流体中を進行する一粒の滴または あわ の安定⁽¹⁾

(第2報 解 析)

谷 下 市 松⁽²⁾

Stability of a Fluid Drop or Bubble moving through Fluid Medium

(Second Report, Analysis)

by Ichimatsu TANISHITA

From the experimental results explained in the first report, it may be said that the method of solving the problem of the motion and stability of a fluid drop or bubble moving through any fluid medium, which hold generally, was derived and, as an example, the motion and stability of a mercury drop falling through the air and water were studied.

1. 緒 言

第1報⁽³⁾において流体中を定常的に進行する滴あるいはあわの実験結果について述べたが、これは水中を降下あるいは上昇する合計 11 種の重液並びに軽液のあわ、および以前外国において行われた雨滴に対する実験結果を包含している。これらの結果は必ずしも多数とは言えないかも知れないが、しかし、これらを総合することにより一般的に成立つだいたい法則を発見し得たと思う。したがって流体の物理的性質さえわかっているならば、任意の流体よりなる媒体中を定常的に進行する任意流体の滴あるいはあわの運動および安定の問題を計算で解くことができる。第2報においては問題並びに滴あるいはあわの安定に関して重要な関係ある特性数 φ と抵抗係数 k との関係について報告する。

2. 定常運動を行う滴あるいはあわの運動並びに安定に関する一般法則

密度 γ_a/g なる流体中を終速度 v で進行する全面積 F の滴に作用する抵抗力 P は

$$P = kF\gamma_a v^2/g \quad \dots\dots(1)$$

ただし k は抵抗係数である。もし滴が重力の作用を受けながら鉛直方向に落下あるいは上昇する場合には、抵抗力 P は滴の容積 $V = 4\pi r^3/3$ (r は滴が球形をとると考えたときの半径) に滴および媒体の比重量 γ_b と γ_a との差を乗じたものに等しい。すなわち

$$P = 4\pi r^3(\gamma_b - \gamma_a)/3 \quad \dots\dots(2)$$

ただし、これは重液の場合で、軽液の場合にはこの式の $(\gamma_b - \gamma_a)$ を $(\gamma_a - \gamma_b)$ とすることを要する。なお前面積 F は種々の条件によって変化するから

$$kF = \xi^2 \quad \dots\dots(3)$$

とおけば、式 (1), (2) より

$$\xi = \frac{r^{3/2}}{v} \sqrt{\frac{4\pi g}{3} \cdot \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}} = K \frac{r^{3/2}}{v} \quad \dots\dots(4)$$

ただし K は根号内の値を表わす。

式 (3) において前面積 F は r^2 に比例し、また k は定数であるから、 ξ は r に比例した大きさである。ゆえに ξ および r をそれぞれ縦軸および横軸にとって表わすと、第1報で述べたように、すべての場合に対し第1図のようになる。すなわち、 a より b までは

第 1 図

Stokes の法則が成立つ範囲、それより c までは漸変して、 c より d の範囲では原点をとる直線上に乗り、また d より e までは漸変して、 e より再び1本の直線上に乗る。そして点 d と e とのだいたい中央の点1において最大速度となり、また点2において滴

は分裂を起す。また、これらの 2 本の直線の傾斜 $\psi_1 = \tan \alpha$ および $\psi_2 = \tan \beta$ はすべての流体に対して、だいたい一定値となり、 $\psi_1 \approx 1.03$, $\psi_2 \approx 2.65$ である。更に最大速度の点 1 および分裂を起す点 2 においては無名数の特性値 $\varphi = \gamma_a v^2 r / 2 g T$ の値がすべての場合にだいたい一定となり、 $\varphi_1 \approx 1.3$, $\varphi_2 \approx 2.3$ となる。ただし T は両流体間の表面張力である。なお第 1 の直線に乗っている点 d までの範囲は安定な運動の範囲、それより先は滴に振動を起す準安定な範囲、点 2 においては不安定となって分裂を起す。

以上は実験の結果を要約したものであって、すでに第 1 報に報告した所である。次にこれを基礎にして、任意の場合に対して成立つ計算式を求めよう。ただし第 1 図において Stokes の法則の成立つ範囲は、滴がきわめて微小、かつ低速で行う安定な運動の範囲に属し、いま問題にしているのは主として滴が最大速度になり、更に分裂を起す比較的不安定な運動の範囲であるから、この範囲は無視して必要な式を求めることにしよう。

第 1 図における 2 本の直線の方程式を求めると

$$\text{直線 } OA: \xi = \psi_1 r \approx 1.03 r \quad \cdots (5)$$

$$\text{直線 } AB: \xi = \psi_2 (r - r_0) \approx 2.65 (r - r_0) \quad \cdots (6)$$

