あって、そのおおよその形は前述の論文⁽⁴⁾に示されている。

なお、式 (15) の写像関数は $t/l \rightarrow 0$ の極限において Schwarz-Christoffel の写像を曲り流れに応用したものと一致し、 $t/l \rightarrow \infty$ の極限においては、同様の翼型に対する単独翼の写像関数⁽⁵⁾⁽⁶⁾と一致することもまた比較的容易に証明しうる。

注：—

- (1) 昭和 29 年 10 月 31 日 名古屋臨時大会講演会において講演，原稿受付 昭和 29 年 12 月 9 日。
- (2) 正員，川崎重工業会社。
- (3) F. Weinig, Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen, p. 118.
- (4) 藤田，窪田，機械学会論文集，20 巻 97 号 (昭 29)。
- (5) F. Keune, Auftrieb einer geknickten ebenen Platte, Lufo., (1936)。
- (6) C. Schmieden, Die Strömung um einen ebenen Tragflügel mit Querrader, Z.a.M.M. (1936)。

621.668.2

らせんみぞ粘性ポンプの理論⁽¹⁾

宮 津 純⁽²⁾

Theory of the Spiral-Groove type Viscosity Pump

by Atsush Miyadzu

This paper treats the theory of a viscosity pump with spiral groove. The rotating disc is in contact with the bed plate having the groove in shape of spiral. If the groove is narrow and shallow, and the liquid is viscous, the rotor is able to give the effective driving shear to the liquid, forcing it towards the centre of rotation.

Starting from viscosity law, the equation of pump characteristics have been deduced, and further developed for the grooves in shape of logarithmic spiral and spiral of Archimedes.

On the basis of characteristics drawn in the analysis, the optimum ratio of the radial distances of the inlet and outlet of the groove has been determined.

1. 緒 言

第1図に示すように固定台にらせん形のみぞを切りその上で密着させた別の円板を回わせば、これが作用面として作用し、みぞを通して油を外から内へ、あるいは更に高所へ送り込むことができる。この装置のことは既に文献にも記載されており、たとえば、Bosch⁽³⁾の著書には、らせんみぞの内部の圧力上昇が求めてありこの圧力によって二面の間に潤滑油が行きわたると記してある。Boschの記述は、流れがみぞを通り抜けられない状態に関するものであるのに対し、最近吉田稲次郎氏⁽⁴⁾は、この装置を潤滑油の送り込みに使った場合の、試作実験の結果につき講演されたことがある。筆者はその後吉田氏から、考察の参考となることをう

かがって、この特性を理論だけで考えてみたので、発表して批判と参考にする次第である。

2. 作用に対する考察と前提

この装置 (ポンプ) は、みぞを回わしてその中に流れを起すものでなくて、みぞの上面に密着させた円板を回わして、みぞの中に流れを起すものであり、うず巻ポンプの羽根みぞの中の流れなどは、作用の性質が異なっている。すなわちこのみぞの中の流れは、回転板の表面摩擦によって起されるものであり、これが粘性ポンプであることに疑いはない。

粘性ポンプでも、普通にある、円みぞをもつ形式のものの特性は既にわかっているが、しかし、らせんみぞ形式のものは、固有の性質を具備するので、その作用および特性については、あらためて考えてみる必要がある。

回転板すきまの流れについて このすきまの流れに遠心効果がきいているとすれば、それによって起るみぞの中の流れにもその効果の加わることが考えられる。しかるにこの内向きポンプの作用を強めるには遠心効果は利かない方が望ましい。本文では、問題を

第1図 らせんみぞ粘性ポンプ

そういう場合に限定することにする。そのような回転に対する解析の結果は本文中に記載のようであるが、問題はそのための条件を、具体的に規定することである。その資料として、遠心効果を見捨てた回転と、無視しない回転との相違を考えてみよう。このことは、筆者の前論文⁽⁵⁾にも記載したことで次のようである。

遠心力も含めた慣性効果としては、文中に記載した結果に、更に半径方向に向く流速 v_r と、円板に直角に向く流速 w とが附加される。それらの大きさは場所によって異なるが、総体的にいて、附加される v_r の程度は $r\omega^2\varepsilon^2/\nu$ 、 w の程度は $\omega^2\varepsilon^3/\nu$ である。また圧力は、層の厚さの方向に $\rho\omega^2\varepsilon^2$ 程度の変化を作る。全体的に遠心圧力も加わり、その大きさは $0.15\rho\omega^2r^2$ である。ここに ρ は流体密度、 ν は動粘性係数、 ω は回転板の角速度、 ε は円板すきまの大きさ、 r は半径を表わす。これらが無視できる状態では、このポンプ作用に不利な遠心効果は加わらないとみなしてよい。その制限を第一の条件として挙げれば次のようである。

(1) 回転板の半径および角速度は小さくなければならない。回転板のすきまの大きさはきわめて小さくなければならない。

実例に対する具体的な制限は、諸数値間の関係として定められるが、すきまを小さくすることは、内圧による漏れを小さくする効果をも、ともなって望ましいことである。

みぞの内部の流れについて このポンプによる流体の送り込みは、回転板のせん断によって起こされるが、みぞに生ずる流れは結局、慣性力、圧力、せん断力のつり合いとして定まるのであって、それを一般の場合について解析することは容易ではない。

