539.386 : 539.4.019.1

せん断曲げ 2 元たわみ自由度を有する半無限 長棒に対する端末横質量衝撃について⁽¹⁾

井 町

勇⁽²⁾

On the Lateral Mass-Impact at the End of a Very Long Bar with Two Flexural Rigidities....Bending and Shearing.

by Isamu IMACHI

An analytical investigation is developed on a problem of lateral mass-impacts applied at the end of a semi-infinitely long bar under assumptions similar to the previous report⁽³⁾. The difficulty that occurs when one determines the roots of the characteristic equation (Eq. 10 a) has been conquered by application of a statistical treatment. The phenomena subsequent to the impact are discussed and computed mainly referring to the shearing strains and bending strains. It can be qualitatively explained that the larger the velocity of impact becomes, the nearer approaches the point of failure to the struck end, if the failure is assumed to depend only on the amount of bending stresses.

棒に対する横質量衝撃を取扱うのに、通常の曲げ変形の他にせん断変形もあるものとして解析した。また Rayleigh 流の方法で振動成分を決定する場合に棒の長さを無限大にすると、特性式の解を一意的に決定出来なくなる困難があるが、本研究では統計論的な取扱いを試みて成功した。

1. 序

衝撃といわれる現象にも種々あり、それが急激な外力の変化としてその大きさ、分布、時間的変化の状況があらかじめ陽に与えられる場合もある。この場合は弾性力学的取扱いは比較的簡単である。しかし工学上は物体の衝突現象としてあらわれる衝撃の方がより重要であって、この場合は作用する力は両物体の弾性的構成内容に応じて、動弾性学的に定って来るものである。しかも衝突後は両物体が接触しているかあるいは離れているかの条件を常に考慮に入れなければならぬから、前者にくらべると、かなり面倒になるものである。

本論では長い一様断面の棒の一端に質量 m 、初速 V なる剛質点が横から衝突する場合を取扱うこととする。衝突点が長い棒の中央である場合については既に前報告⁽³⁾でのべたが、本論でも棒には曲げ剛性と、せん断剛性（これは近似的な考えで一種の有効値を考える）とがあり、したがって独立な二つのたわみ自由度があると仮定する。棒の横振動特性に対してこの仮定がいかなる意義をもつかは、既に別に報告した⁽⁴⁾所で

ある。質量衝撃の場合には曲げ自由度だけを考えた通常理論では、衝突の瞬間に接触力は無限大となり、その後の運動に関しても接触の条件が不定で合理的な解は得られないのである。

2. 基礎運動方程式、一般解、 並びに特性式

せん断曲げ 2 元たわみ自由度を有する棒の横振動の基礎運動方程式は前報告に示したとおり、せん断力および曲げモーメントをそれぞれ

$$S = GA_e \bar{\Gamma} + (\text{内部抵抗力})$$

$$M = -EI \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \bar{\Gamma} \right) + (\text{内部抵抗モーメント})$$

と仮定すれば、一般に

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (\text{外部抵抗力}) = \frac{\partial}{\partial x} S$$

$$\rho x^2 A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \bar{\Gamma} \right) - (\text{外部抵抗モーメント})$$

$$= -\frac{\partial M}{\partial x} + S$$

で求められる。これらを整理すると減衰抵抗のない場合：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - x^2(1+\mu) \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} + b^2 x^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{x^2}{b^2} \mu \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

外部粘性係数 η 、内部粘性係数 ξ_1 （ひずみ速度比例型内部抵抗）のある場合：

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ y - x^2(1+\mu) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x} \right\} &= -b^2 x^2 \left(1 + 2\xi_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} \right) y &= \frac{b^2}{\mu} \left(1 + 2\xi_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x} \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (2)$$

外部粘性係数 η , 内部摩擦係数 ξ_2 (定対数減衰率型内部抵抗) のある場合:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ y - x^2(1+\mu) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x} \right\} &= -b^2 x^2 \{ \sqrt{1 - (2\xi_2)^2} + 2i\xi_2 \} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} \right) y &= \frac{b^2}{\mu} \{ \sqrt{1 - (2\xi_2)^2} + 2i\xi_2 \} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x} \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (3)$$

