539.386 : 624.072.2

半無限はりの自由端に近く相対してせん断

応力が作用する場合の応力分布⁽¹⁾山 信 田 隆 四⁽²⁾A Study on the Stress in a Semi-infinite Strip
under the Forces applied at Its End

by Takashi YAMASHIDA

As far as the author's aware, the problem of the stresses in a semi-infinite strip under the forces applied at its end has scarcely been treated. Previously, however, the problem of a semi-infinite strip subjected to the normal compressive forces at its end was studied rather exhaustively by Prof. S. Higuchi.

In this paper, we will treat a problem similar to the problem mentioned above taking shearing forces near the end of strip instead of the normal forces treated by Prof. Higuchi. Solution to this problem is obtained by using the stress function and from the results of numerical calculations of stresses characteristic properties with respect to the distribution of stress were pointed out and discussed.

1. 緒 言

周知のように無限帯の対辺に部分的に力が働いている場合の応力関数は、すでに Howland⁽³⁾ によって求められておるが、本問のような半無限帯の問題に対する解答は比較的少いようである。半無限帯板の端に板に垂直に局所的な等分布荷重が作用する場合については、本研究室の樋口教授が論文⁽⁴⁾ を発表されているが、本論文は法線荷重の代りにせん断力が作用する場合についてその応力分布の状態を数値計算によって明らかにしたものである。棒の一端を固着してこれを引きぬくように引張るという機構は、工場等で日常ありふれた問題であり、その他引張試験、あるいはボルトとナットの関係等もこれに類似するものと考えられるので、この問題を解明することは実際問題としても有意義であると思われる。

2. 解と数値計算

第1図において、半無限帯の板の厚さを $2b$ 、その端面に作用するせん断応力の大きさを p 、幅を a とし、 xy 軸を図のようにとる。この場合に対する境界条件は次の(1)式で与えられる。すなわち、

第 1 図

$$\begin{aligned} y = \pm b : \\ Y_y = 0, X_y = \mp \frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \cdot \sin \alpha a}{\alpha} d\alpha \\ x = 0 : X_x = 0, Y_x = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

さて次の関係を満足する応力関数 χ を導入する。

$$\begin{aligned} \nabla^4 \chi = 0 \\ \left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, Y_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, X_y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

しかして関数 χ として次式のごときものを採用する。

$$\begin{aligned} \chi = \frac{4p}{\pi} \int_0^\infty \frac{y \cosh \alpha b \sinh \alpha y - b \sinh \alpha b \cosh \alpha y}{\alpha(2\alpha b + \sinh 2\alpha b)} \frac{\sin \alpha a}{\alpha} \sin \alpha x d\alpha \\ - \sum_0^\infty \frac{A_n}{\alpha_n} x e^{-\alpha_n x} \cos \alpha_n y - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty f(\alpha) \frac{y \cosh \alpha b \sinh \alpha y - b \sinh \alpha b \cosh \alpha y}{\alpha(2\alpha b + \sinh 2\alpha b)} \sin \alpha x d\alpha \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに $\alpha_n = \frac{(2n+1)}{2b} \pi$ とする. これより応力分値を計算すれば, それぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned}
 X_x &= -\frac{4p}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\alpha b \sinh \alpha b - 2 \cosh \alpha b) \cosh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha b \sinh \alpha y}{2 \alpha b + \sinh 2 \alpha b} \frac{\sin \alpha a}{\alpha} \sin \alpha x d\alpha \\
 &\quad + \sum_0^\infty A_n \alpha_n x e^{-\alpha_n x} \cos \alpha_n y \\
 &\quad + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty f(\alpha) \frac{(\alpha b \sinh \alpha b - 2 \cosh \alpha b) \cosh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha b \sinh \alpha y}{2 \alpha b + \sinh 2 \alpha b} \sin \alpha x d\alpha \\
 Y_y &= -\frac{4p}{\pi} \int_0^\infty \frac{-\alpha b \sinh \alpha b \cosh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha b \sinh \alpha y}{2 \alpha b + \sinh 2 \alpha b} \frac{\sin \alpha a}{\alpha} \sin \alpha x d\alpha \\
 &\quad - \sum_0^\infty (\alpha_n x - 2) A_n e^{-\alpha_n x} \cos \alpha_n y \\
 &\quad + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty f(\alpha) \frac{-\alpha b \sinh \alpha b \cosh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha b \sinh \alpha y}{2 \alpha b + \sinh 2 \alpha b} \sin \alpha x d\alpha \\
 X_y &= -\frac{4p}{\pi} \int_0^\infty \frac{(-\alpha b \sinh \alpha b + \cosh \alpha b) \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha b \cosh \alpha y}{2 \alpha b + \sinh 2 \alpha b} \frac{\sin \alpha a}{\alpha} \cos \alpha x d\alpha \\
 &\quad + \sum_0^\infty (\alpha_n x - 1) A_n e^{-\alpha_n x} \sin \alpha_n y \\
 &\quad + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty f(\alpha) \frac{(-\alpha b \sinh \alpha b + \cosh \alpha b) \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha b \cosh \alpha y}{2 \alpha b + \sinh 2 \alpha b} \cos \alpha x d\alpha
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

