$$X_1' = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = F_1'p, \quad X_2' = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} = F_2'p$$

$$X_3' = -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} = F_3'p$$

よって内圧 p による曲げモーメント M_p は

$$\left. \begin{aligned} M_p &= M_0' + X_1'M_1 + X_2'M_2 + X_3'M_3 \\ &\equiv \alpha'p \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

$$\text{ここに } M_0' = \frac{1}{2} p R^2 = \alpha_0'p$$

$$X_1'M_1 = \alpha_1'p, \quad X_2'M_2 = \alpha_2'p, \quad X_3'M_3 = \alpha_3'p$$

$$\text{また } \alpha_0' + \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' \equiv \alpha'$$

3. 以上 (8) (9) 式より、内圧をうけステータにて補強された場合の全曲げモーメント M は

$$\begin{aligned} M &= M_p + M_p \\ &= \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 + \dots + n P_n + \alpha'p \dots (10) \end{aligned}$$

(10) 式により M が $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ と p の関数として判明したので、各ステータ両支持部の変位を基準点を定めていづれも図式積分により求めると、次の連立方程式が得られる。

式中 $(\delta)_n$ はステータ L_n にて補強されている、両支持部におけるステータ方向の変位の合力にして、 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ の関数としてあらわされ、 $(U)_n$ は内圧のみによる両支持部におけるステータ方向の変位の合力で p の関数としてあらわされる。

すなわち

$$\frac{I_1 P_1}{EA_1} = (\delta)_1 + (u)_1$$

$$\frac{I_2 P_2}{EA_2} = (\delta)_2 + (u)_2$$

$$\frac{I_3 P_3}{EA_3} = (\delta)_3 + (u)_3$$

$$\vdots$$

$$\frac{I_n P_n}{EA_n} = (\delta)_n + (u)_n$$

以上を整理すると

$$\left. \begin{aligned} A_1 P_1 + B_1 P_2 + C_1 P_3 + \dots + Z_1 P_n + \lambda_1 p &= 0 \\ A_2 P_1 + B_2 P_2 + C_2 P_3 + \dots + Z_2 P_n + \lambda_2 p &= 0 \\ A_3 P_1 + B_3 P_2 + C_3 P_3 + \dots + Z_3 P_n + \lambda_3 p &= 0 \\ \vdots \\ A_n P_1 + B_n P_2 + C_n P_3 + \dots + Z_n P_n + \lambda_n p &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

よって (11) 式の n 次元の連立方程式を解き、

$$P_1 = \phi_1(p), \quad P_2 = \phi_2(p), \quad \dots, \quad P_n = \phi_n(p) \dots (12)$$

したがって、以上求めた $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ の値を (10) 式に代入することにより、全曲げモーメントは p の関数として、各周辺の応力が確定する。

M が判明すれば、変形は図式積分により容易に求めることができる。

以上をもって任意形薄肉閉じた環の応力と変位の問題は、内圧、集中外圧およびステータの問題が解き得たので、他の種々な問題は いずれも、これらの応用と考えられ、したがって近似解ではあるが一応この種問題の一般解が解き得たことと考える。

注：一

(1) 昭和 29 年 4 月 6 日 第 31 期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和 29 年 7 月 13 日。

(2) 正員、大阪市立工業研究所。

寄 書

インボリュート・スプラインおよびセレーション軸のねじり⁽¹⁾

佐 藤 千 之 助⁽²⁾

The Torsion of Shafts, Involute-Splined or Involute-Serrated

by Sennosuke SATO

スプライン軸やセレーション軸のねじり問題は工学的に重要な課題であるから従来から多くの人々によって研究されてきたが、その多くは実験的研究である。古くは石けん膜の方法による Griffith, Taylor の報告⁽³⁾のあることはよく知られている事柄である。最近大久保教授は鋭い切欠を有するセレーション軸に対して理論解析を試みているが、あらかじめ切欠の形状を

指定して解いているために解析が著しく煩雑になっている⁽⁴⁾。しかるに著者は同氏の用いた関数を用い、切欠の深さ、週期および底の曲率半径を指定した場合の解を semi-inverse method によってきわめて容易に求めることが出来た。この方法で求めた切欠の形状は切欠の形状に関する主要な要素すなわち深さ、週期および底の曲率半径が等しいインボリュート・スプライン

ンおよびセレーシヨンの切欠形状にかなりよく一致する。切欠のある軸の応力分布、特に最大応力は形状に関する上記の要素が同一でありさえすれば形状の多少の相違によってほとんど左右されないから、ここに求めた解は現在実用に供せられているスプラインあるいはセレーシヨンの軸などに応用してきわめて精度の高い結果が得られることは明らかである。とくにインボリュート・スプラインおよびセレーシヨンの軸に対してはねじり最大応力を切欠の各種寸法に対して計算して実際上の参考に資するためこれを線図で示した。

軸方向に z 軸をとるものとすれば、せん断応力は

$$\tau_{xz} = G\omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - y \right), \quad \tau_{yz} = -G\omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - x \right) \quad \dots (1)$$