らせんみぞの幅と深さとは相当大きくなれば、内向きのポンプ作用は起りにくくなると考えられる。すなわち、圧力は回転中心で高いとして、もしもみぞの流れに円板の回転による遠心力が利く状態ならば、それは内部への送り込みを困難にするからである。遠心力が利くにしろ、利かないにしろ、とにかく、内向きの流れが実際、みぞの中に起っているときは、内部へ向かうせん断力の効果は、大きいと考えねばならない。すなわち、このポンプ作用は、遠心効果に比べてより大きいせん断効果のもとに、行われているのである。これを解析するにあたり本文では、とくに次のようなものを考える。すなわち、円板の回転にもかかわらずみぞの中には、みぞに沿う内向きのおそい流れを生じ、その慣性効果と横断面内の二次流れは無視できる場合である。これを実現させる条件は次のように考えられる。

(2) 流体の粘性は大きいこと。粘性が弱くてはこのポンプ作用は、もともと起らない。

(3) みぞの横断面の形は任意でよいが、その寸法は回転半径に比べてきわめて小さいこと。

両端の開いた細いみぞの上面に、他の面を密着させ、それをみぞの上面に沿ってずらしても、みぞの中の粘い流体には、面の移動または回転速度がそのまま伝わることはない。みぞの内部には、上面のずれに基くせん断効果に加えられ、それと、圧力および慣性力のつり合いによって、流れが定まると考えられる。しかも、みぞは細く、粘性は強いので、みぞの横断面内の二次流れは抑制されて、みぞに沿う流れが生ずるであろう。このことは、みぞの中の流線とみぞの形とを一致するとみなすことである。こういう流れの流速流量は小さくならざるを得ないと考えられる。

みぞの横断面が大きいと、遠心効果が加わって、内向きのポンプ作用には不利になり、流線の形もみぞの形とは変ったものになるであろう。しかしどのような変るかわからないので、そういう状態は除外せざるを得ない。

(4) なお、みぞの横断面の寸法は、みぞの形の曲率半径に比べても小さいとする。この条件は、らせんみぞポンプの本質を変えるものでなく、しかも流れの曲率効果が無視できて解析が容易になるからである。すなわち、みぞの中の流れは直線みぞの流れと同じ扱いで近似できることになる。

3. 解析の方法

円板すきまの流体は回転し、みぞの中の流体はみぞに沿って流れる。いずれも、慣性効果が除かれた状態を考えているから、全領域を通じ、圧力とせん断力とのつり合いによって流れが定まる。

円板内面からみぞの内部を通じ、みぞに沿う成分流れを解析すれば、それによってポンプ特性が求められる。境界条件は、回転板の(みぞに沿う)速度成分である。みぞに直角な速度成分は、円板内面のすぐ近く(円板すきま ε ぐらいの間)だけで大きく、みぞの内部ではきわめて小さい(場合を考えている)。

この横向き速度の存在する部分では、二つの成分流れの総合として、流体は円板の回転方向に引き回される傾向が強く、したがってこの部分は、ポンプの送り込みを与える範囲(有効みぞ)にはならないとみる方がよい。有効みぞは、みぞ台に掘り込んだみぞそのものとするが適当である。ポンプ流量は、有効みぞの範囲で算定した流量である。

4. 作用速度一様でない粘性ポンプの基本特性

第2図は粘性ポンプの基本作用を示す図である。流れの方向に x をとり、作用面 $z=0$ と固定面 $z=\delta$ との間隔を一定として、作用速度 U も一定とすれば、 x 方向の速度 u は次式で与えられる⁽⁶⁾。

$$u = \frac{\delta - z}{\delta} U - \frac{z(\delta - z)}{2\mu} \frac{dp}{dx} \dots\dots\dots (1)$$

流量 q は

$$q = b \int_0^{\delta} u dz = b \left(\frac{1}{2} \delta U - \frac{\delta^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \right) \dots\dots\dots (2)$$

第 2 図 基本流れと記号

らせんみぞポンプの場合には、 q の積分は $z=\varepsilon$ (円板すきまの大きさ) から $z=\delta$ まで行わねばならないが、 ε はきわめて小さく、0 に近いとみている。

上式において、 b はみぞ幅、 μ は粘性係数、 p は圧力である。圧力 p は x のみの関数であるが、 U と δ とが一定ならば、 dp/dx 以外は x に無関係であるから、 dp/dx は x に関係なく一定となる。したがって出口と入口との圧力差を Δp 、みぞの長さを s 、揚程を h とすれば

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{s} = \frac{\gamma h}{s}$$

γ は流体の単位体積の重量である。これを (2) に入れて次式をうる。

$$q = \frac{1}{2} U b \delta - \frac{1}{12} \frac{\gamma h}{\nu s} \delta^3 b \dots\dots\dots (3)$$

ν は動粘性係数、 g は重力加速度で、 $\nu = \mu / \rho$ (ρ は流体密度で、 $\rho = \gamma / g$) の関係がある。ここまでは以前すでに求めている⁽⁷⁾。

さて、作用速度 U が みぞ に沿って変る場合にはみぞの中の流速は正しくは (1) 式ではあわせえないが、近似的には (1) は成立つとみてよからう。ただ U が x によって変るとすれば、 dp/dx は x の関数とみなければならない。軸と軸受との間の油の流れを論ずるにも、従来このような考え方が採用されている。軸受では、 U を一定として δ と dp/dx とを x の関数と考えるのに対して、今は δ を一定として、 U と dp/dx とを x の関数と考えるだけの相違である。(2) 式はそのまま成立ち、連続の関係から q は x には無関係、したがって U の変り方がわかれば、(2) 式を積分して出口 ($x=s$) と入口 ($x=0$) との圧力差 Δp を求めることができる。すなわち

$$q \int_0^s dx = \frac{1}{2} b \delta \int_0^s U dx - \frac{b \delta^3}{12\mu} \Delta p$$

書き直して

$$q = \frac{1}{2} b \delta \times \frac{1}{s} \int_0^s U dx - \frac{b \delta^3}{12\mu} \frac{\Delta p}{s}$$