で示され, これらの一般解はいずれも

$$\left. \begin{aligned} y &= \sum u(x') e^{-\gamma t'} (P \sin qt' + Q \cos qt'), \\ u(x') &= u_1(x') + u_2(x'), \\ u_1(x') &= C \cos \alpha_1 x' + D \sin \alpha_1 x', \\ u_2(x') &= A \operatorname{ch} \alpha_2 x' + B \operatorname{sh} \alpha_2 x', \\ &\text{または } A \cos \alpha_2 x' + B \sin \alpha_2 x' \\ \bar{\Gamma} &= \sum \gamma(x') e^{-\gamma t'} (P \sin qt' + Q \cos qt') \\ \gamma(x') &= \gamma_1(x') + \gamma_2(x') \\ \gamma_1(x') &= \frac{\mu \nu^2}{\alpha_1^2} \frac{\partial u_1(x')}{\partial x}, \\ \gamma_2(x') &= -\frac{\mu \nu^2}{\alpha_2^2} \frac{\partial u_2(x')}{\partial x} \quad \text{または } +\frac{\mu \nu^2}{\alpha_2^2} \frac{\partial u_2(x')}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

で与えられる。ただし以上で y は横変位, $\bar{\Gamma}$ は有効せん断角, x は長さ方向の座標, t は時間, $x' = x/\kappa$, $t' = t b/\kappa$, κ は断面慣性半径, $b = \sqrt{E/\rho}$ は縦音速, ρ は棒材の密度, $\mu = EA/(GA)_e$ は棒断面の縦剛性とせん断剛性の比である。(3) 式の内部抵抗は, 遠藤氏⁽⁶⁾の表現法によったものである。また, 運動成分の固有様式を表わす補助変数を ν とすれば, α_1 および α_2 ($=i\alpha_2'$) はいずれの式に対しても

$$\alpha^4 - (1+\mu)\alpha^2\nu^2 + (\mu\nu^2 - 1)\nu^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

の根として与えられ, ζ と q は (1), (2), (3) それぞれに対して $\zeta = 0$, $=\nu(\eta\kappa/b\nu + \xi_1 b\nu/\kappa)$, $=\nu(\eta\kappa/b\nu + \xi_2)$; $q = \nu$, $=\nu\sqrt{1 - (\xi_1 b\nu/\kappa)^2}$, $=\nu$ で与えられる。(4) 式の Σ は ν について集めることを意味する。

μ の値は材質, 断面形 (なおくわしくは波長の κ に対する比にも) によって定る定数であるが, 代表的に

$\mu = 3$ と見ることが出来る。この数値を採用するときには $\nu = 1/\operatorname{sh} \theta$ なる別の補助変数 θ を用いて

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{2 + \operatorname{ch} \theta} / \operatorname{sh} \theta, \quad \alpha_2 = \sqrt{2 - \operatorname{ch} \theta} / \operatorname{sh} \theta, \\ \alpha_2' &= \sqrt{\operatorname{ch} \theta - 2} / \operatorname{sh} \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

と書くことが出来る。

長さが無限大であるところの無限大点の条件は指定出来ないが, これをどのようにとってもさしつかえないはずであるから, もっとも取扱いの簡単な単純支持の条件を採用することとする。すなわち, 今長さ l はきわめて大であるが有限と考えると, この条件は $u(l) = (\partial^2 u / \partial x^2)_l = 0$ であって (4) にこれを適用すると

$$\left. \begin{aligned} u_1(x') &= \cot \alpha_1 l' \sin \alpha_1 x' - \cos \alpha_1 x' \\ u_2(x') &= A (\cot \alpha_2 l' \sin \alpha_2 x' - \cos \alpha_2 x') \\ &= A (e^{-\alpha_2' x'}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} [\operatorname{ch} \theta \leq 2] \\ [\operatorname{ch} \theta \geq 2] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

とすることができる。

今棒は $x=0$ に端末を有し, $x=l$ まで連続であるとし, $x=0$ 点に質量 m , 速度 V なる横衝撃が与えられたものとする。衝突の瞬間から質量が反発離脱する瞬間までは, 質量は棒とともに運動し, その点では m の慣性力と棒のせん断力とがつり合うこと, 自由端であるために曲げモーメントが 0 であることとの二つが端末条件となる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} m \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x'=0} &= (S)_{x'=0}, \\ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x} \right)_{x'=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

これらの条件を (4) に適用すれば, 内部外部の抵抗の有無種類にかかわらず, おのおのの振動様式について

$$\begin{aligned} -\frac{k}{x} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \theta} u(0) &= \frac{1}{\mu} \gamma(0), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(0) - \frac{\partial}{\partial x} \gamma(0) &= 0 \end{aligned}$$

