なお、さらにピッチ比が狭く肉厚の大きい場合には円周を n 等分するフーリエ級数の計算のかわりに数値積分を行い、かつ得られた速度分布より対応点の計算をやり直して逐次近似を繰返せば高い精度の解が得られると考える。

注:—

- (1) 昭和 27 年 11 月 3 日 関西支部講演会において講演, 原稿受付 昭和 29 年 10 月 25 日.
- (2) 正員, 川崎重工業会社.
- (3) W. Traupel, Die Berechnung der Potentialströmung durch Schaufelgitter, Gebrüder Sulzer, Winterthur, (1944).
- (4) C. H. Wu & C. A. Brown, A Theory of the Direct and Inverse Problems of Compressible Flow past Cascade of arbitrary Airfoils, J. of the Aero.Sci, March, (1952).
- (5) 白倉, 機械学会論文集, 18 巻 69 号 (昭 27).
- (6) 大塚, 理工研報告, 4 巻 1,2 号.
- (7) 藤本, 機械学会論文集, 13 巻 44 号 (昭 22-5).

第 7 図 翼型の微係数
実線: 与えた翼型の微係数
破線: 第 5 図実線の循環分布をもつ翼型の微係数

第 8 図 翼型および速度分布

- (8) 窪田, 機械学会論文集, 18 巻 69 号 (昭 27).
- (9) W. Traupel, On the Potential Theory of Blade Cascades, Sulzer Technical Review, (1948).
- (10) 広瀬, 藤本, 機械学会論文集, 14 巻 47 号, 第 3 部 (昭 23).
- (11) 藤本, 窪田, 機械学会論文集, 20 巻 97 号 (昭 29).

532.695.5

翼列前後縁附近の流れについて⁽¹⁾

窪 田 滋 夫⁽²⁾

On the Flow near the Leading and Trailing Edge of Cascades

by Shigeo KUBOTA

This original papers are consist of three short paragraphs.

In the first paragraph, according to the assumption by F. Weinig, a method for calculating the pressure distribution around the leading edge of cascades is developed, and the forms of leading edge are discussed by some numerical examples.

In the second, the additional losses and the deviation of outlet flow angle owing to the blade thickness at the trailing edge are researched experimentally, and in the last paragraph, an example of strict solution for β_2 - t/L curve in cascades (β_2 : direction of outlet flow, t/L : pitch-chord ratio), which is composed of some specially formed blade section, is derived theoretically.

緒 言

翼列をなす翼型の性能を計算する方法は既にいくつ

か報告されている。しかしこれらの方法で翼前縁の形状の適否を詳しく論ずることは實際上不可能である。一方翼前縁の形は翼列の性能に相当影響を及ぼすもの

と考えられるので、第1章では簡単化された境界の仮定のもとに翼前縁近傍の圧力分布を詳しく計算する方法を述べ、二三の計算例を示した。

また第2章ではタービン翼のように後縁がある肉厚をもつ場合に累加する損失および、それによって影響される流出方向の偏向に関する実験の結果を述べ、簡単な理論式による値との比較を行った。

さらに、タービン翼のように曲りの大きい翼列の流出方向を的確に表わす表示式は現在のところ理論的にも実験的にも見当たらないが、このことに対する一つの例として、そり角 90° 、左右対称形のある翼型に対しピッチ比 0 から ∞ までの間、その流出方向を厳密に計算した結果について述べてある。

1. 前縁近傍の圧力分布計算法

前縁近傍の流れの状態は、もちろん翼全体の形状の影響によってさまざまに異なるであろうが、翼の形状全体を考慮しつつ前縁の形状を詳しく計算するということは実際上困難であるので、ここでは F. Weinig が提唱した簡単な境界の仮定⁽³⁾に従って任意の形状をした前縁近傍の圧力分布を計算する方法を述べる。*

第 1 図

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{2\pi} \left(\cos \gamma - \frac{b}{t} \right) \log \frac{1+x^2+2x \cos \theta}{1-\cos \theta} - \frac{1}{2\pi} \sin \gamma \tan^{-1} \frac{(1/x-x) \sin \theta}{2+(1/x+x) \cos \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + A_0 \quad (2)$$

$$\frac{y}{t} = \frac{b}{t} \left(\frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \frac{b}{t} \tan^{-1} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + x} + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos n\theta - A_n \sin n\theta) + B_0 \quad (3)$$

