621—52 : 621—531.8

圧力制御系における時間おくれの一例⁽¹⁾

—— 検出の時間おくれ ——

藤 井 澄 二⁽²⁾ 堀 幸 夫⁽³⁾

An Example of Time Lag in Pressure Control Systems

——Time Lag in Measuring Means——

by Sumiji FUJII and Yukio HORI

In pressure control systems, for example as shown in Fig. 1, we sometimes experience that when the initial disturbance in pressure is smaller than a certain limit the system is stable and the pressure fluctuation diminishes, but when the initial disturbance is larger than the critical limit the system is unstable and the pressure fluctuation grows.

The author treated this phenomenon as caused by the non-linear resistance of flow in the pipe connecting the measuring element (diaphragm) and controlled medium (air in tank). And he found that the critical value of pressure disturbance mentioned above was given as

$$A = \frac{3\pi}{8} \frac{b\sqrt{a}}{K\sqrt{k^3}},$$

supposing the resistance being proportional to the square of velocity of flow in the pipe, where a , b are constants in expression (2) showing the characteristics of controlled medium, K is the coefficient of resistance of flow as in expression (1) and k is also a constant in expression (3) showing the characteristics of servomotor.

は し が き

自動制御装置において種々の時間おくれのためにハンティングが起ることはよくあることであるが、ここでは空気圧力制御の場合の一例についてのべる。すなわち負荷のいかにかわらずタンク（被制御部）の圧力を一定に保てようとする第1回のごとき装置において、最初の負荷の変動（圧力に対するかく乱）が小さければ制御系はハンティングをおこすことなく落ちつくが、最初の負荷の変動がある値より大きいと制御系はハンティングを起して圧力がどうしても定常にならないという場合が起る⁽⁴⁾。このありさまを第2図に示す。これは実際問題においてきわめて重要なことであって制御系の設計に当っては予想されるいかなるかく乱も上記の限界以内に入らなければならないのはもちろんである。

これらの現象は以下にのべるように、被制御部と検出部の圧力間の時間おくれ、あるいはそれらを結ぶパイプ内の流動抵抗の非線型性にもとづくものとして説明することができる。

1. 検出部内の圧力

被制御部内の圧力を P , 検出部内の圧力を p とす

第 1 図

第 2 図

れば近似的に次のような式が成立すると考えられる。

$$K \left| \frac{dp}{dt} \right| \left| \frac{dp}{dt} \right| = P - p \quad K > 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

これは被制御部と検出部の間の圧力差がそれらを結ぶパイプ内の空気の流速の二乗に比例し、かつ dp/dt と $P - p$ が常に同じ符号を有することを示している。 K はパイプの流動抵抗、検出部の容積などに関係する定数である。空気の慣性などは省略してある。

2. 被制御部の特性式

被制御部の特性は、だいたい次のような式で表わされると仮定する。

$$a\ddot{P} + b\dot{P} = \mu - \eta \quad a > 0, b > 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし a, b はともに定数、 P は被制御部内の圧力、 μ は操作部のうごき、 η はかく乱の大きさである。この場合 η は一定と考えておく。

3. 操作部の特性

操作部のうごきを μ とし検出部内の圧力を p とすれば次のような関係があるとする。

$$-\dot{\mu} = kp, \quad k > 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 k はパイロットバルブの特性を示す定数である。

4. 制御方程式の作製

上記の三式 (1), (2), (3) から制御方程式をうるのであるが、その前に簡単のため K は十分小さいものとして (1) 式を近似的に次のように書きなおしておく。

$$p = P - K \left| \frac{dP}{dt} \right| \left| \frac{dP}{dt} \right| \quad \dots\dots\dots (1)'$$

(2) 式を時間 t について微分し、それに (3) の関係によって (1)' 式を代入すると次の式が得られる。

$$a\ddot{P} + (b - Kk|\dot{P}|)\dot{P} + kP = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

これが被制御部の圧力変動を表わす微分方程式である。これは圧力変動の速さ $|\dot{P}|$ に比例する（したがってある意味で圧力変動の振幅と角速度に比例する）時間おくれのある振動系を表わしているとみなすことが出来る。ただし以上の計算の過程から明らかなように簡単のためパイプの抵抗以外には非線型性がないものと仮定してある。

5. 制御方程式の安定性

方程式 (4) の近似解を求めるには種々の方法があるが、ここでは Kryloff-Bogoliuboff の方法を用いてみる⁶⁾。すなわち (4) 式において第 2 項が十分小さいと仮定し (4) 式の解が近似的に次の形で与えられると仮定する。

$$P = A(t) \sin[\omega t + \phi(t)] \quad \dots\dots\dots (5)$$

振幅 A および位相角 ϕ は時間の関数ではあるがそれらの時間的変化の割合は (4) 式の第 2 項が十分小さい

という仮定から十分ゆっくりであると考えられる。このようなときには A および ϕ の時間的変化の割合は次の式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a} (b - Kk|A\omega \cos \phi|) \\ &\quad \times A\omega \cos \phi \cdot \cos \phi d\phi \\ &= -\frac{A}{a} \left(\frac{1}{2}b - \frac{4}{3} \frac{Kk\omega A}{\pi} \right) \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{2\pi\omega A} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a} (b - Kk|A\omega \cos \phi|) \\ &\quad \times A\omega \cos \phi \cdot \sin \phi d\phi \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

これらの式から (4) 式の解の安定性が容易に判別出来る。すなわち振幅 A の増大減少は (6) における dA/dt の正負によって決定されるから

$$\left. \begin{aligned} \text{i) } A &> \frac{3b\pi}{8Kk\omega} \text{ ならば 不安定となり} \\ \text{ii) } A &< \frac{3b\pi}{8Kk\omega} \text{ ならば 安定となる.} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