したがってこれから境界上における応力として次のものが得られる.

$$\begin{aligned}
 (X_y)_{y=b} &= -\frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \cdot \sin \alpha a}{\alpha} d\alpha - \sum_0^\infty (1 - \alpha_n x) A_n e^{-\alpha_n x} \cdot (-1)^n + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\alpha) \cos \alpha x d\alpha \\
 (X_y)_{x=0} &= -\frac{4p}{\pi} \int_0^\infty \frac{(-\alpha b \sinh \alpha b + \cosh \alpha b) \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha b \cosh \alpha y}{2 \alpha b + \sinh 2 \alpha b} \frac{\sin \alpha a}{\alpha} d\alpha \\
 &\quad - \sum_0^\infty A_n \sin \alpha_n y \\
 &\quad + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty f(\alpha) \frac{(-\alpha b \sinh \alpha b + \cosh \alpha b) \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha b \cosh \alpha y}{2 \alpha b + \sinh 2 \alpha b} d\alpha \\
 (X_x)_{x=0} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

(5) 式と境界条件 (1) 式とを比較することによって次の関係が得られる.

$$\begin{aligned}
 \sum_0^\infty (1 - \alpha_n x) A_n e^{-\alpha_n x} \cdot (-1)^n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\alpha) \cos \alpha x d\alpha \\
 \sum_0^\infty A_n \sin \alpha_n y &= -\frac{4p}{\pi} \int_0^\infty \frac{(-\alpha b \sinh \alpha b + \cosh \alpha b) \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha b \cosh \alpha y}{2 \alpha b + \sinh 2 \alpha b} \frac{\sin \alpha a}{\alpha} d\alpha \\
 &\quad + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty f(\alpha) \frac{(-\alpha b \sinh \alpha b + \cosh \alpha b) \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha b \cosh \alpha y}{2 \alpha b + \sinh 2 \alpha b} d\alpha
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

(6) の第1式を書きかえて

$$\int_0^\infty \left[\sum_0^\infty (-1)^n \cdot A_n \frac{8b(2n+1)(2\alpha b)^2}{[(2\alpha b)^2 + \{(2n+1)\pi\}^2]^2} \right] \cos \alpha x d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\alpha) \cos \alpha x d\alpha$$

これより両辺の $\cos \alpha x$ の係数を比較して

$$f(\alpha) = \sum_0^\infty A_n (-1)^n \frac{4b(2n+1)(2\alpha b)^2 \pi}{[(2\alpha b)^2 + \{(2n+1)\pi\}^2]^2} \tag{7}$$

