非線型振動系の強制振動に関する安定性の判別について⁽¹⁾山 本 敏 男⁽²⁾

Contribution to the Stability Criterion for Forced Vibrations in Nonlinear Systems

by Toshio YAMAMOTO

In order to carry out a complete discussion of forced vibrations in nonlinear systems, it is obviously important to determine stable and unstable regions.

This paper is mainly concerned with establishment of the general rule of the stability criterion of forced vibrations, for nearly linear but generalized nonlinear systems.

Obtained conclusion is as follows.

1) The boundary lines between a stable and an unstable region are given by the loci of the vertical tangent of the response curve.

2) The region in which $-\frac{\partial(a\varphi_2)}{\partial a} < 0$ is stable, and $-\frac{\partial(a\varphi_2)}{\partial a} > 0$ is unstable, where a is an amplitude of forced vibration, $-\varphi_2$ is the positive or negative damping force.

1. 緒 言

非線型系の強制振動⁽³⁾の安定, 不安定の判定に関しては, たとえば自励系の一つである van der Pol の式においては van der Pol⁽⁴⁾, Andronow と Witt⁽⁵⁾, M. L. Cartwright⁽⁶⁾ の研究があり, また, いわゆる Duffing の方程式においては線型化された変分方程式 (この場合は Mathieu の方程式になる) の解を調べるにより安定, 不安定を論じている⁽⁷⁾. このように個々の特別な場合の判別条件に関する研究は比較的多いが, 一般化された形の非線型系の強制振動に関する議論は少なく, 最近 K. Klotter と E. Pinnery⁽⁸⁾ により, より一般化された判定条件の提示がなされたがこの条件もすべてを言いつくしていない.

本論文は主として Andronow と Witt が van der Pol の式に対して行った方法に副い, 一般化された非線型系の強制振動の安定に関する判別条件を求め, さらにこの条件を簡単な形に書き直し判定条件の一般的な法則を見出すと共に, response curve の決定もまたこの方法で簡単に求め得ることを示し, 容易に振幅-振動数平面上の安定域, 不安定域の決定をなし得ることを議論した.

なお安定不安定の判別条件の力学的意味についても述べ, かつ K. Klotter と E. Pinnery の提示した判別条件との関係についても言及した.

2. 安定⁽⁹⁾に関する判別条件

非線型系の運動方程式

$$\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = F \sin \omega t, \quad F > 0 \dots \dots \dots (1)$$

において, p は線型の場合の自然振動数, $F \sin \omega t$ は $2\pi/\omega$ の周期で変化する外力, $\varepsilon f(x, \dot{x})$ は小さい量であり, $x, \dot{x}$ に関して連続関数で, いわゆる非線型項である. しかし $\dot{x}$ に関する一次の項, すなわち比較的小さな粘性減衰項を含んでいる場合もある. 時刻 $t=0$ の瞬間は $F > 0$ より外力が負の方向から正の方向に移行する瞬間に選んである点に注意すべきである. (1) 式は減衰力と複元力に非線型性が存在する非線型系の一般的な表示である.

(1) 式の解を

$$x = b_1(t) \sin \omega t + b_2(t) \cos \omega t \dots \dots \dots (2)$$

であるとし, 線型の場合は定数である b_1, b_2 はこの場合は時間の関数と考える. (2) から

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= (\dot{b}_1 - \omega b_2) \sin \omega t + (\dot{b}_2 + \omega b_1) \cos \omega t \\ \ddot{x} &= (\ddot{b}_1 - 2\omega \dot{b}_2 - \omega^2 b_1) \sin \omega t \\ &\quad + (\ddot{b}_2 + 2\omega \dot{b}_1 - \omega^2 b_2) \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

