が成立することがわかる。

4. 結 語

ここにおいて、われわれは結論として、圧縮性流体の翼列においては、無限前方と後方の平均流を考え、密度として平均流の密度をとるならば、十分近似的に非圧縮性流体の翼列理論におけるごとく Kutta-Joukowski の定理が成立することを知った。更に詳しく言えば、軸流圧縮機に用いられる翼列のように、そり、厚みの小さい、薄翼から成る翼列ではそり、厚みを高々 $O(\epsilon)$ の量とすれば少くとも $O(\epsilon^3)$ を省略した程度の近似で、揚力は平均流に直角に働き $L = \rho_\infty w_\infty \Gamma$ であることを導くことが出来た。

圧縮性流体が翼列をよぎる流れを解析するとき翼が薄い場合には薄翼展開法を応用することができるが、実際には高々 ϵ について第2近似まで、すなわち $O(\epsilon^2)$ の程度まで正しい解を求めることができれば十分であろうと思われる。したがって上に述べた結果は今後行

われようとする解析の程度では十分な基礎を与えるものではあるが、果して更に高い近似の程度においてどのような関係が成立するかという問題については今後の研究にまたなければならない。

注：—

- (1) 昭和 27 年 10 月 18 日 水力学および水力機械に関する講演会において講演。「圧縮性流体の翼列理論に関する研究 第4報」原稿受付 昭和 29 年 3 月 31 日。
- (2) 正員、慶応義塾大学工学部。
- (3) たとえば Weinig: Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen (1935)。
- (4) 今井功: 数理物理学研究, 第2輯 岩波書店 (1952)。
- (5) 山内正男氏は運輸技研報告, 1 巻 2 号 (1951) において厚みを省略した翼の翼列についてこの問題を論じている。
- (6) L.G. Loitsianski: Generalization of Joukowski Formula to an Airfoil of a Cascade in Compressible Gas Stream with Subsonic Velocities. Prikladnaia Matematika i Mekhanika, Vol XIII, No. 2, 1949, なる文献において密度を $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ にとって近似的な関係式が求められている由であるが著者は未見である。

533.691.11

任意翼型の直線翼列の写像理論 (その2)⁽¹⁾

笠 原 英 司⁽²⁾

A Mapping Theory of Straight Cascade of Arbitrary Blade Sections (II)

by Eiji KASAHARA

In this paper the theory developed in the previous report is considerably simplified by using approximate boundary conditions of the same degree with the mapping function. These boundary conditions are able to determine explicitly necessary parameters involved in the mapping function. Thus the solution of 1st. approximation can be obtained in an explicit form. The successive approximation, if necessary, can be carried out to reach results with desired accuracy. Numerical computations are made to cascades of NACA 4412 and Clark Y 6%.

1. 緒 言

前報⁽³⁾において述べたことは任意の翼型の翼列に対して成立する一般論で、必ずしも従来の理論にしばしば見られるような、薄翼の翼列に限られるものではない。しかしながら軸流送風機または圧縮機に用いられる翼型のように、そり、厚みが小さく、かつ節弦比が小さくないような、いわゆる“薄翼”の翼列に対しては前報の所論ははなはだ簡単となる。

このような場合は、一般に解の収束がきわめてすみやかであるため、従来のように平板翼列を第0近似にとった第1近似の写像関数でも実用上十分な精度で与

えられた翼列を単位円に写像しうることがある。またたとえ第1近似では十分でないときでも、高々1, 2回近似をすすめれば満足すべき結果が得られるものである。

前報の理論では逐次近似の方法によって厳密な写像関数に到達する方法を述べたのであるが、その際逐次近似の各段階において境界条件はそのたびごとに厳密にこれを満足せしめたのである。そのため写像関数に含まれる必要なパラメータを決定するためには、超越連立方程式を解かねばならず、一般にははなはだ面倒な計算を要求されることが起る。

ひるがえって逐次近似の方式を仔細に検討すると、

解が収束しないうちは、各近似の段階において写像関数には常に高次の微小量の誤差が含まれている。したがって境界条件にも写像関数と同程度の誤差が入るようにしたとしても必ずしも不合理とは言えないであろう。むしろこのようにして逐次近似をすすめることによって計算上の簡便さが得られるとすれば償ってなお余りあるものと言える。