ただし r_0 は第 2 の直線が横軸と交る点の r の値である。2 本の直線の水平傾き角はだいたい $\alpha \approx \tan^{-1} 1.03 = 46^\circ$, $\beta \approx \tan^{-1} 2.65 = 69^\circ 20'$ である。また最大速度の点 1 および分裂を起す点 2 においては

$$\text{最大速度の点: } \varphi_1 = \frac{\gamma_a v_1^2 r_1}{2 g T} \approx 1.3 \quad \cdots (7)$$

$$\text{分裂を始める点: } \varphi_2 = \frac{\gamma_a v_2^2 r_2}{2 g T} \approx 2.3 \quad \cdots (8)$$

なお第 1 図において、2 本の直線の交点 A に相当する r_A は最大速度の点 1 に相当する r_1 の 1.02 倍前後であるから

$$r_A = m r_1 \approx 1.02 r_1 \quad \cdots (9)$$

とおく。しかるときは、点 1 および A に対して、式 (4) および (5) より

$$\xi_1 = K r_1^{\frac{3}{2}} / v_1, \quad \xi_A = \psi_1 r_A = \psi_1 m r_1$$

しかるに第 1 図の関係により、 $(\pi - \alpha - \beta) / 2 \approx 32^\circ 20'$ であるから

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_A &= \tan(\pi - \alpha - \beta) / 2 \cdot (r_A - r_1) \\ &\approx 0.633(m - 1) r_1 \end{aligned}$$

$$\therefore \xi_1 = K r_1^{\frac{3}{2}} / v_1 = \psi_1 m r_1 + 0.633(m - 1) r_1$$

したがって最大速度 v_1 は

$$\begin{aligned} v_1 &= K r_1^{\frac{3}{2}} / [\psi_1 m + 0.633(m - 1)] \\ &\approx 1.92 \sqrt{\{g(\gamma_b - \gamma_a) r_1\} / \gamma_a} \quad \cdots (10) \end{aligned}$$

これを式 (7) に代入すれば、最大速度となる滴の半径 r_1 は

$$1.91^2 \cdot \frac{g(\gamma_b - \gamma_a) r_1^2}{\gamma_a} = \frac{2 g T \varphi_1}{\gamma_a}$$

$$\text{あるいは } r_1 = 0.84 \sqrt{T / (\gamma_b - \gamma_a)} \quad \cdots (11)$$

この式を式 (10) に代入すれば最大速度 v_1 が決定す

る。すなわち

$$v_1 = 1.76 \sqrt{g / \gamma_a} \cdot \sqrt[4]{(\gamma_b - \gamma_a) T} \quad \cdots (10)'$$

式 (11) および (10)' より最大速度における滴の半径は両流体の表面張力および比重量の差に関係し、また最大速度はそれらの他に更に媒体となる流体の密度に関係する。

同様にして分裂を起すときの滴の半径 r_2 および速度 v_2 を求めることができる。まず第 1 図の r_0 を r_1 で表わして見よう。それには式 (5) および (6) は点 A においては同時に成立つから

$$\begin{aligned} \xi_A &= \psi_1 r_A = \psi_2 (r_A - r_0) \\ \therefore r_0 &= r_A - \frac{\psi_1}{\psi_2} r_A = \left(1 - \frac{\psi_1}{\psi_2}\right) m r_1 \\ &\approx 0.623 r_1 \quad \cdots (12) \end{aligned}$$

次に分裂を起す点 2 においては、式 (4) および (6) より

$$\begin{aligned} \xi_2 &= K r_2^{\frac{3}{2}} / v_2 = \psi_2 (r_2 - r_0) \\ &= \psi_2 r_2 - (\psi_2 - \psi_1) m r_1 \\ \therefore v_2 &= K \frac{r_2^{\frac{3}{2}}}{\psi_2 r_2 - (\psi_2 - \psi_1) m r_1} \\ &= \sqrt{\frac{4 \pi g}{3} \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a} \frac{r_2^{\frac{3}{2}}}{\psi_2 r_2 - (\psi_2 - \psi_1) m r_1}} \end{aligned}$$

この式を (8) に代入すれば

$$\frac{4 \pi g (\gamma_b - \gamma_a)}{3 \gamma_a} \frac{r_2^{\frac{3}{2}}}{\{\psi_2 r_2 - (\psi_2 - \psi_1) m r_1\}^2} = \frac{2 g T \varphi_2}{\gamma_a}$$

$$\text{あるいは } r_2^2 = \{\psi_2 r_2 - (\psi_2 - \psi_1) m r_1\} \sqrt{\frac{3 \varphi_2}{2 \pi} \cdot \frac{T}{\gamma_b - \gamma_a}}$$