が成立することを必要とする。ただし $k = m/\rho x A$ である。(7) に適用すると (以下複式記号もしくは複式記法は $\operatorname{ch} \theta \leq 2$ に対応するものとする)。

$$\left. \begin{aligned} k(1 \pm A) &= \frac{\cot \alpha_1 l'}{\alpha_1} + A \left(\frac{\cot \alpha_2 l'}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_2'} \right) \\ 1/(\operatorname{ch} \theta + 1) \pm A/(1 - \operatorname{ch} \theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

第 1 図 二元たわみ自由度の模型図

(9) 式から特性式として次式が得られる。

$$\cot \alpha_1 l' + M' \cot \alpha_2 l' = N' \quad [\text{ch } \theta < 2] \quad \dots (10a)$$

$$\cot \alpha_1 l' = N' + \bar{M}' \quad [\text{ch } \theta > 2] \quad \dots (10b)$$

ただし

$$M' = \frac{\alpha_1 (\text{ch } \theta - 1)}{\alpha_2 (\text{ch } \theta + 1)}, \quad \bar{M}' = \frac{\alpha_1 (\text{ch } \theta - 1)}{\alpha_2' (\text{ch } \theta + 1)},$$

$$N' = \frac{2k\alpha_1 \text{ch } \theta}{\text{ch } \theta + 1}$$

したがって $u(x')$ は (10) を満足する条件のもとに次のようになる。

$$u(x') = \cot \alpha_1 l' \sin \alpha_1 x' - \cos \alpha_1 x' + \frac{\text{ch } \theta - 1}{\text{ch } \theta + 1} \left\{ \cot \alpha_2 l' \sin \alpha_2 x' - \cos \alpha_2 x', -e^{-\alpha_2 x'} \right\} \quad \dots (11)$$

3. 成分振幅と解の統計論的最確値の決定

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2'$ は θ の関数であるから、 l が有限であれば特性式 (10) は一連の θ を決定する。しかるに今は l は無限大と考えるので θ は $0 \sim \infty$ の間にわたって連続であってもよいことになる。しかしながら $\text{ch } \theta > 2$ の範囲では (10b) 式で示されるとおり $\cot \alpha_1 l'$ はその値が決定されるから $\alpha_1 l'$ は、ほぼ π の間隔をもって配列されていることになる。これに対して $\text{ch } \theta < 2$ の範囲では (10a) 式だけでは $\cot \alpha_1 l'$ と $\cot \alpha_2 l'$ の値を一意的に定めることができない。したがってここでは統計論的な考えを導入して、取扱うこととする。

今 $f_1 = \cot \alpha_1 l' - N'$, $f_2 = -M' \cot \alpha_2 l'$ とおけば (10a) 式は $f_1 = f_2$ で表わされる。ある θ の値で θ が $\Delta\theta$ だけ変化するに応じて α_1, α_2 は

$$\Delta\alpha_1 = (d\alpha_1/d\theta) \Delta\theta, \quad \Delta\alpha_2 = (d\alpha_2/d\theta) \Delta\theta$$

だけ変化する。 $\Delta\alpha_1$ と $\Delta\alpha_2$ との比は稀には簡単な整数比をなすところもあるが、それは特例で連続な全領域中ではそのような特異点の影響は無視してさしつかえない。したがって今 m, n を互に公約数をもたない大きな整数とし、

$$\frac{d\alpha_1}{d\theta} : \frac{d\alpha_2}{d\theta} = n : m$$

第 2 図 (10a) 式の根の図示 ($m=3, n=4$ の例)

とおけば、 $\Delta\alpha_1 l'$ の $n\pi$ と $\Delta\alpha_2 l'$ の $m\pi$ が対応する。しかし l' はきわめて大きいから、この間 $\theta, \alpha_1, \alpha_2, M', N'$ は一定値を保っていると考えてよい。

$\alpha_1 l'$ を横軸とし $\Delta\alpha_1 l' = n\pi$ なる区間に f_1 および f_2 の曲線を描くと、 f_1 の n -サイクルと f_2 の m -サイクルが描かれる (第 2 図)。この区間を n 等分して互いに重ね合すと、結局 $\Delta\alpha_1 l' = \pi$ なる区間の 1 本の f_1 曲線に、 $\Delta z = \pi/m$ なる間隔にえがかれた $n+m$ 本の f_2 曲線があらわれ、 $n+m$ 個のそれらの交点は f_1 曲線上に珠数状にあらわれる。今相隣る二つの交点の水平距離を Δx_1 、垂直距離を Δy 、また $\Delta z - \Delta x_1 = \Delta x_2$ とすれば、 m, n が大きな数であるとの仮定から、これらは皆微小量である。したがって