ここで、 A_0 の値は前縁 L において $x=0$ となるように決定する。

式 (2), (3) を θ について微分して、

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{t}{2\pi} \frac{1+x}{1+x^2+2x \cos \theta} \left\{ \left(\cos \gamma - \frac{b}{t} \right) (1+x) \cos \frac{\theta}{2} + (1-x) \sin \gamma \right\} + t \sum_{n=1}^{\infty} n (B_n \cos n\theta - A_n \sin n\theta) \quad (4)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -\frac{b}{2\pi} \frac{1-x^2}{1+x^2+2x \cos \theta} - t \sum_{n=1}^{\infty} n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (5)$$

ここで前縁 L に対応する単位円上の偏角 θ_L を求めよう。 θ_L は式 (4) の右辺を 0 とおいた場合の根であるが、 C_n は小さいとして無視し、そのおおよその値を求めると、

$$\cot \frac{\theta_L}{2} = -\frac{1-x}{1+x} \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma - (b/t)},$$

γ, θ_L を与えると逆に、

* すなわち、第1図(a)のごとく z 面においてピッチ t 、食違い角 γ 、一様な部分の厚さ b なる半無限長翼列を考え、この翼列に対し α なる迎え角で流体が流入する場合の前縁近傍における圧力分布が、実際の翼列の前縁近傍のそれにほぼ等しいと考える。

そこで第1図(a)のような半無限長翼列の外部を ζ 面の単位円の外部へ写像するのであるが、その写像関数は一般に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{z}{t} = & \frac{1}{2\pi} \cos \gamma \left\{ \log \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) (\zeta + x) - 2 \log (\zeta - 1) \right\} \\ & + i \frac{1}{2\pi} \sin \gamma \left\{ \log (\zeta + x) - \log \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{b}{t} \left\{ \log (\zeta - 1) - \log (\zeta + x) \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\zeta^n} \\ & + C_0 \quad (1) \end{aligned}$$

ただし、 $C_n = A_n + iB_n$ 。

上式で表わされる写像関数により $z = -\infty$ は $\zeta = -1/x$ に、 $z = \infty$ は $\zeta = 1$ に対応し、かつ与えられた境界の外部は ζ 面の単位円の外部へ等角に写像される。ただし式 (1) 右辺の第1項および第2項は食違い角 γ 、ピッチ t なる厚さのない半無限長平板翼列が単位円へ写像される関数を表わし、第3項は一様な部分の肉厚が b となる関数である。さらに最後に附加えた級数 C_n を適当に選ぶことにより前縁近傍の任意の形状を表わすことが出来る。なお、特異点の配置は第1図(b)に示すごとくで、図中 $q = \cos \gamma$, $r = \sin \gamma$, $\Delta q = 2b/t$ であり、また L は翼の前縁、すなわち $dx/d\theta = 0$ となる点を、また S は前縁における流れの分岐点を表わす。

ここで、特異点の位置 x は $x=0 \sim 1$ の間の任意の値にとってよいことは容易に証明できるが、与えられた境界に対していかなる値に選ぶべきかは後述する。

式 (1) を実と虚に分け、

$$x = \frac{\sin^2 \gamma + (\cos \gamma - b/t) \cot \theta_L / 2}{\sin \gamma - (\cos \gamma - b/t) \cot \theta_L / 2} \quad (6)$$

ここで θ_L を 180° に近くとれば、翼上、下面に対応する単位円上の領域が、ほぼ半円周づつとなって都合がよいが、このようなときは x が 1 に近い値となって円周を n 等分した場合の翼面上の対応点がかたよって計算に不都合である。それゆえ、 γ が与えられた場合

θ_L を適当に仮定して式 (6) によって x を計算し、両者の欠点の比較的小さいような x を選ぶ。具体的にいうと、 $\gamma=0^\circ$ に対しては $x=0$ 、 $\gamma=45^\circ$ で b/t があまり大きくない場合は $x=0.5$ 程度に選べば適当である。

