f}) \right\}, \\ (\tau_{\theta z})_1 &= -\frac{CG}{2f'f'} \left[\left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} - \frac{1}{4R} (f + \bar{f}) \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4R} \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right\} \right] + \frac{CG}{2} \left\{ (f + \bar{f}) - \frac{5}{8R} (f + \bar{f})^2 - \frac{3}{R} \left(\psi_0 - \frac{1}{4} f \bar{f} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

第 2 次近似にて

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_2 &= \frac{CG}{2f'f'} \left[\left\{ -i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} - \frac{1}{4R} (f + \bar{f}) \left\{ -i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{32R^2} (f + \bar{f})^2 \left\{ -i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} + \frac{3}{4R} \left\{ -i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{16R^2} (f + \bar{f}) \left\{ -i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right\} + \frac{3}{4R^2} \left\{ -i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} + (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{4R^2} \left\{ -i(f' - \bar{f}') \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{4} f' \bar{f}' \psi_0 \right) + (f' + \bar{f}') \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{4} f' \bar{f}' \psi_0 \right) \right\} \right] \\ &\quad + \frac{CG}{2} \left\{ i(f - \bar{f}) - \frac{5i}{8R} (f - \bar{f})(f + \bar{f}) + \frac{11i}{32R^2} (f - \bar{f})(f + \bar{f})^2 + \frac{5i}{16R^2} f \bar{f} (f - \bar{f}) \right\}, \\ (\tau_{\theta z})_2 &= -\frac{CG}{2f'f'} \left[\left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} - \frac{1}{4R} (f + \bar{f}) \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{32R^2} (f + \bar{f})^2 \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right\} + \frac{3}{4R} \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{16R^2} (f + \bar{f}) \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right\} + \frac{3}{4R^2} \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{4R^2} \left\{ (f' + \bar{f}') \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{4} f' \bar{f}' \psi_0 \right) + i(f' - \bar{f}') \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{4} f' \bar{f}' \psi_0 \right) \right\} \right] \\ &\quad + \frac{CG}{2} \left\{ (f + \bar{f}) - \frac{5}{8R} (f + \bar{f})^2 + \frac{11}{32R^2} (f + \bar{f})^3 + \frac{9}{4R^2} (f + \bar{f}) \left(\psi_0 - \frac{1}{4} f \bar{f} \right) - \frac{3}{R} \left(\psi_0 - \frac{1}{4} f \bar{f} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{9}{4R^2} \psi_1 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

を得る。

次にねじりモーメント M_t を計算してみよう。直角座標 (r', z) にて表わされたねじりモーメントの式

$$M_t = \iint (z \tau_{r\theta} - r' \tau_{\theta z}) dr' dz$$

を (16) により直交曲線座標 (α, β) に変換して表わせば

$$M_t = -\frac{1}{2} \iint \{ (f + \bar{f}) \tau_{\theta z} + i(f - \bar{f}) \tau_{r\theta} \} f' \bar{f}' d\alpha d\beta \dots\dots\dots (33)$$

が得られる。

第 0 次近似の場合のねじりモーメントは (33) に (30) を入れて

$$(M_t)_0 = \frac{CG}{2} \iint \left(\frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \beta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} + 2f \bar{f} f' \bar{f}' \right) d\alpha d\beta \dots\dots\dots (34)$$

となる。同様に第1次近似の場合のねじりモーメントは (33) に (31) を入れて計算すると

$$(M_t)_1 = \frac{CG}{2} \left[\iint \left(\frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \beta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} - 2 f \bar{f} f' \bar{f}' \right) d\alpha d\beta + \frac{1}{4R} \iint \left\{ 3 \left(\frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \beta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right) - (f + \bar{f}) \left(\frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \beta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{2} (f + \bar{f}) (12 \psi_0 + 7 f \bar{f}) \right\} d\alpha d\beta \right] \dots (35)$$