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = -\frac{df_1}{d(\alpha_1 l')}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x_2} = \frac{df_2}{d(\alpha_1 l')},$$

$$\Delta z = \frac{\pi}{m} = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$= \Delta x_1 \left\{ -1 + \frac{df_1}{d(\alpha_1 l')} / \frac{df_2}{d(\alpha_1 l')} \right\}$$

$1/\Delta x_1$ は $n\pi$ を π に集約した場合の根の密度をあらわすから、実際の根の密度は

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \frac{1}{\Delta x_1} = \frac{m}{n\pi} \left\{ -1 + \frac{df_1}{d(\alpha_1 l')} / \frac{df_2}{d(\alpha_1 l')} \right\}$$

となる。(6) の関係を用いて計算すると

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{K'}{K} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 M' + \frac{1 + \cot^2 \alpha_1 l'}{1 + \cot^2 \alpha_2 l'} \frac{1}{M'} \right\} \quad \dots (12)$$

$$\text{ただし} \quad K = 1 + \frac{1}{\alpha_1^2 (\text{ch } \theta + 1)^2},$$

$$K' = 1 + \frac{1}{\alpha_2^2 (\text{ch } \theta - 1)^2}$$

が得られる。

さて一般に求める量が

$$X = \sum Y(\alpha_1 l')$$

で与えられ、 $(\alpha_1 l')$ が ε なる密度で分布すると考えられるならば、 $\Delta\alpha_1 l' = \pi$ なる部分領域内における解の部分積は

$$\Delta X = \sum_{\alpha_1 l' = \alpha_1 l'}^{\alpha_1 l' + \pi} Y(\alpha_1 l') = \int_{\alpha_1 l'}^{\alpha_1 l' + \pi} \varepsilon \cdot Y(\alpha_1 l') d(\alpha_1 l') \quad \dots (13)$$

で表わされるはずである。この方法で本問題でなお未定であった $\cot \alpha_1 l'$ と $\cot \alpha_2 l'$ を消去することが出来る。(13) は区間 π 中の和であるから、全領域にわたる総和は

$$X = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d(\alpha_1 l') \int_{\alpha_1 l'}^{\alpha_1 l' + \pi} \varepsilon \cdot Y(\alpha_1 l') d(\alpha_1 l') \quad \dots (14)$$

によって求めることができる。ただし第 1 段の積分では $\alpha_1 l'$ だけが変数で α_1 (あるいは ν , あるいは θ) は定数と見るものとし、第 2 段の積分は $\int d(\alpha_1 l') = l' \int d\alpha_1$ で α_1 (あるいは ν, θ) を変数と見るのである。

$t=0$ における初期条件が

$$y=y_0(x'), \quad \frac{\partial y}{\partial t}=\dot{y}_0(x'), \quad \frac{\partial y}{\partial x}-\bar{\Gamma}=\beta_0(x'), \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\bar{\Gamma}\right)=\dot{\beta}_0(x')$$

であるとする、Rayleigh の法則によって解 (4) の成分振幅 P_v , Q_v は

$$q_v P_v = \frac{m \dot{y}_0(0) u_v(0) + \rho A \int_0^l \dot{y}_0(x') u_v(x') dx + \rho A x^2 \int_0^l \dot{\beta}_0(x') \left(\frac{du(x')}{dx} - \gamma(x') \right) dx}{m \{u_v(0)\}^2 + \rho A \int_0^l \{u_v(x')\}^2 dx + \rho A x^2 \int_0^l \left(\frac{du(x')}{dx} - \gamma(x') \right)^2 dx}$$

$$Q_v = \frac{m y_0(0) u_v(0) + \rho A \int_0^l y_0(x') u_v(x') dx + \rho A x^2 \int_0^l \beta_0(x') \left(\frac{du(x')}{dx} - \gamma(x') \right) dx}{m \{u_v(0)\}^2 + \rho A \int_0^l \{u_v(x')\}^2 dx + \rho A x^2 \int_0^l \left(\frac{du(x')}{dx} - \gamma(x') \right)^2 dx}$$

