第 7-1 図 最大たわみの図

第 7-2 図 最大たわみの図

大たわみはほとんど同じ数値を与える。辺長比 $a/2b$ に対する たわみ の最大値を第2表および第7図に示す。

第2表 最大たわみの表

$$w = \alpha \frac{q(2b)^4}{Eh^3} = \alpha' \frac{qa^4}{Eh^3} \quad \nu = 0.3$$

$a/2b$	0.1	0.25	0.5	0.75	1.0
$\alpha_{1\max}$	0.000 1	0.004 3	0.021 5	0.030 2	0.032 2
$\alpha_{1'\max}$	1.367	1.101	0.343 8	0.095 4	0.032 2
$\alpha_{2\max}$	0.000 1	0.003 1	0.015 9	0.023 1	0.025 9
$\alpha_{2'\max}$	1.001	0.806	0.254 5	0.073 0	0.025 9
$\alpha_{3\max}$	0.000 0	0.001 1	0.005 6	0.007 1	0.008 8
$\alpha_{3'\max}$	0.366	0.295	0.089 3	0.022 4	0.008 8

6. 結 語

三辺固定一辺自由な長方形平板に3種類の分布荷重が作用する場合を解くのに Levy の解を重ね合わせる方法を用いた。級数を4項ないし7項用いたので、固定モーメントに対しては、有効数字2けたがきめられたが、支持反力に対しては収れん不十分でしかも級数の項を更に多くとってもほとんど有効でなかった。

注：一

- (1) 昭和29年4月6日 第31期定時総会講演会において講演，原稿受付 昭和29年5月4日。
- (2) 正員，東京工業大学。
- (3) K. Yamada, Proc. 3rd Nat. Congr. Appl. Mech., 1953, p. 35~38, (1954).
- (4) S. Timoshenko, "Theory of Plates and Shells" (1940) p. 125, 215.

539.384.4 : 624.075.4

周辺上に局所的な等分布荷重をうける長方形板の座屈 (第4報)⁽¹⁾

八 卷 昇⁽²⁾

Buckling of a Rectangular Plate under Locally Distributed Forces Applied on the Two Opposite Edges (4th Report)

by Noboru YAMAKI

Continuing the 3rd Report, the buckling problem of a rectangular plate under loads uniformly applied over the central portion of the two opposite edges is investigated theoretically. As the method of analysis, the same procedure as used in the 3rd Report is employed. In this report, the problem is solved for the following two cases where the loaded edges are always clamped and the other edges are simply supported or clamped. In each case above mentioned, the critical values of concentrated forces for rectangular plates with various aspect ratios and those of locally distributed forces applied on a square plate are calculated and the results are tabulated and discussed.

1. 緒 言

この一連の研究の目的は、相対する二辺上の中央部に局部的な等分布荷重の作用する場合の、長方形板の安定性を明らかにするにある。第 1, 2 報⁽³⁾においては、Timoshenko⁽⁴⁾や Sommerfeld⁽⁵⁾にならって長方形板内の応力分布を単純化して近似解を導いたが、この解法によると分布荷重の荷重幅が小となるに従い相当の誤差を伴う。それゆえ第 3 報⁽⁶⁾においては、出来るだけ厳密な解法を用いて荷重辺が単純支持、他の二辺がそれぞれ単純支持、または固定の二場合を研究した。本報は第 3 報と同様な方法を、荷重辺固定、他の二辺がそれぞれ単純支持または固定の二場合に適用し

て得た結果について報告する。

2. 基 礎 式

第 1 図のごとく、相対する二辺上に l なる幅に亘って等分布する圧縮荷重 P が作用する場合の長方形板の座屈問題を考える。今板のたわみを w 、応力を X_x, Y_y, X_y とすると座屈の際の平衡式は

第 1 図

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial Y^4} \right) - h \left(X_x \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + 2 X_y \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial Y} + Y_y \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (1)$$