与えられた翼型に対して x が決定すれば、次に与えられた境界を満足するように式 (2)、(3) の係数 A_n, B_n を決定するのであるが、これは従来の翼理論において行われた方法と全く同様である。すなわち式 (2) においてまず $A_n=B_n=0$ として θ と x の関係を求め、次に与えられた翼型の縦座標 y を、

$$\frac{y}{t} = \frac{b}{t} \left(\frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \frac{b}{t} \tan^{-1} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + x} \\ = \sum_0^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \dots\dots\dots (7)$$

とフーリエ級数に展開する。式 (7) と (3) を比較して、

$$A_n = -b_n, \quad B_n = a_n,$$

と A_n, B_n の第 1 次近似値が求められる。次に、この A_n, B_n の値を式 (2) に代入して新しく x と θ

の関係を計算し、それによって式 (7) の展開をやりなおして A_n, B_n の第 2 次近似値を求める。このようにして A_n, B_n の値が逐次一定の値に収れんすれば、これが正しい係数の値を示すものと考えられる。

ところが実際の数値計算を行って見ると不幸にして、この方法は収れんしない。その原因は前縁近傍において翼型の微係数が大である領域を問題にすることにあると考えられる。そこで、ここでは次に述べるような省略法を取った。すなわち先述の逐次近似法を行うとその 1 次近似および 2 次近似値の表わす翼型は第 4 図にその例を示すごとく、与えた翼型をはさんで誤差が一般に反対側に表われる。それゆえ、第 1 次近似値 C_{n1} および第 2 次近似値 C_{n2} の一種の平均値 $C_n = pC_{n1} + qC_{n2}$ 、 $p+q=1$ 、 $0 < p, q < 1$ において係数 p, q の値を適当に選ぶことにより、与えた翼型をほぼ正確に表わす係数を求めることができる。第 2~7 図に示した翼型の上の点は、このようにして計算した係数の表わす翼型である。

図中実線は翼上面、破線は翼下面の値を表す。

第 2 図 速度分布

第 3 図 速度分布

第 4 図 速度分布

以上のごとく写像関数が決定すれば、翼列軸に垂直方向の流入分速度を u_1 ととり、 ζ 面において次式のごとく流れの複素ポテンシャルを与える。

$$W = \frac{u_1 t}{2\pi} \left\{ \log \left(\zeta + \frac{1}{x} \right) (\zeta + x) - 2 \log (\zeta - 1) \right\} \\ - i \frac{u_1 t \tan(\gamma + \alpha)}{2\pi} \left\{ \log \left(\zeta + \frac{1}{x} \right) - \log (\zeta + x) \right\} \dots\dots\dots (8)$$

上式より、 $\zeta = e^{i\theta}$ において円周上の速度は次式のごとく表わされる。

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{u_1 t}{2\pi} \cdot \frac{(1+x)^2 \cot \theta/2 + (1-x^2) \tan(\gamma + \alpha)}{1+x^2+2x \cos \theta}$$

したがって翼面上の速度 w は、

$$w = \frac{u_1 t}{2\pi} \cdot \frac{(1+x)^2 \cot \theta/2 + (1-x^2) \tan(\gamma + \alpha)}{1+x^2+2x \cos \theta} \\ \times \left\{ \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (9)$$

また前縁岐点の位置 θ_s は、

$$\cot \frac{\theta_s}{2} = -\frac{1-x}{1+x} \tan(\gamma + \alpha) \dots\dots\dots (10)$$

によって求められる。

〔計算例〕 以上の理論式について行った二、三の計算結果について述べよう。まず、 $\gamma=0^\circ$ 、 $b/t=0.3$ とし、式 (2) および (3) の $A_n=B_n=0$ として翼型

を計算すると第2図のごとくなり、この翼型は、

$$y = b \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin^{-1} e^{\frac{\pi x}{b-t}} \right) \dots \dots \dots (11)$$