を得る. 非線型項 $\varepsilon f(x, \dot{x})$ は小さく, したがって (1) の解は線型系の場合からの相異はわずかであり, $\dot{b}_1, \dot{b}_2$ は ε , $\ddot{b}_1, \ddot{b}_2$ は ε^2 と同程度の小さい量と考える. (2) を $\varepsilon f(x, \dot{x})$ に代入すると

$$\begin{aligned} \varepsilon f(x, \dot{x}) &= \psi_1(b_1, b_2, \omega) \sin \omega t \\ &\quad + \psi_2(b_1, b_2, \omega) \cos \omega t \\ &\quad + c_1(b_1, b_2, \dot{b}_1, \dot{b}_2, \omega) \sin \omega t \\ &\quad + c_2(b_1, b_2, \dot{b}_1, \dot{b}_2, \omega) \cos \omega t + c_3 \end{aligned} \dots \dots \dots (4)$$

の形に置き得る. ここに ψ_1, ψ_2 は ε と同程度, $c_1,$

c_2 は ε^2 と同程度あるいはそれ以下の小さい項で、
 c_3 は $2\pi/\omega$ 以外の周期の項である。すなわち一般に
 $\psi_1 + c_1$, $\psi_2 + c_2$ は

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 + c_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f[(b_1 \sin \theta + b_2 \cos \theta), \{\dot{b}_1 \\ &\quad - \omega b_2\} \sin \theta + (\dot{b}_2 + \omega b_1) \cos \theta] \sin \theta d\theta \\ \psi_2 + c_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f[(b_1 \sin \theta + b_2 \cos \theta), \{\dot{b}_1 \\ &\quad - \omega b_2\} \sin \theta + (\dot{b}_2 + \omega b_1) \cos \theta] \cos \theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

から求められるが、 ψ_1 , ψ_2 はこれらの中で ε と同程度
の大きさのもののみを含む部分で残りの小さい項は
 c_1 , c_2 であらわしたわけである。 ψ_1 , ψ_2 が ε と同
程度の大きさであるなら、 ψ_1 , ψ_2 は $\dot{b}_1$, $\dot{b}_2$ を含むこ
とはない。

(3), (4) を (1) に代入し ε^2 以上の小さい項を
無視し両辺の $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ の係数を等しいと置け
ば

$$\left. \begin{aligned} -2\omega \dot{b}_2 + (p^2 - \omega^2)b_1 + \psi_1 &= F \\ 2\omega \dot{b}_1 + (p^2 - \omega^2)b_2 + \psi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

を得る。定常振動を行っている時は b_1 , b_2 は一定で
 $\dot{b}_1$, $\dot{b}_2$ は零であり、したがってこのような場合 (6)
の第 1, 第 2 式をそれぞれ二乗して加え合やすと

$$(p^2 - \omega^2)^2(b_1^2 + b_2^2) + 2(p^2 - \omega^2)(b_1\psi_1 + b_2\psi_2) + (\psi_1^2 + \psi_2^2) = F^2 \dots\dots\dots (7)$$

を得る。定常振動の振幅を a とすれば明らかに $a^2 = b_1^2 + b_2^2$
であり、(7) は振幅 a と強制力の振動数 ω と
の間の関係を与える共振曲線 (response curve) の式
であるが、式中に b_1 , b_2 を含んでいるので外力と振
動の位相の関係が明らかでないなら (7) から直接共
振曲線は求められずこれを変形せねばならぬ。

次に (6) の第 1, 第 2 式から

$$\frac{db_2/dt}{db_1/dt} = \frac{db_2}{db_1} = \frac{(p^2 - \omega^2)b_1 + \psi_1 - F}{-(p^2 - \omega^2)b_2 - \psi_2} \dots\dots\dots (8)$$

を得る。 $\dot{b}_1$, $\dot{b}_2$ が共に零であれば (8) の分母分子共に
零となり、したがって原方程式 (1) に関する定常振
動の解、すなわち一定振幅を持ち $2\pi/\omega$ の周期をも
つ (1) の周期解は (8) の特異点に対応する。かつ安
定な周期解は安定な特異点に、不安定な周期解は不安
定な特異点に対応するから (8) の特異点の安定、不
安定を論ずれば強制振動の安定、不安定を知り得る。