ただし D は板の曲げ剛性、 h は板厚である。なおこの場合の応力は第 3 報同様次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{2P}{ah} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \xi \left(\frac{n}{\beta}, y \right) \cos n\pi x + B_n \gamma (n\beta, x) \cos n\pi y \right\}, \\ Y_y &= -\frac{P}{ah} + \frac{2P}{ah} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \gamma \left(\frac{n}{\beta}, y \right) \cos n\pi x + B_n \xi (n\beta, x) \cos n\pi y \right\}, \\ X_y &= \frac{2P}{ah} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \zeta \left(\frac{n}{\beta}, y \right) \sin n\pi x + B_n \zeta (n\beta, x) \sin n\pi y \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\text{ここに } x=2X/a, \quad y=2Y/b, \quad \alpha=l/a, \quad \beta=a/b \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi(\gamma, x) &= \frac{(\sinh \gamma\pi - \gamma\pi \cosh \gamma\pi) \cosh \gamma\pi x + \gamma\pi x \sinh \gamma\pi \sinh \gamma\pi x}{\sinh \gamma\pi \cosh \gamma\pi + \gamma\pi}, \\ \gamma(\gamma, x) &= \frac{(\sinh \gamma\pi + \gamma\pi \cosh \gamma\pi) \cosh \gamma\pi x - \gamma\pi x \sinh \gamma\pi \sinh \gamma\pi x}{\sinh \gamma\pi \cosh \gamma\pi + \gamma\pi}, \\ \zeta(\gamma, x) &= \frac{\gamma\pi (x \sinh \gamma\pi \cosh \gamma\pi x - \cosh \gamma\pi \sinh \gamma\pi x)}{\sinh \gamma\pi \cosh \gamma\pi + \gamma\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

なお (2) 式中の係数 A_n, B_n は荷重幅比 α および辺比 β の関数で、次の連立方程式の解として与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_n + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} A_m \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \Phi \left(\frac{m}{\beta}, j \right) \Phi(j\beta, n) &= -\frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi\alpha}, \\ B_j &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} A_n \Phi \left(\frac{n}{\beta}, j \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{ここに } \Phi(\gamma, n) = \frac{4(-1)^n \gamma n^2}{(\gamma^2 + n^2)^2 \pi} \cdot \frac{\sinh^2 \gamma\pi}{\sinh \gamma\pi \cosh \gamma\pi + \gamma\pi} \quad (6)$$

α, β が与えられると応力は (2)~(6) 式によって求まり、座屈値 P は与えられた境界条件を満足する (1) 式の固有値として定まる。(1) 式は直接積分出来ないで Ritz の方法を適用する。すなわち今、板の曲げひずみエネルギーを V 、座屈の際に応力のなす仕事を T とすれば *

$$\begin{aligned} V &= \frac{D}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \right)^2 dX dY \\ &= \frac{2D}{a^2 \beta} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} T &= -\frac{h}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left\{ X_x \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 + 2 X_y \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} + Y_y \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \right)^2 \right\} dX dY \\ &= -\frac{h}{2\beta} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ X_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\beta X_y \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \beta^2 Y_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

となり、問題は $(V-T)$ を極小ならしめることに帰せられる。ここで w を、与えられた境界条件を満足する x, y の関数 $X_r(x), Y_s(y)$ を用いて

$$w = \sum_r \sum_s a_{rs} X_r(x) Y_s(y) \quad (9)$$

のごとく表わし、これを用いて V, T を計算して極小条件

$$\frac{\partial}{\partial a_{rs}} (V-T) = 0 \quad (10)$$

を適用すると、 a_{rs} に関する連立同次方程式が得られ

る。 a_{rs} が恒等的に 0 とならないためには、それらの係数に関する行列式が 0 となるを要する。この行列方程式が求める座屈荷重 P を与える。

3. 荷重辺固定, 他の二辺単純支持の長方形板の座屈

この場合の w に対する境界条件は

$$\left. \begin{aligned} X = \pm \frac{a}{2} : w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} = 0, \\ Y = \pm \frac{b}{2} : w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \right\}$$