として求められる。今の場合 $t=0$ で

$$0 \leq x \leq l: y_0(x') = \beta_0(x') = \dot{\beta}_0(x') = 0$$

$$x=0: \dot{y}_0(0) = V,$$

$$0 < x \leq l: \dot{y}_0(x') = 0$$

であるから、上の法則を適用すれば

$$I_v = \left\{ k \{u(0)\}^2 + \int_0^{l'} \left[\{u(x')\}^2 + x^2 \left\{ \frac{\partial u(x')}{\partial x} - \gamma(x') \right\}^2 \right] dx' \right\}_{v \rightarrow \infty}$$

において

$$P_v = \frac{x}{b q_v} \frac{k u_v(0)}{I_v} V, \quad Q_v = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。式 (11) を適用すると (15) 式で

$$u(0) = -2 \operatorname{ch} \theta / (\operatorname{ch} \theta + 1)^*$$

$$\int_0^\pi \varepsilon \frac{u(x')}{I} d(\alpha_1 l') = \frac{2}{l'} \frac{1+M'}{(1+M')^2 + N'^2} \frac{1}{K} \left\{ \left(-\cos \alpha_1 x' + \frac{N'}{1+M'} \sin \alpha_1 x' \right) + \frac{\operatorname{ch} \theta - 1}{\operatorname{ch} \theta + 1} \left(-\cos \alpha_2 x' + \frac{N'}{1+M'} \sin \alpha_2 x' \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

が得られる。

(17) は $\alpha_1 l'$ の π 区間にある $u(x')/I$ の和であるが、見方をかえると、 $\Delta \alpha_1 l' = \pi$ ごとに 1 個の振動成分が配置されていて、その $u(x')/I$ の値は (17) で表わされると考えてもよい。すなわち、特性式からは直接 $\cot \alpha_1 l'$, $\cot \alpha_2 l'$ は決定できなかったが、以上の操作によって、その最確値として $\operatorname{ch} \theta < 2$ の範囲では

$$\left. \begin{aligned} \cot \alpha_1 l' &= \cot \alpha_2 l' = N'/(1+M') \\ \frac{1}{I} &= \frac{2}{l'} \frac{1+M'}{K \{ (1+M')^2 + N'^2 \}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

が得られたわけである。これに対し $\operatorname{ch} \theta > 2$ の範囲ではこのような操作を必要とせず (10b), (16b) をその

$$y = \frac{4xV}{\pi b} \left[- \int_{\alpha_1=0}^\infty \frac{\operatorname{sh} \theta \operatorname{ch} \theta}{K(\operatorname{ch} \theta + 1) F/k} \left\{ \sin(\alpha_1 x' - \phi) + \frac{\operatorname{ch} \theta - 1}{\operatorname{ch} \theta + 1} \left(\frac{\sin(\alpha_2 x' - \phi)}{-e^{-\alpha_2 x'/F}} \right) \right\} \frac{e^{-\xi' l'}}{\sqrt{1-X^2}} \sin q' t' d\alpha_1, \right. \quad \dots\dots\dots (19)$$

または

$$y = - \frac{4xV}{\pi b} \int_{\nu=0}^\infty \frac{\operatorname{sh} \theta \sqrt{2+\operatorname{ch} \theta}}{2F/k} \left\{ \sin(\alpha_1 x' - \phi) + \frac{\operatorname{ch} \theta - 1}{\operatorname{ch} \theta + 1} \left(\frac{\sin(\alpha_2 x' - \phi)}{-e^{-\alpha_2 x'/F}} \right) \right\} \frac{e^{-\xi' l'}}{\sqrt{1-X^2}} \sin q' t' d\nu \quad \dots\dots\dots (20)$$

(19) または (20) が完全解である。ここに $X = \xi_1 b \nu / x$ で $\sqrt{1-X^2}$ はひずみ速度比例型内部抵抗のある場合にのみ必要で、内部抵抗がないかまたは定対数減衰率型内部抵抗の場合には $X=0$, $q=\nu$ となる。

$$* I(\operatorname{ch} \theta < 2) = \frac{l'}{2} \left[K(1 + \cot^2 \alpha_1 l') + K' \left(\frac{\operatorname{ch} \theta - 1}{\operatorname{ch} \theta + 1} \right)^2 (1 + \cot^2 \alpha_2 l') \right], \quad \dots\dots (16a)$$

$$I(\operatorname{ch} \theta > 2) = \frac{l'}{2} \left[K(1 + \cot^2 \alpha_1 l') \right] = \frac{l'}{2} K \{ 1 + (N' + \bar{M}')^2 \} \quad \dots\dots\dots (16b)$$