(6) において $\dot{b}_1 = \dot{b}_2 = 0$ とした時の b_1 , b_2 の値を
それぞれ b_{10} , b_{20} とし、 b_1 , b_2 は b_{10} , b_{20} からわず
かに異なった値

$$b_1 = b_{10} + \xi, \quad b_2 = b_{20} + \eta \dots\dots\dots (9)$$

であるとする

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(b_1, b_2, \omega) &= \psi_1(b_{10}, b_{20}, \omega) + \left(\xi \frac{\partial \psi_1}{\partial b_1} + \eta \frac{\partial \psi_1}{\partial b_2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(\xi \frac{\partial}{\partial b_1} + \eta \frac{\partial}{\partial b_2} \right)^2 \psi_1 + \dots\dots\dots \\ \psi_2(b_1, b_2, \omega) &= \psi_2(b_{10}, b_{20}, \omega) + \left(\xi \frac{\partial \psi_2}{\partial b_1} + \eta \frac{\partial \psi_2}{\partial b_2} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\xi \frac{\partial}{\partial b_1} + \eta \frac{\partial}{\partial b_2} \right)^2 \psi_2 + \dots\dots\dots \dots\dots\dots (10)$$

であるから、これを (8) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{(p^2 - \omega^2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial b_1})\xi + \frac{\partial \psi_1}{\partial b_2}\eta + P}{-\frac{\partial \psi_2}{\partial b_1}\xi - (p^2 - \omega^2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial b_2})\eta + Q} \\ &= \frac{A\xi + B\eta + P}{C\xi + D\eta + Q} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。ここに $\partial \psi_{1,2}/\partial b_{1,2}$ は (b_{10}, b_{20}) 点における
値であり、また

$$\begin{aligned} A &= (p^2 - \omega^2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial b_1}), \quad B = \frac{\partial \psi_1}{\partial b_2}, \quad C = -\frac{\partial \psi_2}{\partial b_1}, \\ D &= -(p^2 - \omega^2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial b_2}) \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

であり、 P , Q は ξ , η に関する高次の項である。

(11) の特異点に関する安定、不安定については
Poincaré が求めており、その結果は⁽¹⁰⁾

$$\text{I) } AD - BC < 0 \text{ なら安定,} \\ AD - BC > 0 \text{ なら不安定} \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{II) } B + C < 0 \text{ なら安定,} \\ B + C > 0 \text{ なら不安定} \dots\dots\dots (14)$$

である。したがって (12) から

$$\begin{aligned} AD - BC &= -(p^2 - \omega^2)^2 - (p^2 - \omega^2) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial b_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial b_2} \right) \\ &\quad - \frac{\partial \psi_1}{\partial b_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial b_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial b_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial b_1} \leq 0 \dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$B + C = \frac{\partial \psi_1}{\partial b_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial b_1} \leq 0 \dots\dots\dots (16)$$

が強制振動の安定、不安定の判定を与える 2 条件で
Andronow と Witt が van der Pol の式の安定、不
安定を論じた方法に副い求めたより一般化された非線
型系の判定式である。

3. 判別条件の一般的表示

強制力をベクトルの的に考えると (1) にて $F > 0$ と
してあり、外力 $F \sin \omega t$ は $t=0$ の時第 1 a 図の $-y$

第 1 図

軸と一致する長さ F ,
角速度 ω のベクトル
 F の x 方向への投影で
あるが時間軸をずらせ
強制振動のベクトルが
 $-y$ 軸と一致する時を

$t=0$ とすると (1) は

$$\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = F_1 \sin \omega t + F_2 \cos \omega t \dots\dots (17)$$

となり、(2) の代りに解の形を

$$x = a \sin \omega t, \quad a > 0 \dots\dots\dots (18)$$

と置けばよいわけである。(1) と (17), (2) と (18)
はただ時刻の取り方を変えただけであるから当然

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2, \quad a^2 = b_1^2 + b_2^2 \dots\dots\dots (19)$$