あるいは (3) 式の記号を用いて

$$\left. \begin{aligned} x = \pm 1 : w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ y = \pm 1 : w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

$$\begin{aligned} T = & \frac{\pi^2 \beta P}{2a} \sum_r \sum_s s^2 a_{rs}^2 - \frac{\pi^2 P}{16 \beta a} \sum_r \sum_s \sum_p \sum_q a_{rs} a_{pq} \left[\frac{4 \beta^2}{(r-p)^2} A_{r-p} [2 \{ (-1)^{s+1} r^2 q^2 \Psi \left(\frac{r-p}{2\beta}, q \right) \right. \right. \\ & + (-1)^{q+1} s^2 p^2 \Psi \left(\frac{r-p}{2\beta}, s \right) \} + (rq-sp)^2 \Psi \left(\frac{r-p}{2\beta}, s-q \right) + (rq+sp)^2 \Psi \left(\frac{r-p}{2\beta}, s+q \right)] \\ & - \frac{4 \beta^2}{(r+p)^2} A_{r+p} [2 \{ (-1)^{s+1} r^2 q^2 \Psi \left(\frac{r+q}{2\beta}, q \right) + (-1)^{q+1} s^2 p^2 \Psi \left(\frac{r+p}{2\beta}, s \right) \} \\ & + (rq+sp)^2 \Psi \left(\frac{r+p}{2\beta}, s-q \right) + (rq-sp)^2 \Psi \left(\frac{r+p}{2\beta}, s+q \right)] \\ & + 2(-1)^{s+1} r^2 B_q \left\{ \Psi \left(q\beta, \frac{r-p}{2} \right) + \Psi \left(q\beta, \frac{r+p}{2} \right) \right\} \\ & + 2(-1)^{q+1} p^2 B_s \left\{ \Psi \left(s\beta, \frac{r-p}{2} \right) + \Psi \left(s\beta, \frac{r+p}{2} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{(s-q)^2} B_{s-q} \left\{ (rq-sp)^2 \Psi \left(s-q\beta, \frac{r-p}{2} \right) + (rq+sp)^2 \Psi \left(s-q\beta, \frac{r+p}{2} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{(s+q)^2} B_{s+q} \left\{ (rq+sp)^2 \Psi \left(s+q\beta, \frac{r-p}{2} \right) + (rq-sp)^2 \Psi \left(s+q\beta, \frac{r+p}{2} \right) \right\} \Big], \\ & p = 1, 3, 5, \dots, \quad q = 1, 2, 3, \dots. \dots (14) \end{aligned}$$

$$\text{ただし } \Psi(\gamma, n) = \frac{4(-1)^n \gamma^3}{(\gamma^2 + n^2)^2 \pi} \cdot \frac{\sinh \gamma \pi}{\sinh \gamma \pi \cosh \gamma \pi + \gamma \pi} \dots (15)$$

(13) および (14) 式を (10) 式に代入すると、各 a_{rs} に関して次の条件式が得られる。

$$\begin{aligned} \{ (r^2 + 4\beta^2 s^2)^2 Q - 8\beta^2 s^2 \} a_{rs} + 2(-1)^s r^4 Q \sum_q (-1)^q a_{rq} + \sum_p \sum_q a_{pq} \left\{ A_{r-p} \frac{Er-p}{2} + A_{r+p} \frac{Er+p}{2} \right. \\ \left. + B_q F_q + B_s F_s' + B_{s-q} G_{s-q} + B_{s+q} G_{s+q} \right\} = 0, \dots (16) \end{aligned}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_m}{E_m'} &= \frac{\beta^2}{m^2} \left\{ 2(-1)^{s+1} r^2 q^2 \Psi \left(\frac{m}{\beta}, q \right) + 2(-1)^{q+1} s^2 p^2 \Psi \left(\frac{m}{\beta}, s \right) \right. \\ & \quad \left. + (rq+sp)^2 \Psi \left(\frac{m}{\beta}, s-q \right) + (rq-sp)^2 \Psi \left(\frac{m}{\beta}, s+q \right) \right\}, \\ F_m &= 2(-1)^{s+q+1-m} r^2 \left\{ \Psi \left(m\beta, \frac{r-p}{2} \right) + \Psi \left(m\beta, \frac{r+p}{2} \right) \right\}, \\ F_m' &= F_m \text{ において } r \text{ と } p \text{ とを交換した式,} \\ \frac{G_m}{G_m'} &= \frac{1}{m^2} \left\{ (rq+sp)^2 \Psi \left(m\beta, \frac{r-p}{2} \right) + (rq-sp)^2 \Psi \left(m\beta, \frac{r+p}{2} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

$$Q = 2\pi^2 D / aP = 2\pi / \beta \chi, \quad \chi = Pb / \pi D. \dots (18)$$

(16) 式は a_{rs} に関する連立同次方程式を与える。その係数行列式を 0 とおくことにより Q したがって χ

ν は板のポアソン比である。この場合の座屈波形 w は、 x については常に偶関数であるが y については偶関数の場合と奇関数の場合とが考えられるから、そのおのおのに別けて考える。