このうち、作用速度の、みぞに沿う平均値を U_m とすれば

$$\frac{1}{s} \int_0^s U dx = U_m \dots\dots\dots (4)$$

また $\Delta p = \gamma h$ 、したがって

$$q = \frac{1}{2} U_m b \delta - \frac{1}{12} \frac{\gamma h}{\nu s} \delta^3 b \dots\dots\dots (5)$$

これを (3) 式と比較してわかるように、作用速度が場所によって変る粘性ポンプの流量は、その平均速度で一様に作用すると考えた流量にひとしくなる。

揚程は (5) 式を書き直して

$$h = \frac{12\nu s}{\gamma h \delta^3} \left(\frac{1}{2} U_m b \delta - q \right) \dots\dots\dots (6)$$

水動力 L_w は

$$L_w = \gamma q h = 12 \frac{\gamma \nu s}{g b \delta^3} \left(\frac{1}{2} U_m b \delta - q \right) q \dots\dots\dots (7)$$

また作用面の加えるせん断応力 τ は

$$\tau = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = \mu \left(\frac{U}{\delta} + \frac{\delta}{2\mu} \frac{dp}{dx} \right)$$

回転力 F は

$$F = \int_0^s \tau b dx = \mu s \frac{b}{\delta} U_m + \frac{1}{2} \gamma h \delta b \dots\dots\dots (8)$$

軸動力 L_s は

$$L_s = \int_0^s \tau b U dx = \frac{\mu b}{\delta} \int_0^s U^2 dx + \frac{1}{2} b \delta \int_0^s U \frac{dp}{dx} dx \dots\dots\dots (9)$$

であるが、(2) 式より

$$\frac{dp}{dx} = \frac{12\mu}{b \delta^3} \left(\frac{1}{2} U b \delta - q \right)$$

$$\therefore L_s = \frac{\gamma \nu}{g} \left(\frac{b}{\delta} \right) s \overline{U^2} + 6 \frac{\gamma \nu}{g} s \frac{U_m}{\delta^2} \left(\frac{1}{2} b \delta \overline{U^2} - q \right) \dots\dots\dots (10)$$

ただし

$$\overline{U^2} = \frac{\int_0^s U^2 dx}{s}, \quad U_m = \frac{\int_0^s U dx}{s} \dots\dots\dots (11)$$

ポンプ効率 η は

$$\eta = \frac{L_w}{L_s} = \frac{12 \frac{1}{b \delta^3} \left(\frac{1}{2} U_m b \delta - q \right) q}{\left(\frac{b}{\delta} \right) \overline{U^2} + 6 \frac{U_m}{\delta^2} \left(\frac{1}{2} b \delta \overline{U^2} - q \right)} = \frac{3(1-Q)Q}{4\alpha - 3Q} \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{ただし } Q = q / \left(\frac{1}{2} U_m b \delta \right), \quad \alpha = \overline{U^2} / U_m^2$$

効率を極大とする Q を Q_M 、極大効率を η_M とすれば

$$\left. \begin{aligned} Q_M &= \frac{2}{3} \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 - 3\alpha} \right) \\ \eta_M &= 2Q_M - 1 = \frac{4}{3} \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 - 3\alpha} \right) - 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

となる。とくに $\alpha=1$ ならば

$$Q_M = 2/3, \quad \eta_M = 1/3$$

これは作用速度が一定の場合、すなわち普通の粘性ポンプに該当するものである。

5. みぞの側壁を考慮した基本特性

前項の扱いには、みぞの側面を考慮していないが、(第2図)、実際には、第3図の DE , CF のように、みぞには側面があり、それが抵抗して流量を減らすように作用する。その補正は(2)式に係数 K_1 , K_2 を用いて次のようにあらわすことができる⁽⁸⁾。

第3図 側壁効果を示す図

$$q = \frac{1}{2} K_1 U b \delta - \frac{1}{2} K_2 \delta^3 b \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \dots\dots\dots (14)$$

ただし、係数 K_1 , K_2 はみぞの断面形、および作用面とみぞの表面のすきまによって定まる数で、あらかじめ計算して求めねばならない。

(14) 式を x について積分し、次の関係をうる。

$$q = \frac{1}{2} K_1 U_m \delta b - \frac{1}{12} K_2 \frac{gh}{\nu s} \delta^3 b \dots\dots\dots (15)$$

次に第3図における作用面 AB の加えるせん断応力は

$$\tau = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0}$$

これは AB 上において異なり、 y の関数としてあらわされるが、まずこれを AB 全体について加えると

$$\int_0^b \tau dy = T_1 \mu \frac{U}{\delta} b + \frac{1}{2} T_2 \delta b \frac{dp}{dx} \dots\dots\dots (19)$$

この係数 T_1 , T_2 は K_1 , K_2 と同様に、みぞの断面の形とすきま ε によって定まる値であり、あらかじめ計算によって求められる⁽⁹⁾。

したがって運動動力 L_s は

$$\begin{aligned} L_s &= \int_0^s U dx \int_0^b \tau dy \\ &= T_1 \mu \frac{b}{\delta} \int_0^s U^2 dx + \frac{1}{2} T_2 \mu \delta b \frac{1}{\mu} \int_0^s U \frac{dp}{dx} dx \end{aligned}$$

これに(14), (15)を用いて計算すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} L_s &= T_1 \mu \frac{b}{\delta} s U_m^2 \left[\frac{\bar{U}^2}{U_m^2} + 3 \frac{K_1 T_2}{K_2 T_1} \left\{ \frac{\bar{U}^2}{U_m^2} - \frac{1}{2} \right\} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} T_2 \mu \delta b \frac{gh}{\nu} U_m \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

