第 11 図 変形図

G 点固定の右片持はり, 左片持はりの n 点の変位をあらわす。

3. む す び

環の形状および荷重が一軸に対して対称であれば二次不静定となり, 両軸に対して対称であれば一次不静定となる。ただし荷重が不对称であれば環形のいかんにかかわらず, 一般に三次不静定となることはもちろんである。

また荷重が内, 外側より作用するも本質には何ら異なることなく全く同様にして解が得られる。

一般に n 個の相異なる集中外圧 $P_1, P_2, \dots, P_n$ に対しても全く同様にして解が得られる。もちろんこの場合索の多角形は満足されなければならない。

注: —

(1) 昭和 28 年 4 月 5 日 第 30 期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 29 年 7 月 13 日。

(2) 正員, 大阪市立工業研究所。

539.384.6:621.643.2

任意形薄肉閉じた環の応力と変位の近似解について

(第 3 報 n 個のステーにて補強され一様な内圧に対して)⁽¹⁾

土 岐 五 郎⁽²⁾

Approximate Solution of the Stress and Deformation of an Enclosed Ring of Thin Thickness with Any Shapes

(3rd Report, Against inner fluid pressure being stiffened by n stays)

by Gorō TOKI

In this paper, the author has attempted a method of approximate solution of the stress and deformation against inner fluid pressure under three stays, assuming the end of stiffener be hinged.

As a special a case, the stress calculation of the body and stays about large Y pipe be considered.

Through the three Reports, the problem of fluid pressure, concentrated loads and stiffeners have been solved, therefore another case of several conditions is able to be solved approximately as one of the application of general case.

1. 応 力

1. 荷重条件 第 1 図に示すように, 前報と同形の薄肉閉じた環に, 水圧 p が作用し, n 個のステーにて任意の箇所を補強した場合の応力と変形の近似解について述べる。

ここでは $n=3$ 環周の A, B, C, D, E および F 点において, それぞれステー L_1, L_2 および L_3 が補強され, それぞれ P_1, P_2 および P_3 なる引張力が作用するものとする。

2. 基本形 第 2 図に示すように, 曲げ, 垂直および水平方向の不静定力 X_1, X_2 および X_3 を弾性重

第 1 図 荷重条件

第 2 図 基本形

心に選び、A, B, C, D, E および F 点すなわち 4, 5, 12, 13, 21 および 27 にそれぞれ P_1 , P_2 および P_3 を作用せしめ、H 点を基準にとり左片持はりと考えて解く。

3. ステーに作用する力 未知の力は X_1 , X_2 , X_3 および P_1 , P_2 , P_3 の六つで、厳密にいうと、水圧の場合の不静定力 X_1' , X_2' および X_3' が加わることとなる。

(1) ステーの作用力 P による曲げモーメント M_P ステーの作用力 P_1 , P_2 および P_3 による曲げモーメントをそれぞれ M_{P1} , M_{P2} および M_{P3} とし、これらの合力を M_0 とすれば第 3 図のごとくなる。

第 3 図 $P_1P_2P_3$ による曲げモーメント M_P

(2) 不静定力および P による変形量 δ_{ik} 不静定力 X_1 , X_2 および X_3 , ステー作用力 P_1 , P_2 および P_3 による変形量 δ_{ik} を図式積分により求めると、前報および第 4 図 a, 第 4 図 b によりそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI} 30 \cdot 35, & \delta_{22} &= \frac{1}{EI} 171 \cdot 73 \\ \delta_{33} &= \frac{1}{EI} 271 \cdot 90 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{1}{EI} (78 \cdot 12 P_1 + 10 \cdot 92 P_2 + 13 \cdot 72 P_3) \\ \delta_{20} &= \frac{1}{EI} (33 \cdot 25 P_1 - 40 \cdot 42 P_2 + 13 \cdot 32 P_3) \\ \delta_{30} &= \frac{1}{EI} (207 \cdot 26 P_1 + 10 \cdot 13 P_2 + 49 \cdot 85 P_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