さて $\operatorname{ch} \theta < 2$ の範囲だけについて見ると、 y の因子のうち $\cot \alpha_1 l'$ および $\cot \alpha_2 l'$ を未定項として含むものは $u(x')$ と I であるからわれわれは $u(x')/I$ に対して前掲の統計論的操作をほどこせばよい。多少面倒な演算を遂行すれば

まま用いられよう。

便宜上

$$\cot \phi = \left\{ \frac{N'/(1+M')}{N'+M'} \right\}, \quad F^2 = \left\{ \frac{(1+M')^2 + N'^2}{1+(M'+N')^2} \right\}$$

とおくと

$$u_1(x') = \frac{\sin(\alpha_1 x' - \phi)}{\sin \phi},$$

$$u_2(x') = \frac{1}{\sin \phi} \cdot \frac{\operatorname{ch} \theta - 1}{\operatorname{ch} \theta + 1} \left\{ \frac{\sin(\alpha_2 x' - \phi)}{-e^{-\alpha_2 x'/F}} \right\}$$

$$\nu = \frac{1}{\operatorname{sh} \theta}, \quad d\alpha_1 = \frac{(\operatorname{ch} \theta + 1) \sqrt{(2+\operatorname{ch} \theta)}}{2 \operatorname{ch} \theta} K d\nu$$

上の解が初期条件を完全に満足しているか否かについてはなお検討を必要とするが、われわれは少なくとも $k=\infty$ の場合についてはその正解であることを証明することができる (詳細略)。

4. $x=0$ すなわち衝撃点のせん断ひずみの変化

$x=0$ 点では曲げモーメントは常に 0 であるから、この点ではせん断ひずみだけが問題となる。衝撃圧、接触時間、せん断応力はこれから求められる。

簡単のため内部抵抗を無視すると (4) と (20) から

$$\begin{aligned}\bar{F} &= -\frac{4\mu V}{\pi b} \int_0^\infty \frac{\sin \nu t'}{2F/k} \left\{ \cos(\alpha_1 x' - \phi) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{M' \cos(\alpha_2 x' - \phi)}{-(M'/F)e^{-\alpha_2 x'}} \right) \right\} d\nu \\ \bar{F}(0) &= -\frac{2\mu V}{\pi b} \int_0^\infty \frac{(N'/k)k}{F/k} \sin \phi \sin \nu t' d\nu\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(21)$$

である。計算によれば、 ν の大きい所では $\nu \rightarrow \alpha_1 \sqrt{3}$, $N'/k \rightarrow \alpha_1$, $(F/k)^2 \rightarrow (1/k^2) + \alpha_1^2$ となるから、 $t'=0$, および t' のきわめて小さい所だけについて見れば、(21) の積分は ν の大きい所だけが必要であって、 $\mu=3$ なることを考慮すれば

$$\begin{aligned}\bar{F}(0)_{t'=0} &= -\frac{2\mu V}{\pi b} \int_0^\infty \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + 1/k^2} \sin \frac{\alpha_1}{\sqrt{3}} \nu \frac{d\alpha_1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{V}{b} \sqrt{\mu} e^{-t'/\sqrt{3}k} \\ &= \left(V / \sqrt{\frac{G_e}{\rho}} \right) e^{-(\rho A/m) \sqrt{G_e/\rho} \cdot t} \dots\dots\dots(22)\end{aligned}$$

すなわち衝突のごく初期には純せん断棒の場合に一致する。また (21) 中の $\sin \phi (N'/k)k/(F/k)$ は $k=\infty$ のとき $\nu=0$ と $\text{ch } \theta=2$ の 2 点で無限大になるが積分は有限となる。 $k=10$ および $k=\infty$ に対して (21) を数値積分により計算した結果は第 3 図の通りで、ひずみは t' の増すにつれて非周期的に減衰し、減衰の程度は k の小さいほどすみやかである。長さが無限大で棒端における反射がないから質量 m の反発は起らない。