の関係が成り立つ。 a は前と同様時間の関数であるこ

とを考慮し, (18) を $\varepsilon f(x, \dot{x})$ に代入すれば

$$\varepsilon f(x, \dot{x}) = \varphi_1(a, \omega) \sin \omega t + \varphi_2(a, \omega) \cos \omega t \\ + c_4(a, \dot{a}, \omega) \sin \omega t \\ + c_5(a, \dot{a}, \omega) \cos \omega t + c_6 \dots \dots (20)$$

の形に置き得る。ここに

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + c_4 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f[a \sin \theta, (a \dot{\theta} \cos \theta \\ &\quad + \dot{a} \sin \theta)] \sin \theta d\theta \\ \varphi_2 + c_5 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f[a \sin \theta, (a \dot{\theta} \cos \theta \\ &\quad + \dot{a} \sin \theta)] \cos \theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

であり, c_4, c_5 は ε^2 と同じかそれ以上に小さい量であり c_6 は $2\pi/\omega$ 以外の周期の項である。

(18), (20) を (17) に代入し ε^2 以上の小さい項を無視すると

$$\left. \begin{aligned} (p^2 - \omega^2)a + \varphi_1 &= F_1 \\ 2\dot{a}\omega + \varphi_2 &= F_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

を得る。 $2\dot{a}\omega$ はコリオリの力である。前節で (6) の形に導いたのは直接 (22) から Poincaré の判別条件に結びつけ得ないからで, (6) の形にしてこの点を論じたのである。定常強制振動における共振曲線は (22) において $\dot{a}=0$ として両辺を二乗し加え合わせて求める。すなわち *

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} &= \cos^2 \alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} - \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial \varphi_2}{\partial a} + \frac{1}{a} (\sin^2 \alpha \cdot \varphi_1 + \cos \alpha \sin \alpha \cdot \varphi_2) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} &= \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} - \sin^2 \alpha \frac{\partial \varphi_2}{\partial a} - \frac{1}{a} (\sin \alpha \cos \alpha \cdot \varphi_1 + \cos^2 \alpha \cdot \varphi_2) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_1} &= \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} + \cos^2 \alpha \frac{\partial \varphi_2}{\partial a} + \frac{1}{a} (-\sin \alpha \cos \alpha \cdot \varphi_1 + \sin^2 \alpha \cdot \varphi_2) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_2} &= \sin^2 \alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial \varphi_2}{\partial a} + \frac{1}{a} (\cos^2 \alpha \cdot \varphi_1 - \sin \alpha \cos \alpha \cdot \varphi_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

の関係を得る。これらの関係を用いると (15), (16) は

$$AD - BC = - (p^2 - \omega^2)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial a} + \frac{1}{a} \varphi_1 \right) (p^2 - \omega^2) - \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial a} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \cong 0 \dots \dots \dots (30)$$

$$B + C = - \frac{\partial (a \varphi_2)}{\partial a} = \frac{\partial (-a \varphi_2)}{\partial a} \cong 0 \dots \dots (31)$$

となる。また (29) を用いれば二つの共振曲線の式 (7) と (23) の等しいことも言い得る。

次に共振曲線 (23), すなわち $\Phi - F^2 = 0$ を振幅 a で偏微分すれば

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = -2a \left\{ - (p^2 - \omega^2)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial a} + \frac{1}{a} \varphi_1 \right) (p^2 - \omega^2) - \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial a} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \right\} \\ = -2a(AD - BC) \dots \dots \dots (32)$$

の関係が成り立つことがわかり, したがって安定不安定の限界点においては $\partial \Phi / \partial a = 0$ となることを知る。

4. 判別条件の意味

(23) の共振曲線 $\Phi - F^2 = 0$ を縦軸に振幅 a , 横軸に ω を取った $a-\omega$ 平面上に描けば F をパラメータとした多くの共振曲線が得られるが, この共振曲線

$$* \quad \Phi = \{ (p^2 - \omega^2)a + \varphi_1 \}^2 + \varphi_2^2 = F^2 \dots \dots \dots (23)$$