したがって不静定力 X_1 , X_2 , X_3 およびステーの作用力 P_1 , P_2 , P_3 による曲げモーメント M_{P1} , M_{P2} , M_{P3} ならびにこれらの合力 M_P は第 5 図により、 P_1 , P_2 および P_3 の関数として表わされる。すなわち

(3) 不静定力 X_1 , X_2 および X_3

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -(2 \cdot 574 P_1 + 0 \cdot 360 P_2 + 0 \cdot 452 P_3) \\ X_2 &= -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} = -(0 \cdot 194 P_1 - 0 \cdot 235 P_2 + 0 \cdot 078 P_3) \\ X_3 &= -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} = -(0 \cdot 762 P_1 + 0 \cdot 037 P_2 + 0 \cdot 183 P_3) \end{aligned} \right\}$$

(4) 曲げモーメント M_P

$$\left. \begin{aligned} M_P &= M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 \\ &\equiv \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

(2) 式において

$$\begin{aligned} M_0 &= \alpha_0 P_1 + \beta_0 P_2 + \gamma_0 P_3, \\ X_1 M_1 &= \alpha_1 P_1 + \beta_1 P_2 + \gamma_1 P_3, \\ X_2 M_2 &= \alpha_2 P_1 + \beta_2 P_2 + \gamma_2 P_3, \\ X_3 M_3 &= \alpha_3 P_1 + \beta_3 P_2 + \gamma_3 P_3 \end{aligned}$$

また $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

なお前式 $X_1 M_1$ において $M_1 = -1$ であるから

$\alpha_1 = 2 \cdot 574$, $\beta_1 = 0 \cdot 360$, $\gamma_1 = 0 \cdot 452$ であり、 $X_1 M_1$ は環周一様に作用する一定な曲げモーメントをあたえる。

(5) ステー作用力 P による変位 U' , U'' H 点を基準にとり、作用点の水平、垂直変位 U' , U'' を図式積分により求めると、 P_1 , P_2 および P_3 の関数として第 6 図 a, 第 6 図 b, 第 6 図 c および第 7 図 a, 第 7 図 b のごとくなる。

(6) ステーに作用する力 P 内圧 p のためステーは引張力 P をうけ伸び、変形後はステーの両端はステーの方向のみならず、これが直角の方向にも変位し、これらの合力の方向に移る。

しかしながらこの分変位はステーの長さ l に比してきわめて微小であるから無視してさしつかえなく、すなわち変形方向は初めのステーの方向と考えることができる。いま内圧 p およびステー引張力 P によるステーの伸び、縮みを (δ) (u) で表わすと、次の方程式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{l_1 P_1}{EA_1} &= (\delta)_1 + (u)_1, & \frac{l_2 P_2}{EA_2} &= (\delta)_2 + (u)_2 \\ \frac{l_3 P_3}{EA_3} &= (\delta)_3 + (u)_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

第4図 a 変形量図式積分

第4図 b 変形量図式積分

第5図 曲げモーメント M_P

(3) 式において $(\delta)_1$, $(u)_1$ はステア L_1 の両端部 A, F すなわち点 4, 27 における伸び, 縮みの合力を示す。図式積分により (3) 式の右辺の値を求めると第1表のごとくなる。

ただし表中 δ' , δ'' ; U' , U'' はそれぞれ内圧 p および P による n 点の水平, 垂直変位であり $\tan \theta = \delta''/\delta'$, $\tan \psi = U''/U'$ また ϕ はステアの水平となす角度を示す。

すなわち (δ) (U) は第1表より

第6図 a 水平変形量 U_n'

第1表 変位 (δ) (u)内圧による変形量 (δ)