第 3 図 衝撃点のせん断ひずみの変化

5. 曲げひずみの変化とその最大となる点

曲げひずみは

$$e = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \bar{F} \right)$$

であらわされるが、

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \gamma_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} / \alpha_1^2 (\text{ch } \theta + 1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - \gamma_2 = -\frac{\partial u_2}{\partial x} / \alpha_2^2 (\text{ch } \theta - 1)$$

$$\text{または } = \frac{\partial u_2}{\partial x} / \alpha_2'^2 (\text{ch } \theta - 1)$$

なる関係から、(20) 式にこれらを適用すれば

$$\begin{aligned}e &= \frac{V}{\pi b x} \int_0^\infty \frac{\alpha_1 (\text{ch } \theta - 1)}{2F/k} \left[\sin(\alpha_1 x' - \phi) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{\sin(\alpha_2 x' - \phi)}{-e^{-\alpha_2 x'/F}} \right\} \right] \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} e^{-\xi t'} \sin q t' d\nu\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(23)$$

となる。 $\nu \rightarrow 0$ では $\alpha_1 (\text{ch } \theta - 1)/(F/k) \rightarrow \infty$ となるが、 $\alpha_1 = \alpha_2' \rightarrow 0$ であることを考えると右辺の [] 内は高次の微小量となり積分は取れなくなる。特に $k \rightarrow \infty$ のときは内部抵抗を無視すれば簡単な形

$$\begin{aligned}e_{k \rightarrow \infty} &= \frac{V}{\pi b x} \int_0^\infty \frac{\text{sh } \theta}{\text{ch } \theta} \left[\sin \alpha_1 x' - \left\{ \frac{\sin \alpha_2 x'}{0} \right\} \right] \\ &\quad \times \sin \nu t' d\nu \dots\dots\dots(24)\end{aligned}$$

となる。

e の変化とその伝わりの大局を知る近似的積分法もあるけれども、比較的小さい x' に対し波動の初動部をも的確に計算する解析的方法は見当らないから、われわれの目的のためには (23) 式を克明に数値積分する必要がある。これはきわめて多大の労力を必要とするものであるが、次のような取扱いを採用すれば幾分便利である。

$$e = \left| e \right|_{\nu=0}^{\text{ch } \theta=2} + \left| e \right|_{\text{ch } \theta=2}^{\nu_0} + \left| e \right|_{\nu_0}^{\nu=\infty}$$

とおき ν_0 を相当大きい値にとる。 ν の大きいときは

$$\alpha_1 = \sqrt{3}\nu + 1/4\sqrt{3}\nu, \quad \alpha_2 = \nu - 1/4\nu,$$

$$\text{ch } \theta = \nu + 1/2\nu$$

などの近似が成立するから、 ν_0 以上の積分の部にこれらの近似を適用し、多少の数学的展開をほどこせば、一般には $\left| e \right|_{\nu_0}^\infty$ は $1/\nu_0^2$ の程度の微小量で無視出来るが、

$$x'=t' \text{ の所では } \left| e \right|_{\nu_0}^\infty \doteq -\frac{V}{\pi b x} \cdot \frac{1}{2\nu_0},$$

$$\text{また } \sqrt{3}x'=t' \text{ の所では } \left| e \right|_{\nu_0}^\infty \doteq +\frac{V}{\pi b x} \cdot \frac{1}{2\nu_0} \quad \dots\dots\dots(25)$$

となることが証明出来る (詳細略)。したがって

$\left| e \right|_{\nu=0}^{\text{ch } \theta=2}$ と $\left| e \right|_{\text{ch } \theta=2}^{\nu_0}$ とを適宜の方法で数値積分を遂行し、それを $x'=t'$, $\sqrt{3}x'=t'$ の所だけ (25) によって修正すればよいわけである。第 4 図は $k=10$ および $k=\infty$ に対してのこれらの数値積分値を t' に対して図示したものである。ただし計算では $x'=1$ に対しては $\nu_0=2\pi$, 他の x' に対しては $\nu_0=\pi$ とした。以上の近似は x' の更に大きい所に対しては ν_0 を一層大きくとらないと大きな誤差を生ずるおそれがある。

以上の計算結果から次のことが認められる。

(1) 最大曲げひずみは

$$e_{\max} \doteq 2V/\pi b x$$

第 4 図 曲げひずみの変化 (矢印は $t' = x'$ および $t' = \sqrt{3}x'$ における修正量を示す)