で与えられる。(23) の共振曲線は実際の計算に際し簡単に求められるが, この実例は後に示す。

(2) を書きかえ

$$x = b_1 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t = a \sin(\omega t + \alpha) \dots (24)$$

の形にする。ここに $\alpha = \tan^{-1} b_2 / b_1$ であり, α はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{F}$ との位相差で

$$b_1 = \cos \alpha \cdot a \quad b_2 = \sin \alpha \cdot a \dots \dots \dots (25)$$

である。(24) を $\varepsilon f(x, \dot{x})$ に代入すれば (20) から

$$\varepsilon f(x, \dot{x}) = \varphi_1 \sin(\omega t + \alpha) + \varphi_2 \cos(\omega t + \alpha) \\ + c_4 \sin(\omega t + \alpha) + c_5 \cos(\omega t + \alpha) + c_6 \\ = (\varphi_1 \cos \alpha - \varphi_2 \sin \alpha) \sin \omega t \\ + (\varphi_1 \sin \alpha + \varphi_2 \cos \alpha) \cos \omega t + \dots \dots \dots (26)$$

となり, (26) と (4) を比較すれば直ちに

$$\psi_1 = \varphi_1 \cos \alpha - \varphi_2 \sin \alpha, \quad \psi_2 = \varphi_1 \sin \alpha + \varphi_2 \cos \alpha \dots \dots \dots (27)$$

の関係をj得る。さらに (25) から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial b_1} &= \cos \alpha \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial a} - \frac{\sin \alpha}{a} \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial b_2} &= \sin \alpha \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial a} + \frac{\cos \alpha}{a} \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial \alpha} \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

となり, (27) を (28) に代入すると

群において, その曲線えの切線が垂直となる点がある場合, このような点を結んで得られる曲線は

$$\left. \begin{aligned} \Phi - F^2 &= 0 \\ \frac{d(\Phi - F^2)}{da} &= \frac{d\Phi}{da} = \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \frac{d\omega}{da} = 0 \end{aligned} \right\}$$

の二式において $d\omega/da=0$ と置いた二つの式から F を消去して得られる式であらわされるがこの場合, このような曲線は取りもなおさず $\partial \Phi / \partial a = 0$ で与えられる。したがって (32) から $AD - BC = 0$ を満足する安定, 不安定の限界は $\partial \Phi / \partial a = 0$ であらわされる共振曲線への切線が垂直となる点を結んだ曲線で示されることがわかる。すなわち安定, 不安定の限界を定める第一の条件 $AD - BC = 0$ は共振曲線上で上記のよきな性質を持った点に対応する。

今パラメータ F を変数として取扱うと (23) から

$$\frac{\partial F^2}{\partial a} = 2F \frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial \Phi}{\partial a} \dots \dots \dots (33)$$

を得る。 F, a は常に正に選らんでいるから (13),

(15), (32), (33) から次のことが言い得る。

$$\left. \begin{aligned} AD-BC < 0 \text{ は } \frac{\partial \Phi}{\partial a} > 0, \frac{\partial F}{\partial a} > 0 \\ \text{に対応し安定,} \\ AD-BC > 0 \text{ は } \frac{\partial \Phi}{\partial a} < 0, \frac{\partial F}{\partial a} < 0 \\ \text{に対応し不安定,} \\ AD-BC = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \\ \text{は安定, 不安定の境界} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

なお, $\partial \Phi / \partial a = 0$, $\partial F / \partial a = 0$ の $a-\omega$ 平面上での幾何学的意味は前述のとおりであり, K. Klotter と E. Pinnery により提示された条件は $\partial a / \partial \Phi > 0$ なら安定, $\partial a / \partial \Phi < 0$ なら不安定であるという条件であり, (34) と比べると互に逆数の関係になっているが, 符号の上からは同じ意味を持っている。しかし判別条件にはもう一つの条件 (16) あるいは (31) がある。