荷重	n	ϕ°	δ'	δ''	δ	ϕ	$\varphi = \phi - \phi'$	$\delta \cos \varphi$	(δ)
p	27 4	13°	-13°5 25°3	10°35 8°90	17°0 26°8	37°30' 19°25'	24°30' *32°25'	15°46 22°6	38°06
	5 12	67°20'	24°0 23°7	10°00 5°50	26°0 24°3	22°40' 13°5'	*44°40' 54°15'	18°3 -14°2	-4°1
	13 21	11°40'	15°5 -20°3	6°50 20°2	16°8 28°6	22°45' 44°50'	*34°25' 33°10'	13°84 23°95	37°79

$$l_1 = 3.262, l_2 = 2.646, l_3 = 3.318$$

(単位 p/EI)ステーション力による変形量 (u)

荷重	n	ϕ	u'	u''	u	ψ	$\theta = \psi - \phi$	$u \cos \theta$	(u)
P_1	27 4	13°	4°39 -6°43	-1°89 -2°36	4°88 6°85	23°20' 20°10'	10°20' *33°10'	-4°79 -5°83	-10°52
	5 12	67°20'	-8°42 -8°43	-3°29 -7°63	9°04 11°37	21°20' 42°10'	46° *25°10'	-6°28 10°29	4°01
	13 21	11°40'	-6°44 1°75	-7°83 -4°71	10°14 5°02	50°30' 69°40'	37°50' 58°	-8°80 -2°66	-11°46
P_2	27 4	13°	-0°16 3°14	0°09 0°63	0°06 3°20	29°20' 11°20'	16°20' *24°20'	0°06 2°91	2°97
	5 12	67°20'	4°92 11°63	1°94 8°99	5°29 14°70	21°30' 37°40'	45°50' *29°40'	3°68 -12°77	-9°09
	13 21	11°40'	11°36 5°66	9°20 1°72	14°63 5°92	39° 16°55'	*50°40' *28°35'	9°28 5°20	14°48
P_3	27 4	13°	1°52 -3°42	-0°78 -0°85	1°70 3°53	27°10' 14°	14°10' *27°	-1°65 -3°14	-4°79
	5 12	67°20'	-4°14 -7°77	-1°77 -4°40	4°50 8°93	23°10' 29°30'	*44°10' *37°50'	-3°22 7°05	3°83
	13 21	11°40'	-6°51 -0°85	-5°27 -3°64	8°38 3°73	39° 76°50'	*50°40' 65°10'	-5°30 -1°57	-6°87

* 図面による.

(単位 P/EI)

$$(\delta)_1 = \delta_{27} + \delta_4 = \frac{p}{EI} 38.06$$

$$(\delta)_2 = \delta_5 + \delta_{12} = \frac{-p}{EI} 4.10$$

$$(\delta)_3 = \delta_{13} + \delta_{21} = \frac{p}{EI} 37.79$$

$$(U)_1 = U_{27} + U_4 = \frac{1}{EI} \dots (4)$$

$$\times (-10.52P_1 + 2.97P_2 - 4.79P_3)$$

$$(U)_2 = U_5 + U_{12} = \frac{1}{EI}$$

$$\times (4.01P_1 - 9.09P_2 + 3.83P_3)$$

$$(U)_3 = U_{13} + U_{21} = \frac{1}{EI}$$

$$\times (-11.46P_1 + 14.48P_2 - 6.87P_3)$$

(3) 式において, $l_1, l_2, l_3; A_1, A_2, A_3$ はそれぞれステーションの長さおよび断面積を示す. 今 $A_1 = A_2 =$

$A_3 \equiv A_4, I/A = m \equiv 5$ にとり環周およびステーションの E は同一値をとるものとする (3) (4) 式より 次の方程式が成立する.

$$\left. \begin{aligned} -26.83P_1 + 2.97P_2 - 4.79P_3 + 38.06p &= 0 \\ 4.01P_1 - 22.32P_2 + 3.83P_3 - 4.10p &= 0 \\ -11.46P_1 + 14.48P_2 - 23.46P_3 + 37.79p &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