ポンプが具体的に与えられると(15), (20)より特性はわかる。しかし、これらはポンプ作用の基本のところだけを考察したものであって、実際にはすきまからの漏れと、附属抵抗がある。それらは無視しても特性の大綱を変えないものもあるが、無視できるかどうかは、ポンプ自体の構造によって定まることである。

6. らせんみぞ粘性ポンプの漏れと附加抵抗

第1図に示すようならせんみぞポンプに、前項までの結果を適用したいのであるが、その前にまず、このポンプに固有な漏れと抵抗とを考察してみよう。

第4図 らせんに関する記号

第4図に示すように、みぞの入口は半径 r_0 の位置にあるとし、入口と回転中心 O とを結ぶ線を基線として、回転の方向に θ をとることとする。

漏れの算定 ポンプでいったん送り込まれた液は二面のすきまから外部へ漏れることが考えられる。このすきまの流れには、みぞの中の流れが干渉するとは考えられるが、全しゅう動面積に比べてみぞ幅が小さい場合には、この干渉を度外視して、一方が回転する二枚板からの漏れによって近似することができよう。

二枚板のすきまは小さいので、このすきまの流れは歯車ポンプの端面すきまにおけるものと同じように考えられ、とくに $\partial p / \partial \theta = 0$ の場合と考えられるから、流速は次のようにあらわしうる⁽¹⁰⁾。

$$\text{半径方向 } v_r = -\frac{1}{2\mu} (\varepsilon - z) z \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\text{回転方向 } v_\theta = \omega r \frac{\varepsilon - z}{\varepsilon}$$

ただし $z=0$ を回転面としている。

回転板の全外周から漏れる量 q_l は

$$q_l = \int_0^\varepsilon 2\pi r v_r dz = -\frac{1}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \pi r \varepsilon^3$$

$$\text{書き直せば } \frac{\partial p}{\partial r} r = -\frac{6\mu q_l}{\pi \varepsilon^3}$$

q_l は半径には無関係である。上式を積分して、みぞの入口 $r=r_0$ の圧力を $p=p_0$ とおけば

$$p = p_0 - \frac{6\mu q_l}{\pi \varepsilon^3} \log_e \frac{r}{r_0}$$

したがってみぞの出口の圧力は

$$p_i = p_0 - \frac{6\mu q_l}{\pi \varepsilon^3} \log_e \frac{r_i}{r_0}$$

これより

$$p_i - p_0 = -\frac{6\mu q_l}{\pi \varepsilon^3} \log_e (r_i/r_0) = r h$$

$$\therefore q_l = -\frac{\pi \varepsilon^3 \gamma h}{6\mu \log_e (r_i/r_0)} = -\frac{\pi}{6} \frac{gh \varepsilon^3}{\nu \log_e (r_i/r_0)} \dots\dots\dots (21)$$

したがって前項に求めた基本吐出し量 q と合せて、実際のポンプ吐出し量を q_r とすれば

$$q_r = q - q_l \dots\dots\dots(22)$$

右辺の q は (15) 式, q_l は (21) 式によって与えられる。

附加抵抗の算定 このポンプでは, 二枚板のうちの一方を回わすための抵抗が, ポンプ抵抗であって, 前項において求めた (19), (20) は, その中の一部分に当たっている。したがって附加抵抗としてここで加うべきものは, 全円板抵抗から, みぞの上面のポンプ作用に直接関係する動力を差し引いた残りである。この計算を厳密に行うことは困難であるが, ここでは, みぞの干渉を度外視した実用計算を行ってみよう。

二枚板の間の回転流速は

$$v_\theta = \omega r \frac{\varepsilon - z}{\varepsilon}$$

したがって回転に要する動力は

$$\begin{aligned} L_{s\delta} &= 2\pi\mu \int_{r_i}^{r_0} \left(-\frac{\partial v_\theta}{\partial z} v_\theta \right)_{z=0} r dr \\ &= \frac{1}{2} \pi \mu \frac{\omega^2}{\delta} (r_0^4 - r_i^4) \end{aligned}$$

このうち, まず幅 b の みぞ の上面に関する大きさを除く必要がある。それを $L_{s\delta b}$ とすれば

$$L_{s\delta b} = \int_0^s \mu \left(-\frac{\partial v_\theta}{\partial z} v_\theta \right)_{z=0} b dx$$

らせんの形が決まれば, x を r によってあらわしうから, $L_{s\delta b}$ は求めうる。この $L_{s\delta b}$ は回転に要する動力のうちの みぞ面 に相当するものである。そのうちで みぞ に沿う成分は, 前項の (20) 式で別に計算されることになるが, みぞに直角な成分は残しておかねばならない。

さて みぞ幅 の方向の流速成分は

$$v_\theta \cos \varphi = \omega r \frac{\varepsilon - r}{\varepsilon} \cos \varphi$$

で, この方向に対して要する動力を $L_{s\delta b\theta}$ とすれば

$$L_{s\delta b\theta} = \int_0^s \mu \left(-\frac{\partial v_\theta}{\partial z} v_\theta \right)_{z=0} b \cos^2 \varphi dx$$

したがって前項において求めた (20) 式に加算すべき動力 ΔL_s は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta L_s &= L_{s\delta} - L_{s\delta b} + L_{s\delta b\theta} \\ &= \frac{1}{2} \pi \frac{\gamma \nu}{g} \frac{\omega^2}{\varepsilon} (r_0^4 - r_i^4) - \mu b \int_0^s \left(-\frac{\partial v_\theta}{\partial z} v_\theta \right)_{z=0} \\ &\quad \times \sin^2 \varphi dx \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