(a) w が y について偶関数である場合 この場合の w を次のごとく仮定する。

$$\begin{aligned} w = & \sum_r \sum_s a_{rs} \cos \frac{r\pi}{2} x \{ (-1)^{s+1} + \cos s\pi y \}, \\ & r = 1, 3, 5, \dots, \quad s = 1, 2, 3, \dots. \dots (12) \end{aligned}$$

これを (7), (8) 式に代入し、第3報に示した諸関係を考慮すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} V = & \frac{\pi^4 D}{8a^2 \beta} \left[\sum_r \sum_s a_{rs}^2 (r^2 + 4\beta^2 s^2)^2 \right. \\ & \left. + 2 \sum_r r^4 \left\{ \sum_{q=1,2,3} (-1)^q a_{rq} \right\}^2 \right], \dots (13) \end{aligned}$$

が定まる。

以下の数値計算においては、前報同様すべて χ の第4近似値を用いた。一例として、(16) 式において

係数 a_{rs} の中 a_{11} , a_{12} , a_{31} および a_{32} の 4 のみを考慮すると, χ に関する右記の 4 次の行列方程式が得られる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} & a_{32} \\ \varphi_1 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_4 \\ \psi_1 & \varphi_2 & \psi_3 & \psi_5 \\ \psi_2 & \psi_3 & \varphi_3 & \psi_6 \\ \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } \varphi_1 &= \{(1+4\beta^2)^2+2\}Q-8\beta^2+4\beta^2A_1\left\{\Psi\left(\frac{1}{\beta}, 0\right)+\Psi\left(\frac{1}{\beta}, 1\right)\right\} \\ &\quad +4B_1\{\Psi(\beta, 0)+\Psi(\beta, 1)\}+B_2\Psi(2\beta, 0), \\ \varphi_2 &= \{(1+16\beta^2)^2+2\}Q-32\beta^2+16\beta^2A_1\left\{\Psi\left(\frac{1}{\beta}, 0\right)-\Psi\left(\frac{1}{\beta}, 2\right)\right\} \\ &\quad -4B_2\{\Psi(2\beta, 0)+\Psi(2\beta, 1)\}+B_4\Psi(4\beta, 0), \\ &\vdots \\ \psi_1 &= -2Q+\beta^2A_1\left\{7\Psi\left(\frac{1}{\beta}, 1\right)+8\Psi\left(\frac{1}{\beta}, 2\right)+\Psi\left(\frac{1}{\beta}, 3\right)\right\}+B_1\{-\Psi(\beta, 0)+7\Psi(\beta, 1)\} \\ &\quad +2B_2\{\Psi(2\beta, 0)+\Psi(2\beta, 1)\}+B_3\left\{\Psi(3\beta, 0)+\frac{1}{9}\Psi(3\beta, 1)\right\}, \\ \varphi_2 &= 4\beta^2A_1\left\{\Psi\left(\frac{1}{\beta}, 0\right)+5\Psi\left(\frac{1}{\beta}, 1\right)+4\Psi\left(\frac{1}{\beta}, 2\right)\right\}+\beta^2A_2\left\{4\Psi\left(\frac{2}{\beta}, 0\right)\right. \\ &\quad \left.+5\Psi\left(\frac{2}{\beta}, 1\right)+\Psi\left(\frac{2}{\beta}, 2\right)\right\}+20B_1\{\Psi(\beta, 1)+\Psi(\beta, 2)\}+B_2\{4\Psi(2\beta, 1)+\Psi(2\beta, 2)\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

荷重幅比 α および辺比 β が与えられると, 係数 A_n , B_n は (5) 式により定まるから (19) 式で未知数は Q しかたがって χ のみとなる. ゆえに試案法により χ が定まる. なお a_{rs} に関する 4 個の係数は χ の値が最小となるごとく選ぶものとする.