近似的に $\omega = \sqrt{k/a}$ とおけるなら (7) 式はそれぞれ

$$A \gtrless \frac{3\pi}{8} \frac{b\sqrt{a}}{K\sqrt{k}} \quad \dots\dots\dots (7)'$$

のように書くことも出来る。

(7)' 式からわかることは安定な範囲を広くするにはできるだけ a, b を大きくし K, k を小さくすればよいということである。これに反して、たとえば第 1 図の検出部のコックを締めて K を大きくしたりすると——本論文では特に K に注目したいのであるが——わずかなかく乱に対しても容易にハンティングを起させることができる。したがって制御系の設計に当っては K を出来るだけ小さくするようにパイプを太くしたり短くしたりすることが必要になる。このことはパイプを通る流体が液体のように抵抗の大きいものである場合には特に注意しなければならない。

結 語

以上に述べたことを要約すると次のようになる。

(1) 第 1 図に示すような制御系ではその安定性がかく乱の大きさによって異なるが、それは被制御部と検出部を連ねるパイプ中の流動抵抗の非線型性によるものである。あるいは被制御部と検出部の圧力間の時間おくれによるといってもよい。そのために不安定なリミットサイクルが生ずるのである。

(2) 第 1 図に示すような制御系で、その安定な範囲を大きくするためには被制御部と検出部を連ねるパイプの抵抗 K を小さくしなければならない。

附 録

上に述べたのとは別のもう一つの近似法について述べる。

今、被制御部内の圧力が $P = P_0 \sin \omega t$ のように正

弦的に変化していると仮定してそのときの検出部内の圧力 p の変化を調べてみる。(1) 式によれば

$$K \left| \frac{dp}{dt} \right| \frac{dp}{dt} = P_0 \sin \omega t - p \quad \dots\dots\dots (a)$$

をうるが簡単のためこれを

$$K\beta \frac{dp}{dt} = P_0 \sin \omega t - p \quad \beta > 0 \text{ 定数} \quad \dots\dots\dots (b)$$

とおき、その解を

$$p = Q \sin(\omega t - \varepsilon) \quad \text{周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \dots\dots\dots (c)$$

と仮定しておく。(a) 式と (b) 式をエネルギー的に等価にするため

$$\int_0^T \left| \frac{dp}{dt} \right| \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dp}{dt} dt = \int_0^T \beta \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dp}{dt} dt \quad \dots\dots\dots (d)$$

とおいてみると

$$\beta = \frac{8}{3\pi} \omega Q \quad \dots\dots\dots (e)$$

となり、更におくれ ε が小さいときには ε および Q が次のように求まる。

$$\varepsilon = \frac{8}{3\pi} K \omega^2 P_0, \quad Q = P_0 \quad \dots\dots\dots (f)$$

このようなおくれがあるものとして (3) 式を

$$-\dot{\mu}(t) = k p(t) = k P_0 \left(t - \frac{\varepsilon}{\omega} \right) \quad \dots\dots\dots (g)$$

とかけば制御方程式は次のようになる。

$$a\ddot{P} + b\dot{P} + kP \left(t - \frac{\varepsilon}{\omega} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (h)$$

ただし (g), (h) 式において括弧の中は時刻を示している。(h) 式をが小さいとして書きなおすと

$$a\ddot{P} + \left(b - k \frac{\varepsilon}{\omega} \right) \dot{P} + kP = 0 \quad \dots\dots\dots (h)'$$

となる。これが定常振動を表わすためには

$$b = k \frac{\varepsilon}{\omega} \quad \dots\dots\dots (i)$$

となるべきであって、そのときの振動の角速度は

$$\omega = \sqrt{k/a} \quad \dots\dots\dots (j)$$

となる。(i), (j) および (f) から、定常振動をうる振幅が次のように求まる。

$$P_0 = \frac{3\pi b \sqrt{a}}{8K \sqrt{k^3}} \quad \dots\dots\dots (k)$$

これは (7)' 式に得た結果と一致している。

なお、明らかなことではあるが、本文では圧力変動の速さに比例する時間おくれで近似し、附録では振幅のみに比例する時間おくれで近似したことになっている。

注：一

(1) 昭和 27 年 3 月 1 日 第 535 回講演会において講演、原稿受付 昭和 29 年 5 月 31 日。

(2)(3) 正員、東京大学工学部。

(4) 藤井・川口・堀：自動制御に関する研究 (1) 昭和 26 年。

(5) Minorsky: Non-linear Mechanics, 1947, p. 186.

(459 ページ, ニュースつづき) サッターシユル造型機 Sp-1100 の仕様

パタン寸法	26×41 in
パタン許容高さ	12 in 最大
空気圧	90~100 lbs/in ²
所要平均空気容積 (毎分当り)	44.5 ft ³ (90 lbs/in ²)
所要最大時間空気容積 (毎分当り)	79 ft ³ (90 lb/in ²)
電 源	220 V, 3 P, 50 ㏪
所要電力 (ガス炉, パタン電熱の場合)	36 kW
燃料ガス (都市ガス)	1 1/2 in パイプ
パタン加熱用所用電力	35 kW
自動サイクル時間 (コーティング, 焼成を除く)	42 sec
コーティング時間	10~30 sec
焼成時間	10~70 sec
予熱時間 (必要に応じ)	2 sec~2 min
造型能力 (毎時当り)	30~40 モールド
全重量	10 200 lb