によって与えられる。この翼型に沿う流速分布は第2図下図のごとく相当良好な分布状態を示す。図中実線は翼上面の速度分布、破線は下面のそれを表わす。次にこの翼型を基礎として第3～5図に示すごとき同一の作図法をもって描かれた一連の翼型の計算を行った。この3種の翼型はいずれも第4図に示すごとき、前縁 L より $x/t=0.4$ の所から一様な厚さ $b/t=0.3$ となり、前縁は円弧であって、その曲率半径 r_L は、 $r_L/b=1/6, 1/3, 1/2$ と変えてある。 r_L の円弧から一様な厚さに至るまでの間は r_M なる円弧で接続され、 r_M の大きさは r_L によって決定し、それぞれ $r_M/b=2.375, 3.417, \infty$ である。おのおのに対する速度分布は第3～5図下図に示してある。また前縁岐点の位置は各迎え角に対し翼型の図の上に示してある。第6図は $\gamma=45^\circ$, $b/t=0.3$ とし、式(2)および(3)の $A_n=B_n$

第 5 図 速度分布

第 6 図 速度分布

$=0$ とおいた場合の例であって、この場合 $\alpha=0.5016$ ととってある。第7図は $\gamma=45^\circ$ において第6図に示した翼型を基礎として、第4図と同一の翼型を与えた場合の例である。

第 7 図 速度分布

2. 後縁近傍の流れ

タービン翼の動翼およびノズルでは、翼の大きさが小さいために後縁附近の肉厚 b は、ピッチ t に比して余り小さくすることができず、普通 $b/t=0.1$ 程度の値となっている。そのために後縁近傍の肉厚分布は、第8図(a)に示すごとき、後縁直前までである肉厚を保ち、後縁直前において急激に肉厚が減少するような場合が多い。このために流れは翼の後端までついて流れることができず、はく離して下流に後流を形成する。一方

タービンノズルでは流れがノズル入口から出口に向けて増速するために翼面に沿う境界層は制御されて発達せず、それゆえに後縁の肉厚のために生ずる損失は、ノズルを通過する際の損失の大きな部分を占めるものと考えられる。このような見地から、ここでは後縁の肉厚が後流の損失および流出方向に及ぼす影響を検討して見た。

(a) 後縁近傍の流れ

第 8 図

1. 後流と流出方向 前章にならって、後縁近傍の翼列を、第8図(a)に示すごとく、一様な部分の厚さ b 、ピッチ t 、出口角 β_2' なる半無限長翼列と考える。後縁近傍の境界をこのように単純化して考えるとこの境界に沿う完全流体の流れは、前章と全く同様の方法で解くことができるが、実際の流れでは、流体は粘性のために後縁の岐点までついて流れることができず、はく離してしまうので、このような計算を行っても、もはや後縁近傍の流れの実際を知ることはできない。そこで、ここでは次のような概略算を行って、流出方向と後縁肉厚の関係のおおよそを求めることとした。

すなわち、第8図(a)のように、後縁附近まで翼面に沿って来た流れは、翼の上面で δ_u^* 、下面で δ_i^* なる排除厚の境界層を形成し、後縁の下流では流れははく離して δ_w^* なる排除厚の後流をもつとし、これらの内部は流体は流れないと考えて、その外部に対し完全流体の考え方を適用する。

さて、第8図(a)のごとく、後縁で排除厚 $(b + \delta_u^* + \delta_i^*)$ が急激に δ_w^* まで減少するような境界を考えると、このような境界をおおよそ満足させるためには同図のごとく後縁直前に q なる強さの吸込み列をおけばよい。

いま、 z 面 ($z = x + iy$) の y 軸に沿って t の間隔で強さ q の吸込み列があり、 y 軸より右方に相当隔たった領域における流速の x 軸方向分速度が u_1 で、 y 軸より相当左方における流れの方向が x 軸に対し $-\beta_2'^\circ$ であるような流れの複素ポテンシャルは次の式で表わ

され、これは前述した後縁近傍の境界の仮定をおおよそ満足している。

$$W = -\frac{q}{2\pi} \log \sinh \left(z \cdot \frac{\pi}{t} \right) + \left\{ \left(u_1 + \frac{q}{t} \right) + i \left(u_1 + \frac{q}{t} \right) \tan \beta_2' \right\} z$$

あるいは、その速度は、

$$u - iv = \frac{dW}{dz} = -\frac{q}{2t} \coth \left(z \cdot \frac{\pi}{t} \right) + \left(u_1 + \frac{q}{t} \right) + i \left(u_1 + \frac{q}{t} \right) \tan \beta_2'$$