*場合の座屈波形を次のごとく仮定する.

$$w = \sum_r \sum_s a_{rs} \cos \frac{r\pi}{2} x \{(-1)^s s \sin \pi y + \sin s\pi y\},$$

$$r=1, 3, 5, \dots, \quad s=2, 3, 4, \dots \dots\dots (20)$$

この式を用い, 前と同様にして, 次の座屈条件式をう

(b) w が y について奇関数である場合

この* する.

$$\begin{aligned} &\{(r^2+4\beta^2s^2)^2Q-8\beta^2s^2\}a_{rs}+(-1)^s s(r^2+4\beta^2)^2Q \sum_q (-1)^q q a_{rq} \\ &+ \sum_p \sum_q a_{pq} \{8(-1)^{s+q+1}\beta^2sq + \frac{Ar \sim p}{2} H_{r \sim p} + \frac{Ar+p}{2} H'_{r+p} + B_2 I_2 \\ &+ B_{q-1} J_{q-1} - B_{q+1} J'_{q+1} + B_{s-1} K_{s-1} - B_{s+1} K'_{s+1} + B_{s-q} G_{s-q} - B_{s+q} G'_{s+q}\} = 0, \\ &p=1, 3, 5, \dots, \quad q=2, 3, 4, \dots \dots\dots (21) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \frac{H_m}{H_m'} &= \frac{\beta^2}{m^2} \left[(-1)^{s+q} sq \left\{ (r \mp p)^2 \Psi\left(\frac{m}{\beta}, 0\right) - (r \pm p)^2 \Psi\left(\frac{m}{\beta}, 2\right) \right\} + (-1)^s s \left\{ (p \mp rq)^2 \Psi\left(\frac{m}{\beta}, q-1\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (p \pm rq)^2 \Psi\left(\frac{m}{\beta}, q+1\right) \right\} + (-1)^q q \left\{ (r \mp sp)^2 \Psi\left(\frac{m}{\beta}, s-1\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (r \pm sp)^2 \Psi\left(\frac{m}{\beta}, s+1\right) \right\} + (rq \mp sp)^2 \Psi\left(\frac{m}{\beta}, s-q\right) - (rq \pm sp)^2 \Psi\left(\frac{m}{\beta}, s+q\right) \right], \\ I_m &= (-1)^{s+q+1} \frac{sq}{4} \left\{ (r+p)^2 \Psi\left(m\beta, \frac{r-p}{2}\right) + (r-p)^2 \Psi\left(m\beta, \frac{r+p}{2}\right) \right\}, \\ \frac{J_m}{J_m'} &= (-1)^s \frac{s}{m^2} \left\{ (p \mp rq)^2 \Psi\left(m\beta, \frac{r-p}{2}\right) + (p \pm rq)^2 \Psi\left(m\beta, \frac{r+p}{2}\right) \right\}, \\ \frac{K_m}{K_m'} &= (-1)^q \frac{q}{m^2} \left\{ (r \mp sp)^2 \Psi\left(m\beta, \frac{r-p}{2}\right) + (r \pm sp)^2 \Psi\left(m\beta, \frac{r+p}{2}\right) \right\}. \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

(21) 式によって, 前と同様にして χ を定めることが出来る.

(c) 計算結果 最初に集中荷重をうける長方形板の安定性について考える. この場合の種々の β に対応する A_n , B_n の値は既に第 3 報で報告した. 計算

結果を第 1 報の近似解と共に第 1 表および第 2 図に示す. なお第 1 表には χ の計算に用いた a_{rs} の値も併せ示した. 近似解では座屈荷重が相当低く出ていることがわかる.

第1表 集中力に対する χ の値
($\alpha \rightarrow 0, \beta = 0.5 \sim 3$)

β	0.5	0.75	1	1.5	2	3
a_{rs}	$a_{12} a_{32} a_{13} a_{14}$					
χ	28.3	22.3				
a_{rs}	$a_{11} a_{12} a_{31} a_{32}$				$a_{11} a_{12} a_{31} a_{51}$	
χ	32.1	21.1	15.1	12.9	13.0	13.1
第1報	14.6	11.1	9.6	9.3	9.3	9.4