この式の ψ_1 , ψ_2 , φ_2 等にその近似値を代入し、かつ式 (11) を用いると、

$$\begin{aligned} r_2^2 - 2 \times 1.655 r_1 r_2 + 2.062 r_1^2 &= 0 \\ \therefore r_2 &= 2.48 r_1 \approx 2.08 \sqrt{T / (\gamma_b - \gamma_a)} \quad \cdots (13) \end{aligned}$$

これを前式に代入すれば

$$v_2 = 1.03 \sqrt{\{g(\gamma_b - \gamma_a) r_2\} / \gamma_a} \quad \cdots (14)$$

あるいは

$$v_2 = 1.49 \sqrt{g / \gamma_a} \cdot \sqrt[4]{(\gamma_b - \gamma_a) T} \quad \cdots (14)'$$

すなわち分裂を起すときの滴の半径 r_2 および速度 v_2 も T , $\gamma_b - \gamma_a$, γ_a / g により決定される。また式 (13), (10)' および (14)' より

$$r_2 \approx 2.48 r_1, \quad v_2 \approx 0.847 v_1 \quad \cdots (15)$$

すなわち分裂を起すときの滴の半径および速度はそれぞれ最大速度のときの約 2.5 倍 (容積にすれば約 15 倍) および約 0.85 倍になっている。

以上の計算においては近似的に $\varphi_1 \approx 1.3$, $\varphi_2 \approx 2.3$ と置いたが、第 1 報の第 6 図より知られるごとく、レイノルズ数がある値より小さいときには φ_1 および φ_2 の値はこれより小さくなる。また $\varphi_2 \approx 2.65$ としたが、この ψ_2 の値も流体の種類によって若干の変動があることが考えられる。しかし ψ_2 の値の変動は、 φ_1 および φ_2 の変動に比較すれば、無視してさしつかえないくらいである。すべての安定問題の場合と同様

に、この場合にも φ_1 および φ_2 の値に多少の変動を予期せねばならないのは、安定問題に関する限り当然なことと言わねばならない。

滴あるいは あわ の重力の作用の下に流体中を定常運動を行う場合には、今求めた諸式を用いて運動および安定の問題を決定することができる。すなわち最大速度 v_1 およびそのときの滴の半径 r_1 は式 (10) および (11) によって決定され、それ以下の半径 r の滴に対しては式 (5) および (4) より速度 v が決定される。また r_1 より大なる半径 r の滴に対しては式 (12), (6), (4) により速度 v が決定され、かつ分裂を起し始めるときの半径 r_2 および速度 v_2 は式 (13) および (14)' で与えられる。

もし滴の運動が重力の作用によらないで何か他の原因 (たとえばノズルより噴出させる等) によるときは分裂を起す限界は式 (8) で与えられる。ただしこの場合にも、滴は定常運動をなすと仮定してのことである。

3. 雨滴および水銀滴への応用

第2図に Lenard⁽⁴⁾ および Schmidt⁽⁵⁾ の雨滴に対する実験結果を示すが、これは最大速度を少し過ぎた所までしか実験の結果がない。次に雨滴が分裂を起すまでの結果を計算によって求めよう。

実験を行ったときの温度、気圧等は判明しないが、今これを 15°C 、760 mm Hg と仮定すると、空気と水の間の表面張力 $T=0.00747 \text{ kg/m}$ 、空気の比重量 $\gamma_a=1.23 \text{ kg/m}^3$ であるから、最大速度 v_1 およびそのときの滴の半径を式 (11) および (10) によって逆算して見ると

$$r_1=0.23 \text{ cm}, \quad v_1=824 \text{ cm/s}$$

となる。しかるに実験の結果は $r_1=0.25 \text{ cm}$ 、 $v_1=800 \text{ cm/s}$ である。この種の安定に関する問題において実験値との間にこの程度の相違があるのは止むを得ないことである。しかし、この場合には実験値があるのであるから、これを基礎にして計算を進めることにする。式 (12) より $r_0=0.155 \text{ cm}$ 、したがって式 (6) および (4) より

$$\xi=2.65(r-0.155)=1850 r^{3/2}/v[\text{cm}],$$

ただし 1850 は長さの単位で cm で表わしたときの K の値である。この式の r に 0.25 cm より大なる種々の値を代入して速度 v を求めると次のようになる。

$r[\text{cm}]$	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60
$v[\text{cm/s}]$	741	720	712	717	721	729
φ	1.61	1.73	1.91	2.15	2.39	2.66