程度の大きさのもので、その発生する位置は $x' = 3 \sim 4$

のところである。

(2) 衝撃端の曲げひずみは 0 で、 $x' = 3 \sim 4$ までは x' が大きくなるにつれてその点での発生する曲げひずみの最大値は次第に増す。そうしてそれは初動波に属する。波速はほぼ $b/\sqrt{\mu}$ すなわちせん断波の速度と見られる。

(3) 前述のことは x' がより大きくなるともはや適用されない。たとえば $x' = 8$ では初動波の部分の振幅は小さく、最大ひずみはそれよりものろい速度の第 2 波頭にあらわれている。最大ひずみの大きさは前記 $x' = 3 \sim 4$ のものより幾分小さい。

(4) 比質量 $k = m/\rho A x$ の影響は k が 10 程度以上であればあまり大きくはない。 $k = 10$ と $k = \infty$ とを比較すると前者は後者より 10% 程度小さい。 t' の大きくなったとき e の減衰 (内部抵抗を考えない) する程度は k の小さい方が大きいようである。

6. 衝撃破損についての考察

本論で取扱った一種のモデルの内部特性をもつ、完全弾性棒の、理想的端末衝突の場合の破損を、初等材料力学的考え方に基いて、最大せん断ひずみ (または応力) と最大曲げひずみ (または曲げモーメント) をもととして考察すると、前節までの結果から次の結論をうる。

(1) 棒の強度がせん断ひずみで定ると仮定すると 4 節の結果により、衝突と同時に衝撃端にごく近接した面がせん断破損を起す。

(2) 棒が最大直ひずみ点で破損すると仮定するか、あるいは棒の強度が曲げひずみで定ると仮定すれば、 e が最初に所定値に達する所で棒が折損する。 e は衝突の速度 V に比例するから、第 4 図から推知せられるように、この位置は V が大きいほど衝撃端に

近づく。 $e_{\max}$ は $x' = 3 \sim 4$ にあらわれるから、 V が小さくなってこの点まで破損を生じないならば棒は全く破損しない。

しかし以上は限られた仮定のもとに導かれた理論結果を、同じく大胆な仮定によって判定したものであるから、これを実際問題に適用するには、更に次のことを考慮に入れた上でなければならない。

(1) 材料の破損則は上記のように簡単ではないこと。すなわちたとえ完全弾性体を仮定しても、破損は応力やひずみの最大値のみによるものではなく、特に本題のような衝

撃現象の場合は、その時間的空間的な変化の率も重要となるものである。

(2) 材料の内部抵抗の影響。本論で取扱った二つの内部抵抗の形式は要するに単に観念的なもので、衝撃現象に対して適当であるか否かは断定し得ない。内部抵抗は第 1 項の破損則にも関連し、ひずみ速度の大きいとき破損応力を高くすると見られる。

(3) 理想的端末条件は実際には得られないこと。破損場所が衝撃端に近いということは、質量 m と棒との接触の事情がかなり重要な要素となることを意味する。実際には点接触は得られないし、接触部の局部的変形もあるから、現象はより複雑である。

(4) 棒の長さの影響。有限長の棒で実験を行えば波動の反射波が重畳せられるから、かなり様相が違って来る。すなわち 5 節の計算結果では $e_{\max}$ は $x' = 3 \sim 4$ にあることになっているが、反射波があれば、より大きい x' の点に大きな e の生ずる可能性も出て来るのである。

宮城氏のパラフィンワックスによる実験⁽⁶⁾および著者の行ったガラス棒による実験⁽⁷⁾によれば、衝撃速度の増すにつれて、破壊点は衝撃端に近づくことが確かめられた。このことは定性的には本理論結果と一致する。しかし実験の方が大きな x' を示している量的には一致していない。それは上述の各種の影響と考えられる。

注：—

- (1) 昭和 29 年 5 月 13 日 北陸地方講演会において講演、原稿受付昭和 29 年 5 月 19 日。
- (2) 正員、名古屋大学工学部。
- (3) 著者、On the lateral mass-impact applied to a long uniform bar with two flexural freedoms-bending and shearing, Memoires of the Fac. of Eng., Nagoya Univ., Vol. 2, No. 1, (1950).
- (4) 著者、機械学会論文集, 17 巻 64 号 (1951).
- (5) 遠藤貞一, 日本航空学会誌, 6 巻 51 号 (1939).
- (6) 宮城青五郎, 機械学会誌, 30 巻 124 号 (1927).
- (7) 未発表。