すなわち、上式によれば、後縁より相当上流および下流の速度線図は第8図(b)のごとくなり、流出方向 β_2 は次のごとく表わされる。

$$\tan \beta_2 = \left(1 + \frac{q}{u_1 t} \right) \tan \beta_2' \dots \dots \dots (12)$$

次に q の値について調べよう。前述のごとく、排除厚に相当する領域の内部は、流体は流れないとして、後縁上流および下流に連続の条件を適用すると、

$$\{ t - (b + \delta_u^* + \delta_i^*) \sec \beta_2' \} \left(u_1 + \frac{q}{t} \right) = u_1 (t - \delta_w^* \sec \beta_2').$$

これより次の式をうる。

$$\frac{q}{u_1 t} = \frac{1 - \frac{\delta_w^* - \delta_u^* - \delta_i^*}{b}}{\frac{t}{b} \cos \beta_2' - 1 - \frac{\delta_u^* + \delta_i^*}{b}} \dots \dots \dots (13)$$

上式の分子で、 $(\delta_w^* - \delta_u^* - \delta_i^*)$ は後流の排除厚のうち、翼の後端において肉厚が急激に減少するために生ずるもので、後縁より上流の流れの状態にはほぼ無関係と考えられる。また分母の $(\delta_u^* + \delta_i^*)$ は後縁より上流の状態の関数であるが、タービンノズルのような場合この値は小さいものであろう。それゆえ、実験的に δ_w^* 、 δ_u^* および δ_i^* の値を測定し、式(13)より $q/u_1 t$ の値を t/b および β_2' の関数として求めておけば、 t/b および β_2' が与えられた場合、その流出方向 β_2 を推定できることとなる。

第 9 図 実験装置略図

第 10 図 吸込み強さと後縁厚肉

第 11 図 流出方向と後縁肉厚

第 12 図 損失と後縁肉厚

2. 後縁の流れに関する実験 以上の概念的な見通しのもとに風洞実験を行った。実験装置のおおよそは第 9 図に示すごとくで、 $h=250\text{ mm}$ 、幅 150 mm の斜めに切った吹口に、 $l=250\text{ mm}$ 、 $b=8\text{ mm}$ の端面を半円形に削った平板をならべて、 $V=20\text{ m/s}$ の気流を流し、後流の流出方向 4β 、排除厚 δ_w^* 、 δ_u^* および δ_l^* を測定した。第 10 図は測定値より式(13)を用いて算出した q/m_t の値である。第 11 図に示した点は流出方向の実測値であり、破線は第 10 図に示した q/m_t を式(12)に代入して算出した流出方向である。両者の傾向はよく似ているが、その値には $1^\circ \sim 1.5^\circ$ の差がある。第 12 図は、後縁の肉厚が急激に減少するために生ずる損失を表わす一種の速度係数であって、

$$\psi_w = 1 - \frac{\delta_w^* - \delta_u^* - \delta_l^*}{t \cos \beta_2'}, \quad \dots\dots\dots(14)$$

と定義して算出したものである。

以上、この章で述べたことからタービンのノズル翼列などにおいて後縁に肉厚があることにより累加する流出方向の偏向および損失の大略値がわかり、このことはノズル翼型の設計に当たって尾部の肉厚を見積るのに一つの資料となるものと考えられる。しかしながら、実際の流出方向および翼列を通過する際の損失は、翼全体の形状の影響を受けてさまざまに異なるであろうから、ここで述べたことは単に尾部の肉厚の影響についてのみ議論しうるにすぎない。なお、計算および実験に当たって第 8 図(a)のように簡単化した境界の仮定を行っているから、後縁付近において曲りの強い翼型、あるいは翼のピッチ比が余り大きいような場合には、この結果は当てはまらないものと考えられる。

3. 曲りの大きい翼型に対する 流出方向の一例

タービン翼列のように曲りの大きい翼列に対する流出方向を的確に表わす実験式は、いまのところないようである。ここでは、この問題に対する一つの拠点を与える意味で行った一つの計算例について述べる。