を得る。また第2次近似の場合のねじりモーメントは (33) に (32) を入れて

$$(M_t)_2 = \frac{CG}{2} \left[\iint \left(\frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \beta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} - 2 f \bar{f} f' \bar{f}' \right) d\alpha d\beta + \frac{1}{4R} \iint \left\{ 3 \left(\frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \beta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right) - (f + \bar{f}) \left(\frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \beta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{2} (f + \bar{f}) (12 \psi_0 + 7 f \bar{f}) f' \bar{f}' \right\} d\alpha d\beta \right. \\ \left. + \frac{3}{4R^2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \beta} \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{4} (f + \bar{f}) \left(\frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \beta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{8} (f + \bar{f})^2 \left(\frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \beta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right) + 5 \left(\frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{4} f' \bar{f}' \psi_0 \right) + \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{4} f' \bar{f}' \psi_0 \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{2} \psi_1 (f + \bar{f}) f' \bar{f}' - \frac{3}{2} (f + \bar{f})^2 \left(\psi_0 + \frac{2}{9} f \bar{f} \right) f' \bar{f}' - \frac{5}{6} f^2 \bar{f}^2 f' \bar{f}' \right\} d\alpha d\beta \right] \dots (36)$$

を得る。

しかるに一方、軸方向に加わる荷重を P とすれば $M_t = P \times R$ で表わされるゆえ、 C の値は P を用いて表わすことができる。したがって荷重 P と応力との間の関係は前に求めた応力の式に今求めた C を入れることにより求められる。

次にまたコイルばねのたわみ量を表わす式は

$$\delta h = 2\pi n R^2 C \dots (37)$$

δh : たわみ量, n : 巻き数

なるゆえ、いま求めた C の値を用いれば、荷重とたわみ量の関係も求めうる。

以上に述べた方法は直交曲線座標を用いた一般解 *

第0次近似にて

$$(\tau_\theta)_0 = \frac{CG}{\sqrt{f' \bar{f}'}} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \right),$$

第1次近似にて

$$(\tau_\theta)_1 = \frac{CG}{\sqrt{f' \bar{f}'}} \left[\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{4R} \left\{ 3 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + 3(f' + \bar{f}') \left(\psi_0 - \frac{1}{4} f \bar{f} \right) - (f + \bar{f}) \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} - \frac{5}{4} \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \right) \right\} \right],$$

第2次近似にて

$$(\tau_\theta)_2 = \frac{CG}{\sqrt{f' \bar{f}'}} \left[\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{4R} \left\{ 3 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + 3(f' + \bar{f}') \left(\psi_0 - \frac{1}{4} f \bar{f} \right) - (f + \bar{f}) \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} - \frac{5}{4} \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \right) \right\} \right. \\ \left. - \frac{5}{4} \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} \right] \frac{3}{4R^2} \left\{ \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} + \frac{3}{4} (f' + \bar{f}') \psi_1 - \frac{1}{4} (f + \bar{f}) \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} - \frac{3}{4} (f + \bar{f}) (f' + \bar{f}') \psi_0 \right. \\ \left. + \frac{7}{24} (f + \bar{f}) (f' + \bar{f}') f \bar{f} + \frac{1}{8} (f + \bar{f})^2 \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} - \frac{11}{48} (f + \bar{f})^2 \frac{\partial f \bar{f}}{\partial \alpha} - \frac{5}{48} \frac{\partial f^2 \bar{f}^2}{\partial \alpha} + 5 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{4} f' \bar{f}' \psi_0 \right) \right\} \right] \dots (39)$$

となる。前の場合と同様 (39) に断面を表わす関数を入れれば合成応力の大きさを求めることができる。

4. 円形断面を有するコイルばねの応力

ここに、以上求めた結果を用いて最も簡単な円形断面を有するコイルばねの応力を求めてみよう。(15)において

* であるゆえ、(30), (31) および (32) に任意な断面形を表わす関数を入れることによって新しく基礎式を解かないで応力を計算することができる。

なお応力の値が断面内で極を有する場合はこの方法は有効でなくなるから、かかる場合の吟味をすることが必要である。

次に $\tau_{r\theta}$ と $\tau_{\theta z}$ との合成応力 τ_θ の大きさは

$$\tau_\theta = \sqrt{(\tau_{r\theta})^2 + (\tau_{\theta z})^2} \dots (38)$$

により表わされる。

一方合成応力は $\tau_{r\theta}$ および $\tau_{\theta z}$ によらないで直接求めることもできる。

任意断面コイルばねの合成応力の大きさは

$$f(w) = ke^w, w = \alpha + i\beta \dots (40)$$

とおけば円形断面は α が $-\infty$ から 0 までの範囲で表わされ、周辺は $\alpha = 0$ に対応する半径 k なる円にて表わされる。今前項の方法で応力を求めると