7. らせんみぞポンプの特性

対数らせんみぞの場合 第4図において みぞ の形を対数らせんとして, 次式であらわす。

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0 e^{-a\theta} \\ a &= \cot \varphi = \text{一定} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

入口 ($r=r_0$) から みぞ の中心線に沿う長さ x は

$$x = \frac{1}{\cos \varphi} (r_0 - r), \quad r = r_0 - x \cos \varphi \dots\dots\dots(25)$$

となる。作用面の角速度は ω , 周速度は $V_\theta = r\omega$,

したがって みぞ に沿う作用速度 U は

$$U = V_\theta \sin \varphi = r\omega \sin \varphi = (r_0 - x \cos \varphi) \omega \sin \varphi$$

である。 U は x の増加につれて一様に減少するからその平均値は積分して求めるまでもなく, $x=s/2$ における値であらわされ

$$U_m = U_{x=s/2} = \left(r_0 - \frac{s}{2} \cos \varphi \right) \omega \sin \varphi$$

みぞの出口は半径 r_i の位置にあることから

$$\left. \begin{aligned} s = x_{r=r_i} &= \frac{1}{\cos \varphi} (r_0 - r_i) \\ &= \frac{r_0}{\cos \varphi} (1 - \lambda) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

ただし

$$\lambda = r_i / r_0$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} U_m &= \left(r_0 - \frac{r_0 - r_i}{2} \right) \omega \sin \varphi = \frac{r_0 + r_i}{2} \omega \sin \varphi \\ &= r_m \omega \sin \varphi = \frac{1}{2} r_0 \omega (1 + \lambda) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

r_m は入口と出口との平均半径 $r_m = (r_0 + r_i)/2$ である。(26), (27) を (22) に入れて吐出し量 q_r をうる。

$$\begin{aligned} q_r &= \frac{1}{4} K_1 (1 + \lambda) \sin \varphi \cdot r_0 \omega \delta b \\ &\quad - \frac{1}{12} \frac{gh}{\nu r_0} b \delta^3 \left\{ \frac{\cos \varphi}{1 - \lambda} K_2 - \frac{2\pi}{\log_e \lambda} \frac{r_0}{b} \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^3 \right\} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} h &= \frac{12\nu r_0}{gb\delta^3} \frac{1}{\left\{ \frac{\cos \varphi}{1 - \lambda} K_2 - \frac{2\pi}{\log_e \lambda} \frac{r_0}{b} \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^3 \right\}} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{4} K_1 (1 + \lambda) r_0 \omega b \delta \sin \varphi - q_r \right\} \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{L_w}{\gamma \nu r_0^3 \omega^2} &= 12 \frac{b}{\delta} \frac{1}{\left\{ \frac{\cos \varphi}{1 - \lambda} K_2 - \frac{2\pi}{\log_e \lambda} \frac{r_0}{b} \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^3 \right\}} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{4} K_1 (1 + \lambda) \sin \varphi - \frac{q_r}{r_0 b \delta \omega} \right\} \frac{q_r}{r_0 b \delta \omega} \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

動力に関しては, まず (20) の L_s を求めれば,

$$U = \omega r \sin \varphi = (r_0 - x \cos \varphi) \omega \sin \varphi$$

$$U_m = r_m \omega \sin \varphi$$

$$U^2 = \frac{1}{s} \int_0^s U^2 dx = \frac{1}{3} \omega^2 r_0^2 (1 + \lambda + \lambda^3) \sin^2 \varphi$$

$$U_m^2 = \frac{1}{4} \omega^2 r_0^2 (1 + \lambda)^2 \sin^2 \varphi$$

$$\frac{\overline{U^2}}{U_m^2} = \frac{4}{3} \times \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2}$$

$$\frac{L_s}{\gamma \nu r_0^3 \omega^2} = \frac{1}{4} T_1 \left(\frac{b}{\delta} \right) \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right) (1 - \lambda)$$

$$\times \left\{ \frac{4}{3} (1 + \lambda + \lambda^2) + \frac{1}{2} (5 + 2\lambda + 5\lambda^2) \frac{K_1 T_2}{K_2 T_1} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} T_2 \left(\frac{b}{\delta} \right) (\sin \varphi) (1 + \lambda) \\
& \times \frac{1}{\left\{ \frac{\cos \varphi}{1 - \lambda} K_2 - \frac{2\pi}{\log_e \lambda} \frac{r_0}{b} \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^3 \right\}} \\
& \times \left\{ \frac{1}{4} K_1 (1 + \lambda) \sin \varphi - \frac{q_r}{r_0 b \delta \omega} \right\} \dots\dots\dots (30)
\end{aligned}$$

次に (23) の ΔL_s を計算すれば

$$\frac{\Delta L_s}{\frac{\gamma \nu}{g} r_0^3 \omega^2} = \frac{1}{2} \pi \frac{r_0}{\varepsilon} (1 - \lambda^4) - \frac{1}{3} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right) \frac{b}{\varepsilon} (1 - \lambda^3) \dots\dots\dots (31)$$

ゆえに全体の軸動力 L_{st} は

$$\frac{L_{st}}{\frac{\gamma \nu}{g} r_0^3 \omega^2} = \frac{L_s + \Delta L_s}{\frac{\gamma \nu}{g} r_0^3 \omega^2} = [(30) \text{式} + (31) \text{式}] \dots\dots\dots (32)$$

ポンプ効率 η は

$$\eta = \frac{L_w}{L_{st}} = \left[\frac{(29) \text{式}}{(32) \text{式}} \right]$$

より求められる。

アルキメデスらせんみぞの場合 第4図の みぞの形状をアルキメデスらせんとして次式であらわす。

$$\begin{aligned}
r &= r_0 - k\theta \dots\dots\dots (33) \\
k &= (r_0 - r_i)/\theta
\end{aligned}$$