次に $\alpha \sinh \alpha y$ および $\alpha y \cosh \alpha y$ を $-b \leq y \leq +b$ で $\sin \alpha_n y$ の級数に展開すれば

$$\begin{aligned}
 \sinh \alpha y &= \sum_0^\infty (-1)^n \frac{8 \alpha b \cosh \alpha b}{(2 \alpha b)^2 + \{(2 n+1) \pi\}^2} \cdot \sin \alpha_n y \\
 \alpha y \cosh \alpha y &= \sum_0^\infty (-1)^n 8 \alpha b \left[\frac{\alpha b \sinh \alpha b}{(2 \alpha b)^2 + \{(2 n+1) \pi\}^2} - \frac{[(2 \alpha b)^2 - \{(2 n+1) \pi\}^2]}{[(2 \alpha b)^2 + \{(2 n+1) \pi\}^2]^2} \cosh \alpha b \right] \sin \alpha_n y
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

したがって

$$(-\alpha b \sinh \alpha b + \cosh \alpha b) \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha b \cosh \alpha y \\ = \sum_0^{\infty} n (-1)^n \frac{16 \alpha b \{(2n+1)\pi\}^2 \cosh^2 \alpha b}{[(2\alpha b)^2 + \{(2n+1)\pi\}^2]^2} \cdot \sin \alpha_n y$$

これと (7) 式を (6) の第 2 式に代入することによって次式が得られる。

$$A_n - \sum_0^{\infty} n (-1)^{n+k} A_k \frac{128 b}{\pi} (2k+1) \pi \{(2n+1)\pi\}^2 \\ \times \int_0^{\infty} \frac{(2\alpha b)^3}{[(2\alpha b)^2 + \{(2n+1)\pi\}^2]^2 [(2\alpha b)^2 + \{(2k+1)\pi\}^2]^2} \frac{\cosh^2 \alpha b}{2\alpha b + \sinh 2\alpha b} d\alpha \\ = (-1)^{n+1} \frac{64 pb}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\{(2n+1)\pi\}^2 \cosh^2 \alpha b}{[(2\alpha b)^2 + \{(2n+1)\pi\}^2]^2} \frac{\sin \alpha a}{2\alpha b + \sinh 2\alpha b} d\alpha \dots\dots\dots (9)$$

$$x_{nk} = \frac{128 b}{\pi} \{(2n+1)\pi\}^2 (2k+1) \pi \\ \times \int_0^{\infty} \frac{(2\alpha b)^3}{[(2\alpha b)^2 + \{(2n+1)\pi\}^2]^2 [(2\alpha b)^2 + \{(2k+1)\pi\}^2]^2} \frac{\cosh^2 \alpha b}{2\alpha b + \sinh 2\alpha b} d\alpha \\ \lambda_n = \frac{64 pb}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\{(2n+1)\pi\}^2 \cosh^2 \alpha b}{[(2\alpha b)^2 + \{(2n+1)\pi\}^2]^2} \frac{\sin \alpha a}{2\alpha b + \sinh 2\alpha b} d\alpha \dots\dots\dots (9_1)$$

x_{nk} , λ_n をそれぞれ (9₁) 式のようにおけば (9) 式は

$$A_n - \sum_0^{\infty} k (-1)^{n+k} x_{nk} \cdot A_k = (-1)^{n+1} \cdot \lambda_n \dots\dots\dots (10)$$

(9₁) 式から x_{nk} , λ_n を求め (10) 式によって係数 A_n を決定すれば、応力分布の数値的計算をすることが出来る。本論文における数値計算は $b=1$ とし、 X_x および Y_y について行ったものである。

3. 計算結果および考察

計算結果は第 2 図, 第 3 図, および第 4 図のようになる。この研究によって得られた重要な結果を次に列記する。

第 2 図

(i) 第 2 図は $y=0$, すなわち x 軸上の応力 X_x を荷重の幅 a をかえて計算したものである。これによれば X_x は引張応力で $x=0$ 辺において 0, それより x が増加するにつれて次第に大きくなって荷重端に達し, これをすぎてなお増加し, 遂に一定値 P をとるに至る。この傾向は荷重の幅 a が 2, 3, 4 の場合にもだいたい同じであり, X_x が一定値を示す場所は荷重端から板の厚さにほぼ等しい位置と考えてよい。