まず、次式で表わされる写像関数を考えよう。

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{te^{i\beta_1'}}{2\pi} \left\{ \frac{1-i\sigma_1}{\zeta-(x_1+i\lambda_1)} + \frac{1+i\sigma_1}{\zeta-(x_1-i\lambda_1)} - \frac{1+i\sigma_2}{\zeta+(x_2-i\lambda_2)} - \frac{1-i\sigma_2}{\zeta+(x_2+i\lambda_2)} \right\} \zeta^{-\frac{\beta_1'+\beta_2'}{\pi}} \quad \dots\dots\dots(15)$$

ただし、 $\sigma_1, \sigma_2, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ は正の実数で、 $z=x+iy$ 、 $\zeta=\xi+i\eta$ である。また特異点の位置を表わす定数 $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ と σ_1, σ_2 の間には次の関数関係が成り立つものとする。

$$\left. \begin{aligned} x_1+i\lambda_1 &= e^{\frac{i\pi\beta_1'}{\beta_1'+\beta_2'}} (1-i\sigma_1)^{\frac{\pi}{\beta_1'+\beta_2'}} \\ -x_2+i\lambda_2 &= e^{\frac{i\pi\beta_1'}{\beta_1'+\beta_2'}} (1+i\sigma_2)^{\frac{\pi}{\beta_1'+\beta_2'}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここで ζ が実軸に沿って $\xi=-\infty$ から ∞ まで変化する際に z 面で描く図形について考えよう。式(15)の括弧の内を整理して分子を 0 とおくと、これは次の 2 次式であらわされる。

$$\left. \begin{aligned} a\xi^2 + b\xi + c &= 0, \\ a &= (x_1+x_2) + (\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2), \\ b &= (x_2^2 + \lambda_2^2) - (x_1^2 + \lambda_1^2) + 2(x_2\lambda_1\sigma_1 - x_1\lambda_2\sigma_2), \\ c &= (\lambda_1\sigma_1 - x_1)(x_2^2 + \lambda_2^2) + (\lambda_2\sigma_2 - x_2)(x_1^2 + \lambda_1^2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

上式の 2 根のうち、1 根は常に正、1 根は必ず負であることは比較的容易に証明され、それを ξ_A 、 $-\xi_0$ とする。そこで $\xi=-\infty \sim -\xi_0$ の間を考えると、この間では $dz/d\zeta$ の方向は変わらず、 z 軸に対し $-\beta_2'$ の方向をとる。 $\xi=-\xi_0 \sim 0$ の間は括弧の内の符号が負になるから $dz/d\zeta$ の方向は $(\pi-\beta_2')$ となり、 $\xi=0$ を通過する際には括弧の内の符号は変わらないが、

$\zeta^{-\frac{\beta_1'+\beta_2'}{\pi}}$ の方向が変り、 $dz/d\zeta$ は $(\pi+\beta_1')$ の方向をとる。さらに $\xi=\xi_A$ で括弧の内の符号は再び正となり $\xi=\xi_A \sim \infty$ の間は $dz/d\zeta$ の方向は β_1' となる。また式(16)の関係が成立つときは、式(15)で表わされる関数の ζ 面実軸上半面における留数の和が零なることより、 ζ 面の ξ 軸は z 面の閉じられた領域に写像されることが証明される。また式(15)右辺の $\zeta=x_1+i\lambda_1$ 、 $\zeta=-x_2+i\lambda_2$ における特異性により、 ζ 面の ξ 軸に対応する図形は z 面では y 軸方向に t の間隔をもって無限個数あらわれ、いわゆる翼列を構成することも明らかである。以上のことがらを総合すると、 ζ 面の ξ 軸は式(15)の写像関数によって第 13 図のごとく、折れ曲りのある線分の翼型により成立つ翼列へ等角に写像されることがわかる。さて、この

翼列に対し無衝突の方向に流入する際の流れの複素ポテンシャルを W とすると, W を ζ の関数として考えた場合, その前, 後縁対応点は式 (17) の根で与えられているのであるから, $dW/d\zeta$ は式 (15) の括弧の中の関数と同一にならざるを得ず, したがって, 無

衝突流入の場合の流入方向を x 軸に対し β_1° , 流出方向を $-\beta_2^\circ$ とすると,

$$\sigma_1 = \tan \beta_1, \quad \sigma_2 = \tan \beta_2$$

であることがわかる.