本報においては前報の厳密な境界条件を高次の微小量を省略した近似的な境界条件をもって代用することにより、超越連立方程式を解くことなく、連立代数一次方程式を解いて写像関数に含まれる必要なパラメータを直接に決定しうることを示して第1近似の写像関数を求めた。しかしてここに得られた結果は従来のものと異なった新しいものであって簡単でかつ精度の高いものであり更に近似をたかめるのに便利な形をもっている。なお逐次近似を行う際の手続きと境界条件を定めるのに必要な連立一次方程式を示しておいた。

2. “薄翼”に対する写像関数(第1近似)

今第1図に示すように翼列配置が t, β の任意に与えられた翼型の翼列を考える。しかして翼型は、その厚みが小さくて平板よりのかたよりがすべて $O(\epsilon)$ の程度のものと仮定する。

前報の記号を用いれば、まずこの翼列の翼型は ϑ をパラメータとして幾何学的に

$$\left. \begin{aligned} \xi_P(\vartheta) &= \frac{t}{\pi} \left\{ \cos \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\cos(\vartheta - \alpha_0)}{\cosh x_0} \right. \\ &\quad \left. + \sin \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\sin(\vartheta - \alpha_0)}{\sinh x_0} \right\} \\ \eta_P(\vartheta) &= h(\vartheta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

のように表わすことが出来る。ここで ϑ はその翼弦に相当する平板の翼列と単位円 $e^{i\vartheta}$ との対応を示すパラメータであり、 $\pm e^{\pm i\alpha_0}$ は相当平板翼列を単位円に写像する際の特異点であり、 $h(\vartheta)$ はフーリエ級数に展開できて

$$h(\vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) \quad \dots (2.2)$$

となるものとする。

x_0, α_0 は境界条件によって決定される。すなわち後縁、前縁の条件として

$$\left. \begin{aligned} \text{後縁において } \vartheta=0 \quad \xi_P(0) &= \frac{1}{2}, \quad \xi_P'(0)=0 \\ \text{前縁において } \vartheta=\pi \quad \xi_P(\pi) &= -\frac{1}{2}, \quad \xi_P'(\pi)=0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

が成立するから、(2.1) を (2.3) に代入して

$$\frac{t}{\pi} \left\{ \cos \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\cos \alpha_0}{\cosh x_0} - \sin \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\sin \alpha_0}{\sinh x_0} \right\} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\tan \alpha_0 + \tan \beta \cdot \tanh x_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

第 1 図

となる。更に (2.4), (2.5) から α_0 を消去すれば

$$\frac{t}{\pi} \left\{ \cos \beta \cdot \tanh^{-1} \left(\frac{1}{K \cosh x_0} \right) + \sin \beta \cdot \tanh^{-1} \left(\frac{\tan \beta}{K \cosh x_0} \right) \right\} = \frac{1}{2} \quad \dots (2.6)$$

ただし $K = \sqrt{1 + \tan^2 \beta \cdot \tanh^2 x_0}$

が得られるから x_0, α_0 は (2.5), (2.6) から容易に求めることが出来る。

次に与えられた翼型の翼列はまた解析的に表現することができる。すなわち、この翼列の外部を単位円の外部に等角に写像する解析関数

$$\zeta = \frac{t}{2\pi} \left\{ e^{-i\beta} \log \frac{Z + e^{\kappa+i\alpha}}{Z - e^{\kappa+i\alpha}} + e^{i\beta} \log \frac{Z + e^{-\kappa+i\alpha}}{Z - e^{-\kappa+i\alpha}} \right\} + g(Z) \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

をもってすれば、翼型の表面は $|Z|=1$ に対応するから (2.7) に $Z=e^{i\theta}$ において θ をパラメータとし、翼弦が実軸上にある“代表翼型”について

$$\left. \begin{aligned} \xi(\theta) &= \frac{t}{\pi} \left\{ \cos \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cosh x} \right. \\ &\quad \left. + \sin \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sinh x} \right\} + A_0 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

$$\eta(\theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos n\theta - A_n \sin n\theta) \dots (2.9)$$

したがって

$$\xi(\theta) = \frac{t}{\pi} \left\{ \cos \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cosh \alpha} + \sin \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sinh \alpha} \right\} + A_0 + \gamma^*(\theta) \dots (2.10)$$