ここに θ は入口 (r_0) から出口 (r_i) までの回転角である。

$$dx = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} d\theta = -\frac{1}{k} \sqrt{r^2 + k^2} dr$$

$r = r_0 (\theta = 0)$ で $x = 0$ とすれば

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2k} (r_0 \sqrt{r_0^2 + k^2} - r \sqrt{r^2 + k^2}) + \frac{1}{2} k \log_e \\
& \frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 + k^2}}{r + \sqrt{r^2 + k^2}} \dots\dots\dots (34)
\end{aligned}$$

みぞの全長 s は

$$\begin{aligned}
s &= x_{r=r_i} = \frac{1}{2k} (r_0 \sqrt{r_0^2 + k^2} - r_i \sqrt{r_i^2 + k^2}) \\
& + \frac{1}{2} k \log_e \frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 + k^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + k^2}} \dots\dots\dots (35)
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\tan \varphi &= -r \frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{k} (r_0 - k\theta) = r/k \\
U &= V_\theta \sin \varphi = r\omega \sin \varphi = \omega r^2 / \sqrt{r^2 + k^2} \dots\dots\dots (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_m &= \frac{1}{s} \int_0^s U dx = \frac{\omega}{3ks} (r_0^3 - r_i^3) \\
&= \frac{1}{3} \omega r_0 \left(\frac{r_0}{k} \right) \left(\frac{r_0}{s} \right) (1 - \lambda^3) \dots\dots\dots (37)
\end{aligned}$$

ただし $\lambda = r_i/r_0$

$$q_r = \frac{1}{6} K_1 \left(\frac{r_0}{k} \right) \left(\frac{r_0}{s} \right) (1 - \lambda^3) r_0 \omega \delta b - \frac{1}{12} K_2 \frac{gh}{\nu s} \delta^3 b$$

U_m, s はわかったから (15) 式の q がわかり、これと (21) の q_i より、 $q_r (= q - q_i)$ がわかり、したがって $L_w / \frac{\gamma \nu}{g} r_0^3 \omega^2$ は書き下せるが、省略する。

次に

$$\begin{aligned}
\bar{U}^2 &= \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\omega^2 r^4}{r^2 + k^2} dx = -\frac{\omega^2}{ks} \int_{r_0}^{r_i} \frac{r^4}{\sqrt{r^2 + k^2}} dr \\
&= \frac{1}{4} \omega^2 r_0^2 \left(\frac{r_0}{k} \right) \left(\frac{r_0}{s} \right) \left[3 \left(\frac{k}{r_0} \right)^3 \left(\frac{s}{r_0} \right) - \left\{ 3 \left(\frac{k}{r_0} \right)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 1 \right\} \sqrt{1 + \left(\frac{k}{r_0} \right)^2} + \lambda \left\{ 3 \left(\frac{k}{r_0} \right)^2 - \lambda^2 \right\} \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{k}{r_0} \right)^2} \right] \\
\frac{\bar{U}^2}{U_m^2} &= \frac{9}{4} \left(\frac{k}{r_0} \right) \left(\frac{s}{r_0} \right) \frac{1}{(1 - \lambda^3)^2} \left[3 \left(\frac{k}{r_0} \right)^3 \left(\frac{s}{r_0} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left\{ 3 \left(\frac{k}{r_0} \right)^2 - 1 \right\} \sqrt{1 + \left(\frac{k}{r_0} \right)^2} \right. \\
& \quad \left. + \lambda \left\{ 3 \left(\frac{k}{r_0} \right)^2 - \lambda^2 \right\} \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{k}{r_0} \right)^2} \right] \dots\dots\dots (38)
\end{aligned}$$

L_{ss} は前と変わらないが、(23) の ΔL_s は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta L_s}{\frac{\gamma \nu}{g} \omega^2 r_0^3} &= \frac{1}{2} \pi \frac{r_0}{\varepsilon} (1 - \lambda^4) \\
& - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{\varepsilon} \right) \left(\frac{k}{r_0} \right) \left[\left(\frac{r_0}{k} \right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{k}{r_0} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{r_0}{k} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. \lambda \left\{ \lambda^2 + \left(\frac{k}{r_0} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} - 4 \left\{ 1 + \left(\frac{k}{r_0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. + 4 \lambda \left\{ \lambda^2 + \left(\frac{k}{r_0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + 3 \left(\frac{k}{r_0} \right) \left(\frac{s}{r_0} \right) \right] \dots\dots\dots (39)
\end{aligned}$$

したがって $L_{st} = L_s + \Delta L_s$ がわかり、ポンプ効率 $\eta (= L_w/L_s)$ も書き下せるが、省略する。

8. 実用特性式

板面すきまからの漏れが無視できる場合には、前項までに求めた式は簡単になる。

揚程

$$h = \frac{12\nu s}{K_2 g \delta^3 b} \left(\frac{1}{2} K_1 U_m \delta b - q_r \right) = 6 \frac{K_1 \nu s}{K_2 g} \frac{U_m}{\delta^2} (1 - Q)$$

$$\text{ただし } Q = q_r / \frac{1}{2} K_1 U_m \delta b$$

水動力

$$\begin{aligned}
L_w &= \frac{12\gamma \nu s}{K_2 g \delta^3 b} \left(\frac{1}{2} K_1 U_m \delta b - q_r \right) q_r = 3 \left(\frac{K_1^2}{K_2} \right) \\
& \times \frac{\gamma \nu s b}{g} \frac{U_m^2}{\delta} (1 - Q) Q
\end{aligned}$$