たとえば Duffing の式において共振曲線えの切線が垂直となる点を結んで得られる曲線が安定域, 不安定域の境界線となることを示すのには定常状態からのわずかなずれを仮定し, このずれにより作られる変分方程式である Mathieu の方程式の安定, 不安定を論じ, それから上記の幾何学的性質に結びつけているが, 前述の議論から Duffing の式のみならず一般形の非線型系についてもこの事実が比較的容易に証し得る。

次に判別にに関する第二の条件 (31) の意味を考えてみる。(22) から $\dot{a}=0$ の定常強制振動においては, $\varphi_2 = F_2$ を得る。(17), (18) 両式から F_2 は変位のベクトル $\bar{a}$ と $\pi/2$ 位相を異にする外力の成分であり, その方向は F_2 が正なら $\bar{a}$ より $\pi/2$ 進み, F_2 が負なら $\pi/2$ 遅れている。 $-\varphi_2$ は振動という運動自身のために生じ, かつ運動が停止すれば消失する広い意味での自励力で (正, 負を考えなければ) 定常振動の状態では F_2 とつり合っている力である。 $-\varphi_2$ が負で変位より $\pi/2$ 位相の遅れている時は F_2 は正で $\pi/2$ 位相が変位より進んでおり, この場合は $-\varphi_2$ は系のエネルギーを消費しつつ, F_2 が消費エネルギーを補給する減衰系の場合で力の関係は第 2 a 図のようである。これに反し $-\varphi_2$ が正で変位より位相が $\pi/2$ 進んでいる時は $-\varphi_2$ は自励振動の場合がそうであるが, 系に仕事をし外力 F_2 がエネルギーを消費するブレーキの役

第2図 F_1 とつり合っているのは復元力 $-(p^2 - \omega^2)a - \varphi_1$

割を演じ, 力の関係は第 2 b 図のようになる。

このように振動系の性質を決定する $-\varphi_2$ の符号は原方程式 (1) あるいは (17) の $\varepsilon f(x, \dot{x})$ の形いかににより, 一般には振幅の大きさにより正, 負両符号を取り得る。定常振動を行っている時 $-\varphi_2$ の力により一サイクル中になされる仕事は

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^{2\pi/\omega} -\varphi_2 \cos \omega t dx = \int_0^{2\pi/\omega} -\varphi_2 \cos \omega t \cdot \dot{x} dt \\ &= -\varphi_2 a \omega \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt = -\pi a \varphi_2 \dots\dots (35) \end{aligned}$$

であり, 外力 F_2 による仕事は

$$E_2 = \pi a F_2 \dots\dots\dots (36)$$

である。 E_1 が正なら系にエネルギーを与え, 負なら奪う。(35) と (31) を比べてみると

$$B+C = \frac{1}{\pi} \frac{\partial E_1}{\partial a} = \frac{-1}{\pi} \frac{\partial E_2}{\partial a} \dots\dots\dots (37)$$

となり, したがって

$$\left. \begin{aligned} B+C < 0 \text{ なら } \frac{\partial E_1}{\partial a} < 0 \text{ で安定} \\ B+C > 0 \text{ なら } \frac{\partial E_1}{\partial a} > 0 \text{ で不安定} \end{aligned} \right\} \dots\dots (38)$$

である。すなわち運動をしていることが原因となって系自身に入り込むエネルギー E_1 が振幅 a と共に増加する範囲は不安定領域で, a の増加につれ E_1 の減少する範囲は安定領域であることを意味し両者の限界としての

$$\partial E_1 / \partial a = 0 \dots\dots\dots (39)$$

は $B+C=0$ と同様の意義を持つ。したがってこれが判定の第 2 条件 (31) の持つ力学的意味である。今与えられた振動数 ω に対し E_1 が第 3 図の曲線で示されたとすれば斜線の所は不安定領域で白紙の部分は安定域となり, 交互に安定, 不安定域があらわれる。今もしも φ_2 が ω を含まないなら $B+C=0$ で示され