ただし

$$g(Z) = C_0 + \frac{C_1}{Z} + \frac{C_2}{Z^2} + \dots; C_n = A_n + iB_n \quad (n=0, 1, \dots)$$

また*印は共役フーリエ級数を表す。

のように表わすことができる。ここに含まれる α, α_0 は (2.1) のなかの α_0, α_0 とは一般に異なるもので

$$\frac{t}{\pi} \left\{ \cos \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\cos \alpha}{\cosh \alpha} - \sin \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\sin \alpha}{\sinh \alpha} \right\} + A_0 + \gamma^*(0) = \frac{1}{2} \dots (2.15)$$

$$\frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cosh \alpha + \sin \beta \cdot \cos \alpha \cdot \sinh \alpha}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \right\} + \gamma^{*'}(0) = 0 \dots (2.16)$$

$$\frac{t}{\pi} \left\{ \cos \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\cos(\delta - \pi - \alpha)}{\cosh \alpha} + \sin \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\sin(\delta - \pi - \alpha)}{\sinh \alpha} \right\} + A_0 + \gamma^*(\delta - \pi) = -\frac{1}{2} \dots (2.17)$$

$$\frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\cos \beta \cdot \cosh \alpha \cdot \sin(\delta - \pi - \alpha) - \sin \beta \cdot \sinh \alpha \cdot \cos(\delta - \pi - \alpha)}{\cosh^2 \alpha - \cos^2(\delta - \pi - \alpha)} \right\} - \gamma^{*'}(\delta - \pi) = 0 \dots (2.18)$$

のようになる。

今翼型が薄く平板からのかたよりが十分小さいものとし (実際には厚弦比約 10% 以下), 節弦比が小さい (約 1.0 以上) のものとする

$$\left. \begin{aligned} (\theta - \delta) &\sim 0(\varepsilon) \\ \text{また } h(\delta), g(\theta) &\sim 0(\varepsilon) \end{aligned} \right\} \dots (2.19)$$

したがって高々

$$a_n, b_n, A_n, B_n \sim 0(\varepsilon/n) \dots (2.20)$$

と考えてよく, 同様にして

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \alpha_0 &\sim 0(\varepsilon) \\ \alpha - \alpha_0 &\sim 0(\varepsilon) \\ \delta &\sim 0(\varepsilon) \end{aligned} \right\} \dots (2.21)$$

$$\begin{aligned} &\frac{t}{\pi} \left\{ \cos \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\cos \alpha_0}{\cosh \alpha_0} - \sin \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\sin \alpha_0}{\sinh \alpha_0} \right\} \\ &+ \Delta \alpha_0 \cdot \frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha_0 \cdot \cosh \alpha_0 + \sin \beta \cdot \cos \alpha_0 \cdot \sinh \alpha_0}{\cosh^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0} \right\} \\ &+ \Delta \alpha_0 \cdot \frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\sin \beta \cdot \sin \alpha_0 \cdot \cosh \alpha_0 - \cos \beta \cdot \cos \alpha_0 \cdot \sinh \alpha_0}{\cosh^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0} \right\} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1}{2} + 0(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

となる。ここにおいて左辺の第 1 項は翼弦に相当する平板翼列に対する境界条件 (2.3) より, 右辺と相殺し, 第 2 項もまた同様にして消えるから, 結局

$$\Delta \alpha_0 \frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\sin \beta \cdot \sin \alpha_0 \cdot \cosh \alpha_0 - \cos \beta \cdot \cos \alpha_0 \cdot \sinh \alpha_0}{\cosh^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0} \right\} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 0 \dots (2.22)$$

となる。

同様にして (2.16) ~ (2.18) も次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned} &\Delta \alpha_0 \cdot \frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\cos \beta \cdot \cos \alpha_0 \cdot \cosh \alpha_0 - \sin \beta \cdot \sin \alpha_0 \cdot \sinh \alpha_0}{\cosh^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0} \right\} \\ &+ \Delta \alpha_0 \cdot \frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha_0 \cdot \sinh \alpha_0 + \sin \beta \cdot \cos \alpha_0 \cdot \cosh \alpha_0}{\cosh^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} n B_n = 0 \dots (2.23) \end{aligned}$$