前項までに求めた軸動力の算式は見通しにくい形になっているが、みぞ幅 b が小さい場合には (23) の第1項のみによって近似されそうに思われる。これは二枚板の一方だけ回転させる場合の動力で近似できるということである。このことは、みぞ面に比べてしゅう動面が大きいと、直接のポンプ動力が減少して附加動力のみ増大するという関係から来ている。しかるときは

$$L_{st} = L_{ss} = \frac{1}{2} \pi \frac{\gamma \nu}{g} \frac{\omega^2 r_0^4}{\delta} (1 - \lambda^4)$$

したがって

$$\eta = \frac{L_w}{L_{st}} = \frac{6}{\pi} \left(\frac{K_1^2}{K_2} \right) b_s U_m^2 \frac{1}{(1-\lambda^4)} \frac{1}{\omega^2 r_0^4} \times (1-Q)Q$$

となる。

この特性曲線は第5図のようになる。吐出量 q_r にたいし、 h は直線的に減少し、 L_{st} は一定、 L_w と η とは放物線状である。

しかも、上式から、具体的な特性は λ に関係して定まることがわかる。

いま、らせんみぞの入口を半径 r_0 の位置においたとして、出口をおく半径 r_i によって特性がどのように変るかを吟味しよう。

第5図 らせんみぞ粘性ポンプの特性曲線

(1) 最大揚程の問題 第5図からわかるように吐出量のない状態において揚程は最大で、それは

$$h_M = h_{qr=0} = 6 \frac{K_1}{K_2} \frac{\nu s U_m}{g \delta^2}$$

で与えられる。 s と U_m とは r_i の関数(したがって λ の関数)であるから、 h_M を大きくするには $s U_m$ を大きくするよう、 r_i を定むればよい。

対数らせんの場合には (26), (27) 式より

$$s U_m = \frac{1}{2} r_0^2 \omega (1-\lambda^2) \tan \varphi$$

したがって

$$h_M = 3 \frac{K_1}{K_2} \frac{\nu}{g \delta^2} r_0^2 \omega (1-\lambda^2) \tan \varphi$$

$$h_M / (h_M)_{\lambda=0} = 1 - \lambda^2$$

これは第6図に示すように $\lambda=0$ ($r_i=0$) で極大である。すなわち内半径 r_i を小さくするほど h_M は大きくなり、その最大値は

$$h_{Mg} = (h_M)_{\lambda=0} = 3 \frac{K_1}{K_2} \frac{\nu}{g \delta^2} r_0^2 \omega \tan \varphi$$

である。

アルキメデスらせんの場合には

$$s U_m = \frac{1}{3} \frac{\omega r_0^3}{k} (1-\lambda^3) = \frac{1}{3} \frac{r_0^3}{k} \omega (1-\lambda^3)$$

$$h_M = 2 \frac{K_1}{K_2} \frac{\nu}{g \delta^2} \frac{r_0^3 \omega}{k} (1-\lambda^3)$$

$$h_M / (h_M)_{\lambda=0} = 1 - \lambda^3$$

これも第6図に示すように、 $\lambda=0$ ($r_i=0$) で極大値をとり、 h_M の極大値は

$$h_{Mg} = (h_M)_{\lambda=0} = 2 \frac{K_1}{K_2} \frac{\nu}{g \delta^2} \frac{r_0^3 \omega}{k}$$

(2) 最大水動力の問題 水動力を最大とする Q は第5図より $Q=1/2$, すなわち $q_r = K_1 U_m \delta b / 4$ のときであり、その水動力は

$$L_{wM} = \frac{3}{4} \frac{K_1^2}{K_2} \frac{\gamma \nu b}{g \delta} s U_m^2$$

これを大きくするには $s U_m^2$ を大きくしなければならない。

対数らせんの場合には

$$s = \frac{r_0}{\cos \varphi} (1-\lambda) \quad U_m = \frac{1}{2} r \omega (1+\lambda) \sin \varphi$$

第6図 半径比 λ と最大揚程 第7図 半径比 λ と最大水動力との関係

$$s U_m^2 = \frac{1}{4} r_0^2 \omega^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right) (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

$$L_{wM} = \frac{3}{16} \frac{\gamma \nu b}{g \delta} \frac{K_1^2}{K_2} r_0^2 \omega^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right) (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

$$L_{wM} / (L_{wM})_{\lambda=0} = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

これは第7図から明らかなように、 $\lambda=1/3$ で極大となり、 L_{wM} の最大値 L_{wMg} は

$$L_{wMg} = \frac{2}{9} \frac{\gamma \nu b}{g \delta} \frac{K_1^2}{K_2} \lambda_0^3 \omega^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right)$$

アルキメデスらせんの場合には

$$s = \frac{r_0^2}{2k} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{k}{r_0} \right)^2} - \lambda \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{k}{r_0} \right)^2} \right) + \frac{1}{2} k \log_e \frac{1 + \sqrt{1 + (k/r_0)^2}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + (k/r_0)^2}}$$

$$U_m = \frac{1}{3} \frac{r_0^3}{k} \omega \frac{1}{s} (1-\lambda^3)$$

$$s U_m^2 = \frac{1}{9} \frac{r_0^6}{k^2} \omega^2 \frac{1}{s} (1-\lambda^3)^2$$

式を簡単に扱うために、 k の小さい場合のみをとってみその全長を

$$s = \frac{r_0^2}{2k} (1-\lambda^2)$$

と近似すれば

$$s U_m^2 = \frac{2}{9} \frac{r_0^4 \omega^2}{k} \frac{(1-\lambda^3)^2}{1-\lambda^2}$$

$$L_{wM} = \frac{1}{6} \frac{\gamma \nu b}{g \delta} \frac{K_1^2}{K_2} \frac{r_0^4 \omega^2}{k} \frac{(1-\lambda^3)^2}{1-\lambda^2}$$

$$L_{wM} / (L_{wM})_{\lambda=0} = (1-\lambda^3)^2 / (1-\lambda^2)$$

第7図に示すように、この曲線も $\lambda=0.366$ に山をもち、 L_{wM} の極大値は

$$L_{wMg} = 0.174 \frac{K_1^2}{K_2} \frac{\gamma \nu b}{g \delta} \frac{r_0^4 \omega^2}{k}$$