この場合の座屈波形の一例を次に示す。

$$\beta = 0.5 : w = c \left\{ \left(\cos \frac{\pi}{2} x + 0.053 \cos \frac{3\pi}{2} x \right) (2 \sin \pi y + \sin 2\pi y) \right. \\ \left. + \cos \frac{\pi}{2} x (1.168 \sin \pi y - 0.276 \sin 3\pi y + 0.085 \sin 4\pi y) \right\},$$

$$\beta = 1 : w = c \left\{ \left(\cos \frac{\pi}{2} x + 0.019 \cos \frac{3\pi}{2} x \right) (1 + \cos \pi y) + \left(-0.003 \cos \frac{\pi}{2} x \right. \right. \\ \left. \left. + 0.018 \cos \frac{3\pi}{2} x \right) (-1 + \cos 2\pi y) \right\},$$

$$\beta = 2 : w = c \left\{ \left(\cos \frac{\pi}{2} x + 0.253 \cos \frac{3\pi}{2} x + 0.021 \cos \frac{5\pi}{2} x \right) (1 + \cos \pi y) \right. \\ \left. - 0.007 \cos \frac{\pi}{2} x (-1 + \cos 2\pi y) \right\}.$$

c は定数である。これを図示すると第3図をうる。

次に正方形板に局所的な分布荷重の作用する場合の安定性について考える。この場合の A_n, B_n の値は既に報告した。計算結果を第2表に示す。前報の結果は、荷重幅の小となるに従い相当の誤差を含むことがわかる。

第2表 分布荷重に対する χ の値
($\alpha = 0 \sim 1, \beta = 1$)

α	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
a_{rs}	$a_{11} a_{12} a_{31} a_{32}$					
χ	15.1	15.4	16.4	17.8	19.5	21.2
第1報	9.6	10.3	11.8	14.0	17.2	21.2

4. 全周辺固定の長方形板の座屈 *

$$\{4Q(r^2 + \beta^2 s^2) - 2\beta^2 s^2\} a_{rs} + 8(-1)^s r^4 Q \sum_q (-1)^q a_{rq} \\ + 4(-1)^r \beta^2 s^2 (2\beta^2 s^2 Q - 1) \sum_p (-1)^p a_{ps} + \sum_p \sum_q a_{pq} \{A_r L_r + A_p L_p' \\ + A_{r-p} E_{r-p} + A_{r+p} E'_{r+p} + B_s M_s + B_q M_q' + B_{s-q} N_{s-q} + B_{s+q} N'_{s+q}\} = 0, \\ p, q = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (25)$$

$$\text{ただし } L_m = 2(-1)^{p+r+1-m} \beta^2 \left\{ 2(-1)^{s+1} \Psi\left(\frac{m}{\beta}, q\right) + \Psi\left(\frac{m}{\beta}, s-q\right) + \Psi\left(\frac{m}{\beta}, s+q\right) \right\},$$

第2図

第3図

* この場合の w に対する境界条件は

$$\left. \begin{aligned} x = \pm 1 : w = 0, \quad \partial w / \partial x = 0, \\ y = \pm 1 : w = 0, \quad \partial w / \partial y = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (23)$$

前と同様二つの場合に分けて考える。

(a) w が y について偶関数である場合 座屈波形を次のごとく仮定する。

$$w = \sum_r \sum_s a_{rs} \{(-1)^{r+1} + \cos r\pi x\} \{(-1)^{s+1} + \cos s\pi y\}, \\ r, s = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (24)$$

これを用いて、前と同様にして、次の座屈条件式をうる。

$L_m' = L_m$ において s と q とを交換した式,

$$M_m = 2(-)^{s+q+1-m} p^2 \{ 2(-)^{r+1} \Psi(m\beta, p) + \Psi(m\beta, r-p) + \Psi(m\beta, r+p) \},$$

$M_m' = M_m$ において r と p とを交換した式,

$$\frac{N_m}{N_m'} = \frac{1}{m^2} \{ 2(-)^{p+1} r^2 q^2 \Psi(m\beta, r) + 2(-)^{r+1} s^2 p^2 \Psi(m\beta, p) + (rq \mp sp)^2 \Psi(m\beta, r-p) + (rq \pm sp)^2 \Psi(m\beta, r+p) \}. \quad (26)$$

(b) w が y について奇関数である場合 w を次のごとく仮定する.

$$w = \sum_r \sum_s a_{rs} \{ (-)^{r+1} + \cos r\pi x \} \{ (-)^s s \sin \pi y + \sin s\pi y \},$$

$$r = 1, 2, 3, \dots, \quad s = 2, 3, 4, \dots. \quad (27)$$

これから次の座屈条件式が得られる.