あって境界条件によって α, α のみならず同時に A_0 および後縁の位置を定める δ の合計四つのパラメータが決定されるのである。

境界条件としては翼弦が実軸上の $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ の間に置かれ, 後縁および前縁がそれぞれ $\theta=0, \delta-\pi$ に対応するものとすれば, 次の四つの条件が満たされなければならない。

$$\text{後縁 } \theta=0 \text{ で } \xi(0) = \frac{1}{2} \dots (2.11)$$

$$\xi'(0) = 0 \dots (2.12)$$

$$\text{前縁 } \theta=\delta-\pi \text{ で } \xi(\delta-\pi) = -\frac{1}{2} \dots (2.13)$$

$$\xi'(\delta-\pi) = 0 \dots (2.14)$$

(2.10) を用いて (2.11) ~ (2.14) を書き表わせば

と見なされる。

したがって境界条件によって未知パラメータ $\alpha, \alpha, A_0, \delta$ を決定するために (2.21) の関係式を利用して既知の点 (α_0, α_0) のまわりに, 境界条件の式を Taylor 展開し, それぞれ第 1 項のみで高次の項を省略することにする。

まず (2.11) に対応する条件式 (2.15) より

$$\begin{aligned} &\frac{t}{\pi} \left\{ \cos \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\cos \alpha}{\cosh \alpha} - \sin \beta \cdot \tanh^{-1} \frac{\sin \alpha}{\sinh \alpha} \right\} \\ &+ A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるから, この式を α, α の関数と考え, α_0, α_0 のまわりで Taylor 展開し, 第 1 項のみをとれば

$$-4\alpha_0 \cdot \frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\sin \beta \cdot \sin \alpha_0 \cdot \cosh x_0 - \cos \beta \cdot \cos \alpha_0 \cdot \sinh x_0}{\cosh^2 x_0 - \cos^2 \alpha_0} \right\} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n = 0 \quad (2.24)$$

$$(\Delta\alpha_0 - \delta) \cdot \frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\cos \beta \cdot \cos \alpha_0 \cdot \cosh x_0 - \sin \beta \cdot \sin \alpha_0 \cdot \sinh x_0}{\cosh^2 x_0 - \cos^2 \alpha_0} \right\} + 4\alpha_0 \cdot \frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha_0 \cdot \sinh x_0 + \sin \beta \cdot \cos \alpha_0 \cdot \cosh x_0}{\cosh^2 x_0 - \cos^2 \alpha_0} \right\} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n = 0 \quad (2.25)$$

が得られる。

(2.22)~(2.25) より未知パラメータ A_0 , $4\alpha_0$, $\Delta\alpha_0$, δ を決定すれば簡単な計算の後

$$A_0 = -\frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \right) \quad (2.26)$$

$$4\alpha_0 = \frac{\pi}{2t} \frac{\cos \beta}{\sinh x_0} K \cdot L \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \right) \quad (2.27)$$

$$\Delta\alpha_0 = -\frac{\pi}{t} \frac{\cos \beta \cdot \cosh x_0}{\cosh^2 x_0 - \sin^2 \beta} K \cdot L \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sin 2\beta}{\sinh 2x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \right\} \quad (2.28)$$

$$\delta = \frac{\pi}{t} \frac{\cos \beta \cdot \cosh x_0}{\cosh^2 x_0 - \sin^2 \beta} K \cdot L \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n B_n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n B_n \right\} \quad (2.29)$$

となる。ただし $L = \cosh^2 x_0 - \cos^2 \alpha_0$ 。

しかしながら A_n , B_n は未知数であるから、これを既知の a_n , b_n で表わさなければならない。そこで (2.2) と (2.9) を等しくおけば

$$a_0 + \sum (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) = B_0 + \sum (B_n \cos n\theta - A_n \sin n\theta) + 0(\varepsilon^2)$$