第0次近似にて

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_0 &= -CGke^\alpha \sin \beta, \\ (\tau_{\theta z})_0 &= CGke^\alpha \cos \beta, \end{aligned} \right\} \dots (41)$$

第 1 次近似にて

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_1 &= -CGke^\alpha \sin \beta + \frac{5CGk^2}{8R} e^{2\alpha} \sin 2\beta, \\ (\tau_{\theta z})_1 &= CGke^\alpha \cos \beta - \frac{CG}{8R} \{7k^2 e^{2\alpha} \cos^2 \beta - 3(k^2 e^{2\alpha} \sin^2 \beta - k^2)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

第 2 次近似にて

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_2 &= -CGke^\alpha \sin \beta + \frac{5CGk^2}{8R} e^{2\alpha} \sin 2\beta + \frac{CGk^3}{16R^2} e^\alpha \sin \beta (10 - 5e^{2\alpha} \sin^2 \beta - 27e^{2\alpha} \cos^2 \beta), \\ (\tau_{\theta z})_2 &= CGke^\alpha \cos \beta - \frac{CG}{8R} \{7k^2 e^{2\alpha} \cos^2 \beta - 3(k^2 e^{2\alpha} \sin^2 \beta - k^2)\} + \frac{CGk^3}{16R^2} e^\alpha \cos \beta (4 + 13e^{2\alpha} \cos^2 \beta - 9e^{2\alpha} \sin^2 \beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

がえられる。

ねじりモーメント M_t も同様にして (34), (35) および (36) を用い

$$(M_t)_0 = (M_t)_1 = -\frac{\pi CGk^4}{2} \dots\dots\dots (44)$$

$$\text{および } (M_t)_2 = -\frac{\pi CGk^4}{2} \left(1 + \frac{3}{16} \frac{k^2}{R^2}\right) \dots\dots (45)$$

となる。これらの結果は簡単な置換によって Göhner の結果と完全に一致させることができる。

表面に現われる合成応力の大きさは (39) により第 0 次近似にて

$$(\tau_\theta)_0 = -CGk \dots\dots\dots (46)$$

第 1 次近似にて

$$(\tau_\theta)_1 = -CGk \left(1 - \frac{5k}{4R} \cos \beta\right) \dots\dots\dots (47)$$

第 2 次近似にて

$$\begin{aligned} (\tau_\theta)_2 &= -CGk \left\{ 1 - \frac{5k}{4R} \cos \beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{3k^2}{8R^2} \left(1 + \frac{11}{6} \cos 2\beta\right) \right\} \dots\dots (48) \end{aligned}$$

を得るが、これは円形断面の周辺に切線方向に働くねじり応力の大きさである。

5. 結 言

以上は任意の直交曲線座標で表わされた断面を有す

るコイルばねの応力の一般解を求めたもので、断面を表わす関数を知れば、その断面に対する応力は以上の結果を用いて比較的簡単な計算で求めることができるため、従来取扱われなかったような複雑な断面形を有するコイルばねについても応力解析を行うことができる。また以上の取扱いからも明らかなように第 0 次近似の場合は真直棒のねじりに相当するゆえ、任意断面を有する真直棒のねじりの問題にもこの結果を適用することができる。

終りに臨み、終始御懇切な御指導を賜った東北大学の久保教授に深く感謝致します。

注：—

- (1) 昭和 28 年 11 月 3 日 京阪神臨時大会講演会において講演。原稿受付 昭和 28 年 11 月 17 日。
- (2) 正員、鉄道技術研究所。
- (3) O. Göhner : "Schubspannungsverteilung im Querschnitt einer Schraubeufeder" Ingen. Arch., Bd. 1 (1930) pp. 619~644.
- (4) O. Göhner : "Schubspannungsverteilung im Querschnitt einer gedrehten Ringstabs mit Anwendung auf Schraubeufedern" Ingen. Arch., Bd. 2 (1931) pp. 1~19.
- (5) B. Sen : Calcutta. Math. Soc. Bull., Vol. 29 (1937) p. 99.
- (6) B. Sen : Phil. Mag., Vol. 24 (1937) p. 263.
- (7) H. L. Langhaar : "Torsion of curved beams of rectangular cross section" Journal of Appl. Mech., Vol. 19, No. 1 (1952) p. 49.
- (8) E. Reissner : Quarterly of Appl. Math., Vol. 7 (1949) pp. 342~347.