$$\{ 4(r^2 + \beta^2 s^2)^2 Q - 2\beta^2 s^2 \} a_{rs} + 2(-)^s s \{ 2(r^2 + \beta^2)^2 Q - \beta^2 \} \sum_q (-)^q q a_{rq}$$

$$+ 4(-)^r \beta^2 s^2 \{ 2\beta^2 s^2 Q - 1 \} \sum_p (-)^p a_{ps} + \sum_p \sum_q a_{pq} \{ 4(-)^{r+s+p+q} \beta^2 s q (2\beta^2 Q - 1)$$

$$+ A_r R_r + A_p R_p' + A_{r-p} H_{r-p} + A_{r+p} H_{r+p}' + B_s S_s$$

$$+ B_{s-1} U_{s-1} - B_{s+1} U_{s+1} + B_{q-1} V_{q-1} - B_{q+1} V_{q+1} + B_{s-q} N_{s-q} - B_{s+q} N_{s+q}' \} = 0,$$

$$p = 1, 2, 3, \dots, \quad q = 2, 3, 4, \dots. \quad (28)$$

ただし

$$R_m = 2(-)^{p+r+1-m} q \beta^2 \left[(-)^s s q \left\{ \Psi\left(\frac{m}{\beta}, q-1\right) - \Psi\left(\frac{m}{\beta}, q+1\right) \right\} + (-)^q \left\{ \Psi\left(\frac{m}{\beta}, s-1\right) - \Psi\left(\frac{m}{\beta}, s+1\right) \right\} + (-)^{s+q} s \left\{ \Psi\left(\frac{m}{\beta}, 0\right) - \Psi\left(\frac{m}{\beta}, 2\right) \right\} + q \left\{ \Psi\left(\frac{m}{\beta}, s-q\right) - \Psi\left(\frac{m}{\beta}, s+q\right) \right\} \right],$$

$R_m' = R_m$ において s と q とを交換した式,

$$S_m = (-)^{s+q+1} \frac{sq}{4} \{ 2(-)^{p+1} r^2 \Psi(m\beta, r) + 2(-)^{r+1} p^2 \Psi(m\beta, p) + (r+p)^2 \Psi(m\beta, r-p) + (r-p)^2 \Psi(m\beta, r+p) \},$$

$$\frac{U_m}{U_m'} = (-)^q \cdot \frac{q}{m^2} \{ 2(-)^{p+1} r^2 \Psi(m\beta, r) + 2(-)^{r+1} s^2 p^2 \Psi(m\beta, p) + (r \mp sp)^2 \Psi(m\beta, r-p) + (r \pm sp)^2 \Psi(m\beta, r+p) \},$$

$$\frac{V_m}{V_m'} = (-)^s \cdot \frac{s}{m^2} \{ 2(-)^{r+1} p^2 \Psi(m\beta, p) + 2(-)^{p+1} r^2 q^2 \Psi(m\beta, r) + (p \mp rq)^2 \Psi(m\beta, r-p) + (p \pm rq)^2 \Psi(m\beta, r+p) \}. \quad (29)$$

(25) または (28) 式から χ を定める方法は前と同様である.

(c) 計算結果 集中荷重をうける長方形板に対する χ の値 (第4近似値) を第3表および第4図に示す. 比較のため第1報の結果も併せ示した.

第3表 集中力に対する χ の値
($\alpha \rightarrow 0, \beta = 0.5 \sim 3$)

β	0.5	0.75	1	1.5	2	3
a_{rs}	$a_{12} \ a_{13} \ a_{22} \ a_{14}$					
χ	50.3	27.8	22.9			
a_{rs}	$a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{22}$	$a_{11} \ a_{12}$	$a_{21} \ a_{22}$	$a_{11} \ a_{12} \ a_{21} \ a_{31}$		
χ	42.1	32.1	22.4	13.9	13.1	13.1
第1報	19.3	14.0	12.2	9.6	9.4	9.4

なおこの場合の座屈波形は次式で与えられる.