それゆえ, 翼型と ζ 面の実軸との対応は,

$$z = \frac{te^{i\beta_1'}}{2\pi} \left\{ \frac{1-i\tan\beta_1}{\xi-(x_1+i\lambda_1)} + \frac{1+i\tan\beta_1}{\xi-(x_1-i\lambda_1)} - \frac{1+i\tan\beta_2}{\xi+(x_2-i\lambda_2)} - \frac{1-i\tan\beta_2}{\xi+(x_2+i\lambda_2)} \right\} \cdot \xi^{-\frac{\beta_1'+\beta_2'}{\pi}} \cdot d\xi, \dots\dots\dots (18)$$

となる. 式 (18) は一般には積分不能であるが, $\beta_1' = \beta_2' = \pi/4$, かつ $\beta_1 = \beta_2$ の場合は積分できてその解は,

$$\begin{aligned} z = \frac{te^{i\frac{\pi}{4}}}{2\pi} & \left[\left\{ \sqrt{\frac{\varphi+x}{2}} - \tan\beta \sqrt{\frac{\varphi-x}{2}} \right\} \log \frac{q^2 + \varphi - 2q\sqrt{(\varphi+x)/2}}{q^2 + \varphi + 2q\sqrt{(\varphi+x)/2}} \right. \\ & - 2 \left\{ \tan\beta \sqrt{\frac{\varphi+x}{2}} + \sqrt{\frac{\varphi-x}{2}} \right\} \tan^{-1} \frac{2q\sqrt{(\varphi-x)/2}}{q^2 - \varphi} \\ & - \left\{ \sqrt{\frac{\varphi-x}{2}} + \tan\beta \sqrt{\frac{\varphi+x}{2}} \right\} \cdot \log \frac{q^2 + \varphi - 2q\sqrt{(\varphi-x)/2}}{q^2 + \varphi + 2q\sqrt{(\varphi-x)/2}} \\ & \left. + 2 \left\{ -\tan\beta \sqrt{\frac{\varphi-x}{2}} + \sqrt{\frac{\varphi+x}{2}} \right\} \cdot \tan^{-1} \frac{2q\sqrt{(\varphi+x)/2}}{q^2 - \varphi} \right] \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

この場合, 流れは y 軸に関し左右対称であるから,

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $x_1 = x_2 = x$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ とおき,

かつ $q = \sqrt{\xi}$, $\varphi = \sqrt{\lambda^2 + x^2}$ とおいてある. ところ

で, 前縁対応点 ξ_A および λ , x は式 (16), (17) に

よりすべて β のみの関数であるから, 上式にこれらの値を代入し, かつ第 13 図のごとく翼弦長さを $2l$ とし式 (19) を変形すると,

$$\begin{aligned} \frac{2l}{t} = -\frac{1}{2\pi} & \left[\log \frac{q_A^2 + 1 + \theta^2 - \sqrt{2}q_A(1+\theta)}{q_A^2 + 1 + \theta^2 + \sqrt{2}q_A(1+\theta)} \cdot \frac{q_A^2 + 1 + \theta^2 + \sqrt{2}q_A(1-\theta)}{q_A^2 + 1 + \theta^2 - \sqrt{2}q_A(1-\theta)} \right. \\ & \left. - 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}q_A(1-\theta)}{q_A^2 - (1+\theta^2)} + 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}q_A(1+\theta)}{q_A^2 - (1+\theta^2)} \right] \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

第 13 図 翼列図

ただし, $q_A^2 = \sqrt{\frac{(1+\theta^2)^3}{3-\theta^2}}$, $\theta = \tan \beta$.