ここに G はせん断弾性係数、 ω は軸の単位長さに対するねじり角である。 ϕ は平面調和関数で、軸の表面では次の関係

$$\phi - \frac{r^2}{2} = \text{const.}, \quad \dots (2)$$

を満足する。いま $\alpha + i\theta = w$, $r = e^w$ とおき、切欠の数を m とし

$$\phi = \Re \left[A \log \left(1 + \frac{e^{mw}}{r_0^m} \right) \right] \quad \dots (3)$$

とおく。ここに $\Re$ は関数の実部を表わすものとし、 A , r_0 は任意の定数である。(3)式より

$$\phi = \frac{A}{2} \log \left\{ 1 + 2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^m \cos m\theta + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2m} \right\} \quad \dots (4)$$

関数 ϕ は $r=r_0$, $\theta=n\pi/m$, $n=1, 3, \dots, (2n-1)$ において特異点を有する。上式から軸の横断面の形状を表わす方程式は

$$\frac{A}{2} \log \left\{ 1 + 2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^m \cos m\theta + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2m} \right\} - \frac{r^2}{2} = C. \quad (5)$$

上式は三つの未定定数 A , C および r_0 を含んでいるから軸の横断面の形状に対して三つの条件を指定することが出来る。いま第1図に示すように軸の最大半径を1, 切欠の深さを h とし軸の周辺曲線が二つの点 ($\theta=0$, $r=1$), ($\theta=\pi/m$, $r=1-h$) を通るものとすれば、(5)式より

第1図 切欠の形状

$$\left. \begin{aligned} A \log \left\{ 1 + \left(\frac{1}{r_0} \right)^m \right\} - \frac{1}{2} &= C, \\ A \log \left\{ 1 - \left(\frac{1-h}{r_0} \right)^m \right\} - \frac{(1-h)^2}{2} &= C. \end{aligned} \right\} \quad \dots (6)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1 - (1-h)^2}{2 \log \left\{ \frac{r_0^m + 1}{r_0^m - (1-h)^m} \right\}}, \\ C &= A \log \left\{ 1 + \left(\frac{1}{r_0} \right)^m \right\} - \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad \dots (7)$$

切欠の週期および深さが指定されれば m , h が与えられることになるから、 r_0 に適当な値を与えれば、 AC が求められる。したがってこの場合の切欠の形状は(5)式を用いて描くことが出来る。しかし(5)式を次のように変形して用いれば計算が容易になる。

$$\cos m\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^m \left[e^{\frac{2C+r^2}{A}} - \left\{ 1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2m} \right\} \right] \quad \dots (8)$$

また、この場合の切欠底部の曲率半径を ρ とすれば

$$\rho = \frac{(1-h)^2}{1-h-t} \quad \dots (9)$$

ここに

$$\left\{ 1 - \left(\frac{1+h}{r_0} \right)^m \right\} \left[\frac{m(1-h)^{m-1}}{r_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)} + \frac{1-h}{A} \left\{ 1 - \left(\frac{1-h}{r_0} \right)^m \right\} \right] t = m^2 \left(\frac{1-h}{r_0} \right)^m$$

上式はスプライン軸、セレーシヨンの切欠の深さおよび週期が与えられた場合に r_0 を与えて ρ を計算する式であるが、実際には切欠の数 m および深さ h の外に ρ が指定されるのであるから ρ を与えて逆に r_0 を求めなければならない。しかし計算の結果によれば ρ と r_0 の関係は近似的に直線で表わされるから、あらかじめ m に対する r_0 と ρ との関係を図示しておけば、 ρ が与えられたときの r_0 の近似値は容易に求めることが出来る。この近似値を(9)式に代入して ρ を求め、その値が指定された値と違う場合には r_0 を少しづつ変えて ρ を計算して行けば指定された ρ に対する r_0 の厳密な値が決定される。

したがって(8)式を用いて m , h および ρ を指定したときの切欠の形状を正確に描くことが出来る。

半径直線 $\theta=0$ および $\theta=\pi/m$ 上のせん断応力を τ_0 , $\tau_{\pi/m}$ とすれば

$$\tau_0 \text{ または } \tau_{\pi/m} = -G\omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - r \right)_{\theta=0 \text{ または } \theta=\pi/m} \quad \dots (10)$$

上式に(4)式を代入して

$$\tau_0 \text{ または } \tau_{\pi/m} = G\omega \left\{ r \mp \frac{mA \left(\frac{r}{r_0} \right)^{m-1}}{1 \pm \left(\frac{r}{r_0} \right)^m} \right\} \quad \dots (11)$$

最大応力は切欠の底部すなわち $r=1-h$, $\theta=\pi/m$ に生じ、その値は

$$\tau_{\max} = G\omega \left\{ 1 - h + \frac{mA \left(\frac{1-h}{r_0} \right)^{m-1}}{1 - \left(\frac{1-h}{r_0} \right)^m} \right\} \quad \dots (12)$$