となる(第7図)。

(3) 極大効率の問題 効率の極大値も $Q=1/2$ のときであり

$$\eta_M = \frac{3}{2\pi} \frac{K_1^2}{K_2} \frac{b}{r_0^4 \omega^2} \frac{sU_m^2}{(1-\lambda^4)}$$

対数らせんの場合には

$$\frac{sU_m^2}{(1-\lambda^4)} = \frac{1}{4} r_0^3 \omega^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right) \frac{1+\lambda}{1+\lambda^2}$$

$$\eta_M = \frac{3}{8\pi} \frac{K_1^2}{K_2} \frac{b}{r_0} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right) \left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda^2} \right)$$

$$\eta_M / (\eta_M)_{\lambda=0} = (1+\lambda) / (1+\lambda^2)$$

これは第8図に示すように $\lambda=0.414$ で極大となり、 η_M の最大値は

$$\eta_{Mg} = 0.144 \left(\frac{K_1^2}{K_2} \right) \left(\frac{b}{r_0} \right) \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right)$$

アルキメデスらせんの場合には

$$\frac{sU_m^2}{(1-\lambda^4)} = \frac{2}{9} \frac{r_0^4 \omega^2}{k} \frac{(1-\lambda^3)^2}{(1-\lambda^2)(1-\lambda^4)}$$

$$\eta_M = \frac{1}{3\pi} \frac{K_1^2}{K_2} \left(\frac{b}{k} \right) \frac{(1-\lambda^3)^2}{(1-\lambda^2)(1-\lambda^4)}$$

$$\frac{\eta_M}{(\eta_M)_{\lambda=0}} = \frac{(1-\lambda^3)^2}{(1-\lambda^2)(1-\lambda^4)} = \frac{(1+\lambda+\lambda^2)^2}{(1+\lambda)^2(1+\lambda^2)}$$

これは第8図に示すとおりで、 $\lambda=1$ において最大である。したがって η_M の最大値は

$$\eta_{Mg} = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{K_1^2}{K_2} \right) \left(\frac{b}{k} \right)$$

η_M は λ に対して第8図のように変化するが、その変化は対数らせんの場合に20%以下、アルキメデスらせんの場合に12%以下で、 λ の全範囲における変化はあまり大きくない。

以上を要するに、最大水 第8図 半径比 λ と最大
動力 (L_{wM}) には $\lambda=0.3 \sim$
0.4 に山があり、 $\lambda=0.5$ 以上ではその低下が著しい。
最大揚程 (h_M) には山はないが、 $\lambda=0.5$ 以上ではや
はりその低下は著しい。最大効率については λ による
変化はあまり大きくない。

これよりすれば、ポンプの外半径一定の場合、内半径は外半径の半分以下にすれば性能に著しい低下はなく、最大揚程は内半径の小さいほど、最大水動力は半

径比 $0.3 \sim 0.4$ のとき、最も大きくなる。

9. 結 言

本文は、らせんみぞ内向きポンプの作用と特性を理論的に考察したものである。

これが粘性ポンプであることに問題はないが、回転の遠心効果が流体に強くおよぶようでは、内向きのポンプ作用は、起らないか弱くなる。回転板をみぞの表面に密着させ、みぞの横断面を小さく、粘性の大きい流体を用いれば、附着と粘性によって遅い、せん断効果の利く流れがおこり、内向きのポンプ作用も可能になると考えられる。そのようならせんみぞのポンプ特性を解析している。

基本事項として、まず粘性ポンプの作用速度が一樣でないもの(場所により変っているもの)の特性式を一般の形でみちびき、それに附加さるべき、らせんみぞポンプ固有の、漏れと抵抗を算定した。

次に、対数らせんとアルキメデスらせんの みぞについて、特性式を具体的な形で求め、結果を見やすくするため、漏れを無視し所要動力に妥当な近似値をとって特性曲線を示した。

それを基礎として、特性を向上させるための、みぞの両端の半径比を求めれば 0.5 以下、とくに $0.3 \sim 0.4$ となる。すなわち、出口半径(第1図)は入口半径の 0.5 以下にすれば、特性の低下はなく、とくに $0.3 \sim 0.4$ ぐらいでわずかながらすぐれた状態になる。

注:—

- (1) 昭和29年4月6日第31期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和29年10月15日。
- (2) 正員、東京大学生産技術研究所。
- (3) ten Bosch, Vorlesungen über Maschinenelemente, 2版, p. 271.
- (4) 吉田稲次郎, 機械学会桐生地方講演会(昭27)。
- (5) 機械学会論文集, 18巻69号, 81ページ(昭27)。
- (6) 機械学会論文集, 6巻22号, III-15ページ(昭15-2)。
- (7) 機械学会論文集, 5巻18号, 109ページ(昭14-2)。
- (8) 機械学会論文集, 13巻43号, 101ページ(昭22-1), および浅沼強, 機械学会論文集, 17巻60号, 119ページ(昭26)。
- (9) 注(6)に同じ。
- (10) 注(5)に同じ。

本論文の内容は注(5)~(10)を基礎としているが、記号は止むを得ず変えたものもある。

第8図 半径比 λ と最大効率との関係