$$\beta = 0.5: w = c \{ (1 + \cos \pi x) (0.692 + 0.918 \cos \pi y - 0.226 \cos 3\pi y) + (1.025 + \cos \pi x - 0.025 \cos 2\pi x) (-1 + \cos 2\pi y) \},$$

$$\beta = 0.75: w = c \{ (1.074 + \cos \pi x - 0.074 \cos 2\pi x) (2 \sin \pi y + \sin 2\pi y) \}$$

第 4 図

$$\begin{aligned}
 & + (1 + \cos \pi x) (1.163 \sin \pi y - 0.277 \sin 3\pi y + 0.083 \sin 4\pi y) \}, \\
 \beta = 1 & : w = c \{ (1.055 + \cos \pi x - 0.055 \cos 2\pi x) (1 + \cos \pi y) \\
 & + (0.068 + 0.098 \cos \pi x + 0.030 \cos 2\pi x) (-1 + \cos 2\pi y) \}, \\
 \beta = 2 & : w = c \{ (0.880 + \cos \pi x + 0.120 \cos 2\pi x) (1 + \cos \pi y) \\
 & + (-0.007 + 0.007 \cos \pi x + 0.014 \cos 2\pi x) (-1 + \cos 2\pi y) \}.
 \end{aligned}$$

第 5 図

これを図示すると第5図をうる。

ここで第3報および本報の結果から集中荷重をうける長方形板の安定性を総括して見よう。第6図は各種の境界条件に対応する χ と β との関係を示したものである。図において、I：全周辺固定，II：荷重辺固定，他の二辺単純支持，III：荷重辺単純支持，他の二辺固定，IV：全周辺単純支持を示す。この図から， β

第 6 図

が増大すると共に χ は，荷重辺固定の場合には 13.0，単純支持の場合には 4.59 に漸近することがわかる⁽⁷⁾。また一様分布荷重，すなわち $\alpha=1$ の場合の既知の結果⁽⁸⁾と比較することにより，荷重方向の半波数は，主として β により定まり， α にはほとんど無関係であることがわかる。

局所的な分布荷重をうける正方形板に対する χ の値を第4表に示す。

さて局所的な分布荷重に対する今までの結果を総合して， β が一定の場合には座屈荷重 χ と荷重幅比 α とは割合簡単な関係にあることがわかる。しかるに種

第4表 分布荷重に対する χ の値 ($\alpha=0 \sim 1$, $\beta=1$)

α	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
a_{rs}	a_{11} a_{12} a_{21} a_{22}					
χ	22.4	23.0	24.8	27.1	29.7	32.1
第1報	12.2	13.3	16.0	20.3	26.0	32.5

々の β の値に対して， $\alpha=1$ の場合の χ の値は既に知られており， $\alpha \rightarrow 0$ の場合の値はこの一連の研究で明らかとなったから， α , β の任意の値に対する χ の値が推定できることとなる。すなわち局所的な分布荷重による長方形板の安定性の全貌を明らかにすることが出来た。

5. 結 論

荷重辺が固定で，他の二辺がそれぞれ単純支持または固定の長方形板の局部荷重による座屈問題を第3報と同様の方法で解析し，その特性を明らかにすると共に，第1報の近似解と比較検討した。

終りに本研究に対し御指導を賜った樋口盛一教授に衷心より感謝の意を表する。

注：一

- (1) 昭和29年4月6日 第31期定時総会講演会において講演，原稿受付 昭和29年8月2日。
- (2) 正員，東北大学高速力学研究所。
- (3) 筆者，機械学会論文集，19巻83号，65ページ，73ページ(1953)。
- (4) S. Timoshenko, Z. f. Math. u. Phys., Bd. 58, S. 357 (1910)。
- (5) A. Sommerfeld, ditto, Bd. 54, S. 113 (1907)。
- (6) 筆者，機械学会論文集，20巻91号，174ページ(1954)。
- (7) Leggett (Camb. Phil. Soc., Proc., Vol. 33, p.325) は荷重辺単純支持の場合 $\beta=\infty$ に対して $\chi=4.57 \pm 0.5\%$ と推定，また Timoshenko (Theory of Elastic Stability, p. 367) によると荷重辺固定の場合 $\chi=8$ ，単純支持の場合 $\chi=4$ である。
- (8) たとえば，倉西，弾性学，442ページ(1948)；A. Pflüger, Stabilitätsprobleme, S. 306 (1950)。