(ii) 第 3 図は同じ応力 X_x を荷重の幅 $a=2$ の場合を y を 0.5, および 0.8 としてもとめ, これらと

第 3 図

先に求めた y が 0 の場合の X_x とを比較する目的で書かれたものである。 y が 0, および 0.5 の場合は X_x は同じく $x=0$ 辺から次第に増加して一定値 P に達しているが, y が 0.8 の場合にはこの応力は荷重端に近づけば P よりも大となり, 荷重端付近で最大となってこれをすぎると次第に小となり, ついに P に達するような傾向をしめしている。しかして応力は同じ x に対しては y が 0, 0.5, 0.8 となるにつれて次第に大きくなる。すなわち x 一定の位置に対しては引張応力 X_x は表面に近づくと共に次第に増加し, 表面にきわめて近い位置では荷重端付近においてその局部的引張応力の値が P よりも大となる。なお, $y > 0.8$ の位置に対しては解の級数の収束が非常にわるく, ここではその部分の計算を省略したが, 有限円筒の外側に一定幅のせん断力が本文の場合と同様に作用する三次元問題の Filon の解⁽⁵⁾ をみれば, 表面において X_x は荷重端に近づくにつれて急激に増大し, 荷重端で不連

第 4 図

続となり、これをすぎれば再び急激に減少して一定値 P に達するような傾向を示している。

(iii) 第4図は $y=0$, すなわち x 軸に沿った応力 Y_y の分布状態を、荷重の幅 a が2の場合について計算したものである。図によって明らかなように Y_y は $x=0$ 辺では圧縮応力であるが、 x の増加と共に次第に小さくなり、 $x=1$ の附近で 0 となりそれより符号

を変じて引張応力となって次第に増加し荷重端附近で最大を示し、これをすぎると次第に小となって消失する。

4. 結 語

半無限はりの自由端に近く相対してせん断荷重が作用する場合についてその応力を求め、ストリップの長軸を x , これに垂直なる軸を y ととり、応力 X_x および Y_y の数値計算を行ってその分布状態を明らかにした。しかして特に X_x は表面にきわめて近い場所では、荷重端の近くでその数値が作用するせん断力に等しい応力の値よりも著しく大となることを示した。

注: -

- (1) 昭和28年4月4日 第30期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和29年1月18日。
- (2) 正員、東北大学工学部。
- (3) Roy. Soc. London, Proc., Ser. (A) Vol. 124, p. 89 (1929).
- (4) 東北大学工学報告, 16 卷 1 号, 86 ページ (昭 26)。
- (5) Roy. Soc. London, Phil. Trans. (A) Vol. 198, p. 147 (1902).

539.384.2 : 624.073.112

等分布荷重を受け端を固定した十字はり の上に置かれた周辺固定円板の曲げ⁽¹⁾

関 谷 壮⁽²⁾ 斎 藤 渥⁽³⁾ 肥 田 米 蔵⁽⁴⁾

Bending of a Uniformly Loaded Circular Plate with a Clamped Boundary on a Single-Beam Grid with Clamped Edges

by Tsuyoshi SEKIYA, Atsushi SAITO and Yonezō HIDA

This paper treats the problem of the bending of a uniformly loaded circular plate with a clamped boundary which is supported by a single-beam grid formed of two beams intersecting at the center of the plate at right angles and clamped at edges. The deflection of the plate due to the reaction of the grid can be obtained by the Duhamel's method of superposition from the solution for the unit concentrated load. The reaction can be determined by solving an integral equation expressing that the deflections are equal on the grid for the plate and the grid. Hence superposing the deflections due to the reaction of the grid and the uniform load, we obtain the deflection of the plate, and hence stresses.

1. 緒 言

円板の曲げに関する研究は非常に多い⁽⁶⁾が円板が十字はりの上に置かれた場合の曲げは未だ取扱われていないようである。

本論文ではすべての端を固定された十字はり上に周

辺固定円板が置かれ等分布荷重を受けた場合、この円板のたわみならびに応力を求める一近似解法をのべる。

2. 基 礎 式

円板中心を極とした極座標を考えると原線上の一点