(5) 式より未知力 P_1, P_2 および P_3 を求めると

$$P_1 = 1.239p, P_2 = 0.237p, P_3 = 1.261p \dots (6)$$

4. 曲げモーメント

曲げモーメント M は P による曲げモーメント M_P と内圧 p による曲げモーメント M_p の和を求めればよい. すなわち

$$M = M_P + M_p \dots (7)$$

(7) 式の M_P は (2) (6) 式より, また M_p は

第 6 図 b 水平変形量 U_n'' 第 6 図 c 水平変形量 U_n' 第 7 図 a 垂直変形量 U_n'' 第 7 図 b 垂直変形量 U_n'

第1報で求めた値より得られ、第8図にこれが経過ならびに結果を示す。N, Q も同様にして求められるが応力としてその影響が少いので省略する。

第 8 図 曲げモーメント

第 9 図 a 水平変位 δ_n'

第 9 図 b 垂直変位 δ_n''

2. 変 位

前報同様 H 点を基準にとり図式積分により行う。第9図 a, 第9図 b, 第10図 a, 第10図 b および第11図にこれが経過ならびに結果を示す。したがって内圧をうけ変形後はだいたい第11図点線に示すような形状をなすものと想像される。

3. む す び

1. 任意形薄肉閉じた環に任意の箇所を n 個のステータにて補強されている場合は、未知の力は不静定力 X_1, X_2, X_3 およびステータに作用する力 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ で、すなわち $(n+3)$ 個である。したがって変形量 δ_{ik} および不静定力は重心法を用い、図式積分により求めることができ

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} f_1(P_1 P_2 P_3 \dots P_n)$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} f_2(P_1 P_2 P_3 \dots P_n)$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{EI} f_3(P_1 P_2 P_3 \dots P_n)$$

また第1報より

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} a_1, \quad \delta_{22} = \frac{1}{EI} a_2, \quad \delta_{33} = \frac{1}{EI} a_3$$

したがって

 第 10 図 a 水平変位 δ'_n

第 11 図 変形図

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = F_1(P_1 P_2 P_3 \dots P_n)$$

$$X_2 = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} = F_2(P_1 P_2 P_3 \dots P_n)$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} = F_3(P_1 P_2 P_3 \dots P_n)$$

よって $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ による曲げモーメントを

 第 10 図 b 垂直変位 δ''_n

$M_{P1}, M_{P2}, M_{P3}, \dots, M_{Pn}$ とし、これらの合力を M_0 とすれば、全曲げモーメント M_P は

$$M_P = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3$$

ここに $M_0 = M_{P1} + M_{P2} + M_{P3} + \dots + M_{Pn}$

$$\equiv \alpha_0 P_1 + \beta_0 P_2 + \gamma_0 P_3 + \dots + n_0 P_n$$

$$X_1 M_1 = \alpha_1 P_1 + \beta_1 P_2 + \gamma_1 P_3 + \dots + n_1 P_n$$

$$X_2 M_2 = \alpha_2 P_1 + \beta_2 P_2 + \gamma_2 P_3 + \dots + n_2 P_n$$

$$X_3 M_3 = \alpha_3 P_1 + \beta_3 P_2 + \gamma_3 P_3 + \dots + n_3 P_n$$

$$\text{また } \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

$$\vdots$$

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3$$

$$\text{したがって } M_P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 + \dots + n P_n \quad (8)$$

2. 次に任意形薄肉閉じた環に一樣の内圧が加わっているから、この場合の不静定力 X'_1, X'_2 および X'_3 は第1報より

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} f'_1 p, \quad \delta_{20} = \frac{1}{EI} f'_2 p, \quad \delta_{30} = \frac{1}{EI} f'_3 p$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} a_1, \quad \delta_{22} = \frac{1}{EI} a_2, \quad \delta_{33} = \frac{1}{EI} a_3$$