これより $\varphi=2.3$ となって分裂を起し始めるのは $r_2=0.53 \text{ cm}$ 、 $v_2=719 \text{ cm/s}$ である。この結果は第2図に破線で示す。なおこれは実験値の v_1 および r_1 を基礎にして出した結果であるが、式 (13) および (14) で算出すると $r_2=0.57 \text{ cm}$ 、 $v_2=698 \text{ cm/s}$ となる。いずれにしても雨滴は直径約 1.1 cm 、これに対する終

第 2 図

速度約 7 m/s 以上の大きさにはなり得ないのである。

次に、水銀滴が水中を降下する場合を取扱って見よう。この場合は第1報で述べたように、最初に実験を試みたのであるが、その速度測定を写真で撮影しようとしてかえって失敗し、そのままになっているのである。水銀の比重量 $\gamma_b=13.59 \text{ g/cm}^3$ 、水の比重量 $\gamma_a=1 \text{ g/cm}^3$ 、 25°C における水銀と水との間の表面張力 $T=0.381 \text{ g/cm}$ を用いて、最大速度およびそのときの滴の半径を求めると $v_1=81.8 \text{ cm/s}$ 、 $r_1=0.147 \text{ cm}$ となる。この大きさの滴までは、式 (4) および (5) より

$$\xi=1.03 r=227 r^{3/2}/v$$

の関係によって、種々の r に対する速度 v を求めることができる。また r_1 以上の半径を持った滴に対しては、式 (4), (6) および (12) より

$$\xi=2.65(r-0.0916)=227 r^{3/2}/v$$

の関係によって、 r と v との関係を求めることができる。また分裂を始めるときの滴の半径および速度は式 (13) および (14) より $r_2=0.364 \text{ cm}$ 、 $v_2=69.3 \text{ cm/s}$ となる。この結果を図示すると第3図のようになる。

第 3 図

同様に、空中を降下する水銀滴の場合には、水銀の比重量 $\gamma_b=13.59 \text{ g/cm}^3$ 、空気の比重量 $\gamma_a=0.00123 \text{ g/cm}^3$ 、空気と水銀との間の表面張力 $T=0.497 \text{ g/cm}$ (15° において) であるから、最大速度の点においては

$$r_1=0.161 \text{ cm}, \quad v_1=2530 \text{ cm/s}$$

となる。これより、前と同様にして、最大速度の前後

においては,

$$\xi = 1.03 r = 6.735 r^{3/2} / v$$

$$\xi = 2.65(r - 0.1003) = 6.735 r^{3/2} / v$$

となる。この式より v と r との関係を求めると第 4 図のようになる。なお分裂を起す点は

$$r_2 = 0.399 \text{ cm}, \quad v_2 = 2140 \text{ cm/s}$$

である。

第 4 図

4. 抵抗係数 k と特性数 φ との関係

式 (1) および (3) における抵抗係数 k と特性数 φ との間には一定の関係が存在し、次にこれを求めよう。

滴は最大速度に達するまでは、安定な運動を行い形が扁平になることは第 1 報に述べたようである。したがって滴の前面積 F は変化することはいうまでもないが、今便宜上滴が球形をとるとき前面積 πr^2 を F と置けば

$$k = \xi^2 / \pi r^2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。しかるときは、この抵抗係数は、滴に作用する抵抗力 P を $P = k\pi r^2 \gamma_a v^2 / g$ (式 (1)) と置いたときに起すすべての影響が包含されることになる。しかるときは、第 1 図の直線 OA の部分に対しては式 (5) が成立するから、

$$\text{直線 } OA: k = \xi^2 / \pi r^2 = 1.03^2 / \pi = 0.338 \quad \dots\dots (17)$$

また最大速度となる点 1 (第 1 図) においては、式 (10) の関係を式 (4) に代入すれば

$$k_1 = 0.362 \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。

次に第 1 図の直線 AB の部分に対しては式 (6) が成立するから、抵抗係数は

$$k = \frac{\xi^2}{\pi r^2} = \frac{2.65^2}{\pi} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

しかるに式 (4) より

$$k = \frac{\xi^2}{\pi r^2} = \frac{K}{\pi} \frac{r}{v^2}$$

この関係を特性数 φ に代入すれば

$$\varphi = \frac{\gamma_a v^2 r}{2 g T} = \frac{\gamma_a K}{2 g T k \pi} r^2$$

この関係は点 1 においても成立するから

$$\varphi_1 = 1.3 = \frac{\gamma_a K}{2 g T k_1 \pi} r_1^2$$

この 2 式および式 (12) より

$$\frac{r_0^2}{r^2} = \frac{r_0^2}{r_1^2} \frac{r_1^2}{r^2} = 0.623^2 \times \frac{1.3 k_1}{\varphi k}$$