となり、この両辺を比較し (2.20), (2.21) を考慮すれば

$$4\alpha_0 = \frac{\pi}{2t} \frac{\cos \beta}{\sinh x_0} K \cdot L (h^*(0) - h^*(\pi)) + 0(\varepsilon^2) \quad (2.32)$$

$$\Delta\alpha_0 = -\frac{\pi}{t} \frac{\cos \beta \cdot \cosh x_0}{\cosh^2 x_0 - \sin^2 \beta} K \cdot L \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sin 2\beta}{\sinh 2x_0} (h^*(0) - h^*(\pi)) + h^{*'}(0) \right\} + 0(\varepsilon^2) \quad (2.33)$$

$$\delta = -\frac{\pi}{t} \frac{\cos \beta \cdot \cosh x_0}{\cosh^2 x_0 - \sin^2 \beta} K \cdot L \{ h^{*'}(0) + h^{*'}(\pi) \} + 0(\varepsilon^2) \quad (2.34)$$

となる。このようにして (2.31)~(2.34) の関係から (2.8), (2.9) の中に含まれる未知パラメータは既知の表現 (2.1) によって $0(\varepsilon^2)$ を無視して完全に決定することができた。したがってこのようなパラメータを含む (2.8), (2.9) は翼列を単位円に写像する写像関数の第1近似を表わすことになる。

要約すればまず翼弦相当平板翼列を与えられた翼列に対する第0近似と考え、この ξ を $\xi(\vartheta)$ にとってこれを ξ の第0近似とする。平板翼列では $\eta \equiv 0$ であってこれが η の第0近似に外ならない。しかるに (2.1) で表わされるように $\xi(\vartheta)$ に対応する η を翼型の上から読みとった $\eta = h(\vartheta)$ は η に対して第1近似と見なすことができるから、この $h(\vartheta)$ について共役フーリエ級数を積分で計算し、境界条件を満足するように (2.31)~(2.34) から未知パラメータを求め、 A_0 , x_1 , α_1 , δ の値を決定してやれば (2.10) から ξ が求められ、これが ξ の第1近似となる。したがって (2.10) と (2.9) から (ξ_1, η_1) が定まり、ここに第1近似が確定するのである。

ただし、ここで注意すべきは第0近似にとる平板翼列の選び方である。第0近似の $\xi(\vartheta)$ としては $\xi(\theta)$

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= a_0 + 0(\varepsilon^2) \\ B_n &= a_n + 0(\varepsilon^2/n) \\ A_n &= -b_n + 0(\varepsilon^2/n) \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

が成立すると考えられるであろう。(2.30) を (2.26)~(2.29) に代入し、かつ (2.2) の共役フーリエ級数を用いれば (*印で表わす)

$$A_0 = -\frac{1}{2} (h^*(0) + h^*(\pi)) + 0(\varepsilon^2) \quad (2.31)$$

に近いものであればよいのであって、必ずしも与えられた翼列翼型の翼弦に相当する平板翼列を選ぶ必要はない。それゆえ、たとえば翼型の厚みの影響はピッチを狭くするように働くから、あらかじめ節弦比の小さい平板翼列を選べば収束が良いと考えられる。このように、第0近似のとり方によって同じ第1近似でも精度に若干の相異が生じてくる。

3. “薄翼” に対する逐次近似

前節において薄翼の任意翼列の写像関数を平板翼列からの第1近似として求めることができたが、更に精度を望むときは逐次に近似をすすめることが容易にできる。この際の手続きは前報で述べたところと変りはないので省略するが、ただ前報では境界条件を満足させる方法にかなりの面倒さがあったが、本報では第1近似の写像関数を求めたときと同様に境界条件を多少緩和して、写像関数と同程度の誤差を許し、超越連立方程式を代数一次連立方程式に置換えることによって計算を容易にする方法を採用する。それによって写像関数に含まれるパラメータの決定が容易にかつ直接的に遂行される。

もちろんこのような逐次近似の方法は必ずしも薄翼に限るわけではなく、解が収束の状態に近いときは一般に適用されるものではあるが、もし薄翼でない場合には本節の方式を超越方程式の正しい根を見出すための手がかりとして厳密に境界条件を満足させる第1報の方法によるのが望ましいと思われる。

われわれは既に第 ν 近似が求められていて、第 $\nu+1$ 近似を決定するものとしよう。すなわち ξ_ν , η_ν が既知であり、 ξ_ν に対する η を $\eta_{\nu+1}$ とし、 $\eta_{\nu+1}^*$ が計算されていて、 $\xi_{\nu+1}$ を求めるものとする。今