一例として Griffith, Taylor が石けん膜法による

実験に使用したセレーシオン軸をとることとする。第2図は(8)式による切欠の形状との比較を示したものである。切欠の形状は両者必ずしも一致しないが、断面内の応力分布を示した第3図から明らかなように応力は切欠の底部に著しく集中し峰の部分に生ずる応力はきわめて小さいから峰部附近における形状の多小のずれは問題にならない。

第2図 切欠形状の比較 ($m=30$, $h=0.122$, $\rho=0.04$, $r_0=0.90508$)

第3図 $\theta=0$ および $\theta=\pi/m$ 断面上の応力分布 (第2図の切欠)

第4図 インボリュート・スプライン ($1/2$ 直径刻み, $m=30$, $\rho=0.046126$, $h=0.079203$, $r_0=0.95077$)

さて、著者の求めた切欠の形状と現在寸法が規格化され、高強度伝達軸として広く実用に供せられているインボリュート・スプラインおよびセレーシオン軸⁽⁹⁾について考えよう。第4図、第5図は切欠形状の一例を比較したが、規格寸法の各種に対して切欠形状との相違は問題とするに足りない。したがって、(12)式によって与えられる最大応力の値は現在実用に供されているスプラインまたはセレーシオン軸の最大応力の厳密な値を示すものと考えてさしつかえない。切欠の箇数とねじり最大応力の関係を各種の直径刻みに対して切欠寸法の精細が表示されているもの全般に涉って数

第5図 インボリュート・セレーシオン ($10/20$ 直径刻み, $m=60$, $\rho=0.015203$, $h=0.032787$, $r=0.97736$)

第6図 最大応力と切欠個数の関係

値計算を行い、設計上の参考に資するためにこれを線図に示すと第6図に示すようになる。ここに R は軸の最大半径である。図示のごとく直径刻みが減少するに従って最大応力はわずかに増大する傾向を示し、同

一直径刻みでは m が増すに従って最大応力は増大する. h, ρ が一定であれば m が増すに従って最大応力は減少するはずであるが, 規格に従えば同一直径刻みでは m が増すとともに ρ が小さくなるので⁽⁶⁾, 標準のインボリュート・スプラインおよびセレーション軸では m が大きくなると最大応力はかえって大きくなるのである.

なお計算結果は Griffith, Taylor の実験値とも比較して見たが実験値はここに求めた厳密値とかなりよく一致するが幾分大きく出ているようである⁽⁷⁾.

終りに臨み, 本研究は名古屋大学の久保博士が東北大学に御在職中終始御懇篤なる御指導の下に行われたものであることを明らかにし, 深甚なる感謝の意を

表する.

注:—

- (1) 昭和 29 年 6 月 29 日 名古屋地方講演会において講演, 原稿受付 昭和 29 年 9 月 30 日.
- (2) 正員, 東北大学高速力学研究所.
- (3) A. A. Griffith および Taylor, Tech. Rept. Adv. Comm. Aeronautics, (1918) p. 944.
- (4) 大久保肇, J. Appl. Phys., Vol. 20 (1949) p. 1155.
- (5) Tool Engineers Hand Book, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York (1949) p. 1725, p. 1745.
- (6) 底部の曲率半径および深さを表わす近似計算式は George L. Mc Cain, SAE Journal, Vol. 54, No. 5, p.245 によった.
- (7) 第 2 図の切欠に対する著者の計算値 $1.615 G\omega$ に対し, 実験値では $1.67 G\omega$ である.

寄 書

ガス切断面をもつ軟鋼板の引張り, 疲れおよび 衝撃に対する性質について⁽¹⁾

運 井 淳⁽²⁾ 岡 根 功⁽³⁾

On Mechanical Properties of Gas-Cut Mild Steel Plates

by Atusi HASUI and Isao OKANE

1. 緒 言

機械, 構造物用材に用いる軟鋼板の加工にあたって部材の成形はガス切断によることが多い. これを可及的に多く利用するのは, 製作工程上有利である. したがってガス切断面をそのままにもつ部材の機械的性質と機械的に加工された部材のそれとの差異に関する資料が必要であるが, 従来余り見られないので実験により比較検討した.

2. 実験方法および材料

研究の目的から言って試験片は現場において一般に採られていると同一条件 (酸素—アセチレン使用, 切断速度 = 350~400 mm/mn など) で作成した. 機械的加工としては荒研削により試験片の所要寸法を出した. 材料には第 1 表の化学組成 (重量 %) をもつ 8 mm 圧延鋼板を用いた.

第 1 表

C %	Si %	Mn %	P %	S %
0.19	痕跡	0.36	0.010	0.022

(a) 引張試験 試験片の要領を第 1 図に示す. 試

験機にはアムスラー式引張試験機を用い, 試験時間は 3~4 分間とした.

(b) 疲れ試験 片持はり・両振曲げ式で行い, その試験片形状は第 2 図のとおりであるが, 図中の加工

第 1 図 引張試験片およびその類別
 $W=10, 20, 30, 40, 50, 65, 80$ mm の 7 種

- A 試験片: 試片の平行部の両側ともにガス切断
B " : 平行部の一方側はガス切断面で他側は荒研削面
C " : 平行部の両側ともに荒研削面

第 2 図 疲れ試験片