この関係を式 (19) に代入すれば

$$k = \frac{2.65^2}{\pi} \left(1 - 0.623 \sqrt{\frac{1.3 k_1}{\varphi k}}\right)^2$$

あるいは式 (18) を用いて整理すれば

$$\text{直線 } AB: \varphi^{1/2} = 0.640 / (1.495 k^{1/2} - k) \quad \dots\dots (20)$$

式 (17), (18), (20) の関係を線図に描くと第 5 図のようになる。すなわち抵抗係数 k と特性数 φ とは一定の関係があって、一方が定まれば他方も定まる。こ

第 5 図

の図と第 1 図とを比較すると種々の事柄が明らかになる。すなわち第 1 図の直線 OA に対しては k の値は一定な水平直線となり、また第 1 図の直線 AB には第 5 図では曲線 AB が相当している。また点 1 は最大速度の点、点 2 は分裂を始める点である。

ここで特に注意するのは、最大速度以下の速度では k が一定であることは、滴が球形をなすということではないのである。 k は滴に作用する抵抗力を便宜上式 (1) のように置いたときの係数であって、種々の影響が入っているのである。最大速度に達するまでは種々の影響が消し合って k が一定となるに過ぎない。要するに k が小さければ抵抗が小さいのである。第 5 図を見ればわかるように最大速度の点 1 の附近に達するまでは k は小さな一定の値であるが、最大速度に達して φ が約 1.3 になると k の値は急に上昇する。これは滴が振動を起すために抵抗が急に大なるためである。そして $\varphi = 2.3$, $k = 1.24$ において滴の振動は不安定となり分裂を始めるのである。

5. 結 言

第1報で報告した実験結果より、流体中を定常的に進行する滴あるいはあわに対して一般的に成立つ計算式を作り、一例としてこれを雨滴および水中並びに空中を降下する水銀の滴に対して応用した。また抵抗

係数 k と特性数 φ との関係を求めた。

注：—

- (1) 昭和18年4月4日 第20期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和29年3月19日。
- (2) 正員、慶応義塾大学。
- (3) 本論文集, 521 ページ
- (4) Lenard: Met. Zeit., 1904, S. 253.
- (5) Schmidt: Met. Zeit., 1909, S. 183.

621.43.013 : 621.43.018.4

内燃機関漏れサイクルに関する研究 (その1)⁽¹⁾

喜 多 野 晴 —⁽²⁾

Research on Gas Leakage Cycle of Internal Combustion Engine (Part 1)

by Seichi KITANO

The effects on thermodynamical cycle due to cylinder gas leakage were calculated, and compared with experimental results. This paper involves Otto cycle only.

On gas leakage cycle, general solution was proposed for evaluating end-pressure and residual gas quantity of compression or expansion stroke. On the calculation of cycle, regarding gas leakage as heat loss, gas quantity during a cycle was assumed constant, and also it was assumed that calorific value of combustion gas decreases in proportion to gas leakage during compression stroke. In conclusion difference between leakage cycle and perfect cycle changes for the more according to the increase of leakage area and compression ratio, the decrease of number of revolutions and stroke volume. The results of calculation coincide approximately with experimental results.

1. 緒 言

内燃機関においてシリンダ、ピストン、ピストンリングの摩耗および吸塵気弁が気密でないときは、シリンダ内のガス漏れを生ずる。

ガス漏れがある場合に機関の性能がどの程度低下するかについてはかつて著者はシリンダふたに漏れ穴を取付けて人為的にガス漏れを生ぜしめ、その機関性能に及ぼす影響を実験的に研究した⁽³⁾。

このたびはガス漏れのある場合の理論サイクルを計算によって求め、先の実験結果と比較してみた。この報告においてはオットーサイクルだけを取扱うことにする。

2. 漏れサイクルの解法

漏れサイクルの計算には次の仮定をなした。

(1) ガス漏れは圧縮、膨脹行程のみに起るとした。圧縮終りから最高圧力に達するまでの変化は瞬間的に行われ、その間にガス漏れは起らぬとした。

(2) ガス漏れを伴うサイクルではガス漏れを熱損

失と見なし、サイクルの計算においてはガス量は変らぬものとして取扱った。

2・1 圧縮行程における変化 第1図においてA BCD は漏れの無い完全サイクルであり、A'B'C'D'' は漏れのあるサイクルである。

第 1 図