したがって

$$X_1' = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = F_1'p, \quad X_2' = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} = F_2'p$$

$$X_3' = -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} = F_3'p$$

よって内圧 p による曲げモーメント M_p は

$$\left. \begin{aligned} M_p &= M_0' + X_1'M_1 + X_2'M_2 + X_3'M_3 \\ &\equiv \alpha'p \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

$$\text{ここに } M_0' = \frac{1}{2} p R^2 = \alpha_0'p$$

$$X_1'M_1 = \alpha_1'p, \quad X_2'M_2 = \alpha_2'p, \quad X_3'M_3 = \alpha_3'p$$

$$\text{また } \alpha_0' + \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' \equiv \alpha'$$

3. 以上 (8) (9) 式より、内圧をうけステータにて補強された場合の全曲げモーメント M は

$$\begin{aligned} M &= M_p + M_p \\ &= \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 + \dots + n P_n + \alpha'p \dots (10) \end{aligned}$$

(10) 式により M が $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ と p の関数として判明したので、各ステータ両支持部の変位を基準点を定めていづれも図式積分により求めると、次の連立方程式が得られる。

式中 $(\delta)_n$ はステータ L_n にて補強されている、両支持部におけるステータ方向の変位の合力にして、 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ の関数としてあらわされ、 $(U)_n$ は内圧のみによる両支持部におけるステータ方向の変位の合力で p の関数としてあらわされる。

すなわち

$$\frac{I_1 P_1}{EA_1} = (\delta)_1 + (u)_1$$

$$\frac{I_2 P_2}{EA_2} = (\delta)_2 + (u)_2$$

$$\frac{I_3 P_3}{EA_3} = (\delta)_3 + (u)_3$$

$$\vdots$$

$$\frac{I_n P_n}{EA_n} = (\delta)_n + (u)_n$$

以上を整理すると

$$\left. \begin{aligned} A_1 P_1 + B_1 P_2 + C_1 P_3 + \dots + Z_1 P_n + \lambda_1 p &= 0 \\ A_2 P_1 + B_2 P_2 + C_2 P_3 + \dots + Z_2 P_n + \lambda_2 p &= 0 \\ A_3 P_1 + B_3 P_2 + C_3 P_3 + \dots + Z_3 P_n + \lambda_3 p &= 0 \\ \vdots \\ A_n P_1 + B_n P_2 + C_n P_3 + \dots + Z_n P_n + \lambda_n p &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

よって (11) 式の n 次元の連立方程式を解き、

$$P_1 = \phi_1(p), \quad P_2 = \phi_2(p), \quad \dots, \quad P_n = \phi_n(p) \dots (12)$$

したがって、以上求めた $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ の値を (10) 式に代入することにより、全曲げモーメントは p の関数として、各周辺の応力が確定する。

M が判明すれば、変形は図式積分により容易に求めることができる。

以上をもって任意形薄肉閉じた環の応力と変位の問題は、内圧、集中外圧およびステータの問題が解き得たので、他の種々な問題は いずれも、これらの応用と考えられ、したがって近似解ではあるが一応この種問題の一般解が解き得たことと考える。

注：一

(1) 昭和 29 年 4 月 6 日 第 31 期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和 29 年 7 月 13 日。

(2) 正員、大阪市立工業研究所。

寄 書

インボリュート・スプラインおよびセレーション軸のねじり⁽¹⁾

佐 藤 千 之 助⁽²⁾

The Torsion of Shafts, Involute-Splined or Involute-Serrated

by Sennosuke SATO

スプライン軸やセレーション軸のねじり問題は工学的に重要な課題であるから従来から多くの人々によって研究されてきたが、その多くは実験的研究である。古くは石けん膜の方法による Griffith, Taylor の報告⁽³⁾のあることはよく知られている事柄である。最近大久保教授は鋭い切欠を有するセレーション軸に対して理論解析を試みているが、あらかじめ切欠の形状を

指定して解いているために解析が著しく煩雑になっている⁽⁴⁾。しかるに著者は同氏の用いた関数を用い、切欠の深さ、週期および底の曲率半径を指定した場合の解を semi-inverse method によってきわめて容易に求めることが出来た。この方法で求めた切欠の形状は切欠の形状に関する主要な要素すなわち深さ、週期および底の曲率半径が等しいインボリュート・スプライン