第3図 斜線部分は不安定, 白紙部分は安定

る安定, 不安定の境界線は振幅 a = 一定の形で与えられ $a-\omega$ 平面上においては横軸 (ω 軸) に平行な直線群によって示される。しかし一般には φ_2 は a と ω の関数であり, したがって境界線もまた曲線となる。

第 3 図において点 A で示される定常振動がかく乱により点 B に移行したとすると点 B に対応する E_1' は点 A の E_1 より大きく, したがって系のエネルギーは増加することとなり, ますま振幅 a は増大し, 運動の状態は A 点からますます遠ざかる。これに反し外部からのかく乱による点 C から点 D への移行においては, $E_1 > E_1'$ であり, 系のエネルギーは点 D では

失う方が外力 F_2 により与えられる分より大きい。ため次第に減少して振幅を減じ、点 C に運動の状態はもどって来る。したがって点 C では安定、点 A では不安定である。

なお (18) において解の形を

$$x = a \cos \omega t$$

と置いた時は $a \sin(\omega t + \pi/2) = a \cos \omega t$ であるから (20) は

$$\begin{aligned} \varepsilon f(x, \dot{x}) &= \varphi_1 \sin(\omega t + \pi/2) \\ &+ \varphi_2 \cos(\omega t + \pi/2) + \dots \\ &= \varphi_1 \cos \omega t - \varphi_2 \sin \omega t + \dots \quad \dots (40) \end{aligned}$$

とすれば全く同じように φ_1, φ_2 を用いればよい。

5. 実 例

たとえば Duffing, van der Pol のよく知られた二つの式において共振曲線、安定不安定域の決定が容易に得られることを示そう。

i) Duffing の方程式

$$\ddot{x} + p^2 x + C\dot{x} + \beta x^3 = F_1 \sin \omega t + F_2 \cos \omega t \quad (41)$$

であるから $\varepsilon f(x, \dot{x}) = C\dot{x} + \beta x^3$ の場合である。ここに C は減衰係数で正の定数、 β は正負両方を取り得る復元力の非線型性をあらわす定数で $p^2 > 0$ である。

$x = a \sin \omega t$ として $\varepsilon f(x, \dot{x})$ に代入すれば直ちに

$$\varphi_1 = \frac{3}{4} \beta a^3, \quad \varphi_2 = C a \omega \quad \dots (42)$$

を得る。(42) をそのまま (23) に入れて

$$\Phi = \left[(p^2 - \omega^2) a + \frac{3}{4} \beta a^3 \right]^2 + C^2 a^2 \omega^2 = F^2 \quad \dots (43)$$

なる共振曲線の式を得る。 $AD - BC = 0$, すなわち $\partial \Phi / \partial a = 0$ の条件は (43) から

$$\left(p^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \beta a^2 \right) \left(p^2 - \omega^2 + \frac{9}{4} \beta a^2 \right) + C^2 \omega^2 = 0 \quad \dots (44)$$

となり、減衰のない $C = 0$ の場合は (44) は

$$\left(p^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \beta a^2 \right) \left(p^2 - \omega^2 + \frac{9}{4} \beta a^2 \right) = 0 \quad \dots (45)$$

となる。(43), (44), (45) は周知の式であり、(44), (45) は共振曲線の切線が垂直となる点を結んだ曲線である。判別の第2条件から

$$B + C = - \frac{\partial(a\varphi_2)}{\partial a} = -2 C a \omega \quad \dots (46)$$

となり、Duffing の式では $B + C > 0$ となる不安定域はない。 $B + C = 0$ は $a = 0$ の直線である。

ii) van der Pol の式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + p_1^2 y - \alpha \frac{dy_1}{dt_1} + \gamma \frac{d}{dt_1} (y^3) \\ = F_1' \sin \omega_1 t + F_2' \cos \omega_1 t \quad \dots (47) \end{aligned}$$