となり, 第 14 図のごとく, そり角 90° , 左右対称なる翼型よりなる翼列のピッチ比 $t/2l$ と流出方向 β の関係が厳密に求められる. 第 14 図の実線は式 (20) の計算結果である. ただし同図で, $\Delta\beta$ は翼の後縁における切線方向から測った流出角を示す. $\Delta\beta \sim t/l$ の関係は翼列をなす翼型の形によって大きく変わるであろうから, 式 (20) で表わされる関係はその一例を示

すものにほかならないが, タービン翼列のように曲りの大きい翼列に対する流出方向は現在のところ理論的にも実験的にもほとんど知られていない. それゆえ式 (20) の値は, この種の翼列の流出方向算定に対して一つの参考になるものと考え. なお, 第 14 図に描いた 3 本の破線は, いずれも転向角約 110° なる衝動タービン翼に対する実験値を比較のために掲げたものであって, その詳細は筆者らの論文⁽⁴⁾ に述べられている. 破線に沿って記した符号は翼型を示すもので

第 14 図 流出方向とピッチ比

あって、そのおおよその形は前述の論文⁽⁴⁾に示されている。

なお、式 (15) の写像関数は $t/l \rightarrow 0$ の極限において Schwarz-Christoffel の写像を曲り流れに応用したものと一致し、 $t/l \rightarrow \infty$ の極限においては、同様の翼型に対する単独翼の写像関数⁽⁵⁾⁽⁶⁾と一致することもまた比較的容易に証明しうる。

注：—

- (1) 昭和 29 年 10 月 31 日 名古屋臨時大会講演会において講演，原稿受付 昭和 29 年 12 月 9 日。
- (2) 正員，川崎重工業会社。
- (3) F. Weinig, Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen, p. 118.
- (4) 藤田，窪田，機械学会論文集，20 巻 97 号 (昭 29)。
- (5) F. Keune, Auftrieb einer geknickten ebenen Platte, Lufo., (1936)。
- (6) C. Schmieden, Die Strömung um einen ebenen Tragflügel mit Querrader, Z.a.M.M. (1936)。

621.668.2

らせんみぞ粘性ポンプの理論⁽¹⁾

宮 津 純⁽²⁾

Theory of the Spiral-Groove type Viscosity Pump

by Atsush Miyadzu

This paper treats the theory of a viscosity pump with spiral groove. The rotating disc is in contact with the bed plate having the groove in shape of spiral. If the groove is narrow and shallow, and the liquid is viscous, the rotor is able to give the effective driving shear to the liquid, forcing it towards the centre of rotation.

Starting from viscosity law, the equation of pump characteristics have been deduced, and further developed for the grooves in shape of logarithmic spiral and spiral of Archimedes.

On the basis of characteristics drawn in the analysis, the optimum ratio of the radial distances of the inlet and outlet of the groove has been determined.

1. 緒 言

第1図に示すように固定台にらせん形のみぞを切りその上で密着させた別の円板を回わせば、これが作用面として作用し、みぞを通して油を外から内へ、あるいは更に高所へ送り込むことができる。この装置のことは既に文献にも記載されており、たとえば、Bosch⁽³⁾の著書には、らせんみぞの内部の圧力上昇が求めてありこの圧力によって二面の間に潤滑油が行きわたると記してある。Boschの記述は、流れがみぞを通り抜けられない状態に関するものであるのに対し、最近吉田稲次郎氏⁽⁴⁾は、この装置を潤滑油の送り込みに使った場合の、試作実験の結果につき講演されたことがある。筆者はその後吉田氏から、考察の参考となることをう

かがって、この特性を理論だけで考えてみたので、発表して批判と参考に供する次第である。

2. 作用に対する考察と前提

この装置 (ポンプ) は、みぞを回わしてその中に流れを起すものでなくて、みぞの上面に密着させた円板を回わして、みぞの中に流れを起すものであり、うず巻ポンプの羽根みぞの中の流れなどは、作用の性質が異なっている。すなわちこのみぞの中の流れは、回転板の表面摩擦によって起されるものであり、これが粘性ポンプであることに疑いはない。

粘性ポンプでも、普通にある、円みぞをもつ形式のものの特性は既にわかっているが、しかし、らせんみぞ形式のものは、固有の性質を具備するので、その作用および特性については、あらためて考えてみる必要がある。

回転板すきまの流れについて このすきまの流れに遠心効果がきいているとすれば、それによって起るみぞの中の流れにもその効果の加わることが考えられる。しかるにこの内向きポンプの作用を強めるには遠心効果は利かない方が望ましい。本文では、問題を

第1図 らせんみぞ粘性ポンプ