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\nu+1} &= \alpha_\nu + \Delta\alpha_\nu, \quad x_{\nu+1} = x_\nu + \Delta x_\nu \\ A_{0,\nu+1} &= A_{0,\nu} + \Delta A_{0,\nu}, \quad \delta_{\nu+1} = \delta_\nu + \Delta\delta_\nu \end{aligned} \right\} \dots (3.1)$$

$$\Delta\alpha_\nu \cdot \eta_{\nu+1}'(0) + \Delta x_\nu \cdot \frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\sin \beta \cdot S_c(\alpha_\nu) - \cos \beta \cdot C_s(\alpha_\nu)}{L_\nu(\alpha_\nu)} \right\} + \Delta A_{0,\nu} + \Delta\eta_\nu^*(0) = 0 \dots (3.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_\nu \left[\frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\cos \beta \cdot C_c(\alpha_\nu) - \sin \beta \cdot S_s(\alpha_\nu)}{L_\nu(\alpha_\nu)} \right\} + \frac{2 \cos \alpha_\nu \cdot \sin \alpha_\nu}{L_\nu(\alpha_\nu)} \eta_{\nu+1}'(0) \right] \\ + \Delta x_\nu \left[\frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\cos \beta \cdot S_s(\alpha_\nu) + \sin \beta \cdot C_c(\alpha_\nu)}{L_\nu(\alpha_\nu)} \right\} + \frac{2 \operatorname{sh} x_\nu \operatorname{ch} x_\nu}{L_\nu(\alpha_\nu)} \eta_{\nu+1}'(0) \right] + \Delta\eta_\nu^*(0) = 0 \dots (3.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha_\nu - \Delta\delta_\nu) \eta_{\nu+1}^*(\delta_\nu - \pi) - \Delta x_\nu \frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\cos \beta \cdot C_s(\delta_\nu - \pi - \alpha_\nu) + \sin \beta \cdot S_c(\delta_\nu - \pi - \alpha_\nu)}{L_\nu(\delta_\nu - \pi - \alpha_\nu)} \right\} \\ + \Delta A_{0,\nu} + \Delta\eta_\nu^*(\delta_\nu - \pi) + \Delta\delta_\nu \cdot \eta_{\nu+1}^*(\delta_\nu - \pi) = 0 \dots (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(\Delta\alpha_\nu - \Delta\delta_\nu) \left[\frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\cos \beta \cdot C_c(\delta_\nu - \pi - \alpha_\nu) + \sin \beta \cdot S_s(\delta_\nu - \pi - \alpha_\nu)}{L_\nu(\delta_\nu - \pi - \alpha_\nu)} \right\} \right. \\ \left. - \frac{2 \cos \alpha_\nu \cdot \sin \alpha_\nu}{L_\nu(\delta_\nu - \pi - \alpha_\nu)} \eta_{\nu+1}^*(\delta_\nu - \pi) \right] + \Delta x_\nu \left[\frac{t}{\pi} \left\{ \frac{\cos \beta \cdot S_s(\delta_\nu - \pi - \alpha_\nu) - \sin \beta \cdot C_c(\delta_\nu - \pi - \alpha_\nu)}{L_\nu(\delta_\nu - \pi - \alpha_\nu)} \right\} \right. \\ \left. - \frac{2 \operatorname{sh} x_\nu \operatorname{ch} x_\nu}{L_\nu(\delta_\nu - \pi - \alpha_\nu)} \eta_{\nu+1}^*(\delta_\nu - \pi) \right] - \Delta\eta_\nu^*(\delta_\nu - \pi) + \Delta\delta_\nu \cdot \eta_{\nu+1}^*(\delta_\nu - \pi) = 0 \dots (3.5) \end{aligned}$$

ただし $L_\nu(\varphi) = \operatorname{ch}^2 x_\nu - \cos^2 \varphi_\nu$, S_s , $S_c(\alpha)$ などそれぞれ $\operatorname{sh} x_\nu \cdot \sin \alpha$, $\operatorname{ch} x_\nu \cdot \sin \alpha$ などであって, sh , ch は $\sinh$, $\cosh$ の略記である。なお $\Delta\eta_\nu = \eta_{\nu+1} - \eta_\nu$ である。