において $a_0^2 = \frac{4\alpha}{3\gamma}$, $\frac{y}{a_0} = x$, $t = \frac{t_1 \alpha}{2}$, $\frac{2p_1}{\alpha} = p$,

$\frac{2\omega_1}{\alpha} = \omega$, $\frac{4F_1'}{a_0 \alpha^2} = F_1$, $\frac{4F_2'}{a_0 \alpha^2} = F_2$ と置いて無次元化すると (47) は

$$\ddot{x} + p^2 x - 2\dot{x} + 8x^3 \cdot \dot{x} = F_1 \sin \omega t + F_2 \cos \omega t \quad \dots (48)$$

となる。 $\varepsilon f(x, \dot{x}) = -2\dot{x} + 8x^2 \cdot \dot{x}$ であるから

$x = a \sin \omega t$ の形に置いて $\varepsilon f(x, \dot{x})$ に入れると

$$\varepsilon f(x, \dot{x}) = 2 a \omega (a^2 - 1) \cos \omega t + \dots$$

となり、

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 2 a \omega (a^2 - 1) \quad \dots (49)$$

を得る。したがって (23) より共振曲線は

$$\begin{aligned} \Phi &= (p^2 - \omega^2) a^2 + 4 a^2 \omega^2 (a^2 - 1)^2 \\ &= a^2 \{ (p^2 - \omega^2) + 4 \omega^2 (a^2 - 1)^2 \} = F^2 \quad \dots (50) \end{aligned}$$

となり van der Pol の求めた結果に一致する。判別の第1条件は (50) から直ちに

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = (p^2 - \omega^2) + 4 \omega^2 (1 - a^2) (1 - 3 a^2) = 0 \quad \dots (51)$$

を得る。第二の条件は (31) から

$$\begin{aligned} B + C &= \frac{\partial(-a\varphi_2)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \{ 2 a^2 \omega (1 - a^2) \} \\ &= 4 a \omega (1 - 2 a^2) \end{aligned}$$

となり、 $B + C = 0$ に対して

$$a^2 = \frac{1}{2} \quad \dots (52)$$

を得る。(51), (52) もよく知られた関係である。この場合は (35) から

$$E_1 = -\pi a \varphi_2 = 2 \pi \omega a^2 (1 - a^2) \quad \dots (53)$$

であるから第4図のよ

うに $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ より左

は不安定、右は安定となるのである。

第 4 図

6. 結 論

一般化された非線型系の強制振動の安定、不安定の判別の条件は二つ存在し、これらは (30), (31) で示され、また共振曲線も容易に (23) から求め得ることを知った。さらに (30), (31) の条件の力学的な意味は第4節に述べたような内容を持っていることを明らかにした。

これらの議論によりこの種の振動に関する安定、不安定の問題がより容易に判定され得ると思われる。

最後に非線型系の問題に対し多くの有益なる御意見を賜った本学古屋善正助教授、村上光清講師、伊藤忠哉氏に深く謝意を表する次第である。

注：—

- (1) 昭和 29 年 3 月 9 日 東海支部第 3 期総会講演会において講演、原稿受付 昭和 29 年 3 月 13 日。
- (2) 正員、名古屋大学工学部。
- (3) ここで言う非線型系の強制振動とは強制力と同じ周期の強制振動の意。
- (4) van der Pol, Phil. Mag; p. 65 (1927).
- (5) J. J. Stoker, Nonlinear Vibrations, p. 159 (1950).
- (6) S. Lefschetz, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, p. 149 (1950).
- (7) 注 (5) の p. 213.
- (8) K. Klotter & E. Pinnery, Appl. Mech., J., Vol. 20, p. 9 (1953).
- (9) ここで言う安定とは Liapounoff の安定の意味である。N. Minorsky, Introduction to Non-linear Mechanics, p. 41 (1947).
- (10) 注 (5) の p. 44.