(3.2)~(3.5) から Δx_ν , $\Delta\alpha_\nu$, $\Delta\delta_\nu$, $\Delta A_{0,\nu}$ が容易に定められ、(3.1) のパラメータは (2.10) から $\xi_{\nu+1}(\theta)$ を決定するから $\xi_{\nu+1}(\theta)$, $\eta_{\nu+1}(\theta)$ によって第 $\nu+1$ 近似が確定する。同様な操作を繰返せばいくらでも近似を高めることができ、 ξ が収束するまで計算を行えば厳密解に達することができる。

4. 本解法と他の解法との比較

ここで本解法と他の薄翼理論の解法との比較を試みよう。ただしこれが本論文の目的ではないから簡単に触れる程度に止めることにする。

わが国で、従来しばしば用いられていた本解法に類似な解法のうちで、まず広瀬氏の方法⁽⁴⁾と河崎氏の方法⁽⁵⁾とを取上げて比較、検討してみよう。広瀬氏の方法と本解法とでは境界条件のとり方並びにそれを満足させる方法は同一であるが、基礎にとった写像関数の形が異なる。同氏のとり方によると実数部と虚数部に分けた場合に式の上で e^2 以上を省略した形になって、第1近似の精度を悪くすると同時に逐次近似をほとんど不可能なものとしている。本解法では少くともかよ

とおけば、薄翼の場合のように解の収束がすみやかなときは一般に $\Delta\alpha_\nu$, Δx_ν などは写像関数に含まれる誤差、すなわち、たとえば $\eta_{\nu+1} - \eta_\nu = \Delta\eta_\nu$ と同程度の量と考えられる。したがって前節と同様に境界条件の式を点 $(\alpha_\nu, x_\nu, A_{0,\nu}, \delta_\nu)$ のまわりに展開し、各変数の微分の第一次の項のみを残し、高次の項を省略すれば、境界条件は高々写像関数と同程度の誤差を含むことになり、前に比べて1段近似のよい境界条件を満足することになる。

前節と同様の手続きをふみ、途中の計算を省略すれば、パラメータの決定は結局次の連立一次方程式を解くことに帰せられることがわかる。

うな省略が行われていないので第1近似でも精度の向上が期待されよう。

次に河崎氏の方法は逐次近似によって精度を高められる点では本解法と同様であり、基礎の写像関数も同一であるが、写像関数に含まれる未知パラメータの決定方法が異なる。同氏の方法によればパラメータの決定の際近似の程度の異なる ξ と η とを混用することになるので理論上本解法によるものより精度が良くなるとは思われない。また第0近似を単独平板にとっていることも第1近似だけを比較すれば本解法の結果の方が精度が高いはずである。しかしながら逐次近似のできる方法にあっては第1近似のみを比較して精度をうんぬんすることは余り意味のないことである。第1近似といっても第0近似の選び方によって著しく異なるものであり、第1近似が問題となるのは逐次近似が行えない解法についてだけである。

なお上に比較した諸解法と多少異なった方式によるたとえば神元⁽⁶⁾、安陪⁽⁷⁾、菊池⁽⁸⁾、Howell⁽⁹⁾の諸氏の解法と本法とでは比較がやや面倒であるが、だいたい第1近似に関する限り大同小異であると考えられる。

最後に計算の難易について言うと、本解法は共役フーリエ級数の計算に際して、従来のようなフーリエ展開、合成の2回の操作を1回の積分で置き換えるとか、パラメータの決定が直接的であるとか、また逐次

近似に際して $\Delta\gamma_v = \gamma_{v+1} - \gamma_v$ の関係から $\Delta\gamma$ についての計算を行うだけであるとかは確かに従来の解法に比べて計算が容易であると思われる点である。

5. 計 算 例

前報において示した例はすべて翼型に何らかの対称性が存在し、境界条件による未知パラメータの決定には困難のなかったものであった。ここでは一般的な例として非対称翼で $\beta \neq 0$ の場合に関して計算を行って、圧力分布を求めた。圧力分布の求め方については前報に述べられているから省略する。まず神元教授の論文に記載されている NACA 4412, $\beta = 50^\circ$, $t/l = 1.284$ の翼列をとり、第1例は迎え角を翼弦と流入の流れとの角として 3° (平均流に対しては $17'12''$) にとり、第2例は平均流と翼弦とのなす角を 3° (流入の

流れに対しては $7^\circ 6'$) にとって計算した。その結果は第2図と第3図にそれぞれ示してある。特に第2例は神元教授と計算の条件が同一のものであり、同教授の結果とかなり良く一致しているようである。大島基宏⁽¹⁰⁾は著者の下で Clark Y 6%, $\beta = 65^\circ$, $t/l = 1.237$ の翼列について数値計算を行った。第4図は逐次近似の状況を示している。このとき縦を10倍に拡大して易くしてあるが、第2近似で収束していることがわかる。圧力分布は流入の流れに対して 5° の迎え角 (平均流に対し $2^\circ 12'$) をなす場合を第5図に示しておいた。

以上2種類の計算に際しては共役フーリエ級数の積分を求めるときに円周を24等分して行ったが、だいたいこの程度の例では実用上これで十分であろう。

第 2 図

第 3 図

第4図 (△ 第1近似, ● 第2近似, 実線 原翼型)

6. 結 語

本報において述べられたことを要約すれば次のようになる。

(1) 前報の理論における境界条件を近似的な境界

第 5 図

条件でおきかえることによって平板翼列からの第1近似の写像関数を求めたこと。

(2) この写像関数は従来のものと異なる新しいもので精度がよく、かつ更に近似を高めるのに適しているものであること。

(3) 写像関数に含まれる近似と同程度の近似を境界条件に許すことによって逐次に近似をすすめる直接的で、かつ計算の容易な方法を導いたこと。

(4) 本報の理論を NACA 4412, Clark Y 6% の翼列に適用し数値計算例を示したこと。

なお前報並びに本報の写像理論は翼列をよぎる非圧縮性および圧縮性の流れの問題の解明に役立つものである。これらについての詳細は引続いて報告するつもりでいる。

注：—

- (1) 昭和 28 年 11 月 3 日 阪神臨時大会講演会において「任意翼型の翼列理論における逐次近似の方法」と題して講演したものを改題した。「圧縮性流体の翼列理論に関する研究 第2報」, 原稿受付 昭和 29 年 4 月 3 日。
- (2) 正員, 慶応義塾大学工学部。
- (3) 筆者, 機械学会論文集, 20 巻 97 号 (昭 29)。
- (4) 広瀬幸治, 機械学会論文集, 14 巻 47 号 (昭 23)。
- (5) 河崎俊夫, 応用力学, 5 巻 26 号。
- (6) 神元五郎, 機械学会論文集, 17 巻 60 号 (昭 26)。
- (7) 安陪俊一, 東北大学工学報告, 15 巻 2 号。
- (8) 菊池 寿, 東北大学高速力学研究所報告, 5 巻 50 号。
- (9) Howell の方法は $\tanh$ の関数を用いて翼列を単独図形に写像し, Joukowski 変換と Theodorsen の方法を繰返して単位円に写像する方法である。
- (10) 准員, 東洋紡績会社。

621-226.2:532.5.07

タービン翼列実験法に関する研究⁽¹⁾

水 町 長 生⁽²⁾ 平 山 直 道⁽³⁾

On the Measurements of Flow at the Exit of Turbine Blade Cascades

by Nagao MIZUMACHI and Naomichi HIRAYAMA

The meanings of loss coefficients that have been adopted by some investigators is considered, and it is explained that they are approximate thrust loss coefficients or energy loss coefficients on some assumptions. The degree of each approximation, when it is applied to two-dimensional flows, is researched by the experiments.

In case of two-dimensional measurement, a Pitot tube and a yaw meter are attached parallel, and in case of three-dimensional measurement, both parallel and normal, to the span of blades. The errors caused by two-dimensional measurement being applied to three-dimensional flow are calculated. Results are interesting.

1. 前 置

タービン翼列の実験⁽⁴⁾では従来性能の取扱いがまちまちで、またピトー管や方向計は翼のスパン方向から

だけ挿入するいわゆる二次元的測定に限られているようである。しかるに翼列の流入側の速度が一様に近い場合でも、速度分布にはいくらかのこぼこがあるため、翼列の後流ではスパンの中央附近でも完全な二次