薄板塑性変形の一解法

(第1報 環状円板から円筒殻への加工)⁽¹⁾

吉 村 慶 丸⁽²⁾

A Method of Solution for the Plastic Deformation of Thin Plates (I. Forming of circular cylindrical shells from annular plates)

by Yoshimaru YOSHIMURA

A method of solution for the forming of thin shells, the shape of which is given before and after working, is developed based on some geometrical conceptions with regard to the deformation of surfaces, by use of the total strain theory. As an example, the stress and strain distribution of a circular cylindrical shell worked out from a annular plate is calculated, and the general feature about the working limit of usual ductile materials is made clear.

1. は し が き

薄板の塑性加工では、変形の大きいのが常であるから、殻の有限変形論⁽³⁾がそのまま役立つ。なお塑性加工では変形前後の板の形状が与えられている場合が多いので、ここではそれに適した扱い方をして見る。そしてきわめて簡単に解ける場合として、環状円板から円筒殻を作る場合を扱う。実際には、完全な円板から底面のある円筒を造ることの方が重要であろうが、底面の部分の変形は、円板が半径の異なる円板になるとした場合にも、それほど簡単に解けるものではない。したがってここでは側面の部分のみを考え、底面に関しては、その解が得られたときに接続すればよい。また深絞りの場合の破断などでは側面の下部が重要である。

次に、ここで用いた塑性法則は全ひずみ理論であるから、途中の変形の過程は応力成分比が一定、すなわち主応力方向と主応力の比が一定であるようなものである。変形過程は加工法（深絞りとかプレスなど）により、また一つの加工法でも用いる器具によって異なり、特に深絞りではその過程に即した解析が多く行われている（しかし、これも Hill⁽⁴⁾のものを除いては多く全ひずみ理論によっている）。ここで述べる方法は、個々の加工法に対して忠実ではない代りに、種々の場合を概観するのにはかえって便利であると思う。

2. 基礎方程式

(a) 変形の解析 他の問題に应用する場合の便宜を考えてやや一般的なことを述べておく。一般に殻の中央面上の物体点を表わすのに、その上の曲線座標

(α, β) を用い、 (α, β) は変形に際しておのおのの物体点に固有のものとする。すなわち、最初の中央面 S_0 上の点 $r_0(\alpha, \beta)$ は変形後の中央面 S 上でも同じ曲線座標をもつ点 $r(\alpha, \beta)$ である。これと同時に S の形状が与えられている場合には、その形状に即した曲線座標 $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ を考えることが出来る。点 $r(\alpha, \beta)$ はまた点 $r(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ にも同等である。したがって、 S_0, S における曲線座標 (α, β) に対する第1種の基礎量をそれぞれ $E_0, F_0, G_0, E, F, G, S$ における曲線座標 $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ に対する第1種の基礎量を $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ とすれば、 S_0 上の線素

$$(dr_0)^2 = E_0 d\alpha^2 + 2F_0 d\alpha d\beta + G_0 d\beta^2$$

は変形によって S 上の線素

$$\begin{aligned} (dr)^2 &= E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2 \\ &= \bar{E} d\bar{\alpha}^2 + 2\bar{F} d\bar{\alpha} d\bar{\beta} + \bar{G} d\bar{\beta}^2 \end{aligned}$$

になる。特にいずれの場合も直交曲線座標であるような場合には、 α, β 方向の伸びを ϵ_1, ϵ_2 とするとき、この対応から

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{E} &= \sqrt{E_0}(1+\epsilon_1) = \sqrt{E} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \alpha} \\ \sqrt{G} &= \sqrt{G_0}(1+\epsilon_2) = \sqrt{G} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial \beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

が得られる。

したがって対数ひずみは

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \log(1+\epsilon_1) = \log \sqrt{E/E_0} \\ \epsilon_2 &= \log(1+\epsilon_2) = \log \sqrt{G/G_0} \\ \epsilon_2 &= \log(1+\epsilon_2) = -(\epsilon_1 + \epsilon_2) \\ &= -\log \sqrt{E_0 G / E G_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

である (ϵ_2 は板厚方向の ひずみ)。

(b) 平衡方程式 特に円板の軸対称変形を考え、

板の曲げ応力を無視し、断面力を $T_1 = \sigma_1 t$, $T_2 = \sigma_2 t$ (t : 変形状態における板厚) S の単位面積当りの垂直力を Z , 円板上の点の中心からの距離を r とすれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial r} \sqrt{G} + (T_1 - T_2) \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} &= 0 \\ T_1 L \sqrt{\frac{G}{E}} + T_2 N \sqrt{\frac{E}{G}} + \sqrt{EG} Z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

L , N は S に関する第 2 種の基礎量で, L/E , N/G がそれぞれ主曲率を表わす.

(c) ひずみ・応力関係 平面応力状態が普通であるから, それを仮定すれば, $\sigma_z = 0$, したがって

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \phi(\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2) \\ \epsilon_2 &= \phi(\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1) \\ \epsilon_z &= -\frac{1}{2}\phi(\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\phi} &= \frac{\sigma}{\epsilon} \\ \sigma &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ \epsilon &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_1 + 2\epsilon_2)^2 + (2\epsilon_1 + \epsilon_2)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

変形前後の板厚を t_0 , t とすれば

$$t = t_0(1 + \epsilon_z)$$

したがって (2) の第 3 式より

$$t = t_0 \sqrt{\frac{E_0 G_0}{E G}} \dots\dots(6)$$

したがって (2), (4) より

$$\left. \begin{aligned} T_1 - T_2 &= \frac{2}{3} \frac{t_0}{\phi} \sqrt{\frac{E_0 G_0}{E G}} \log \sqrt{\frac{E G_0}{E_0 G}} \\ T_1 + T_2 &= -2 \frac{t_0}{\phi} \sqrt{\frac{E_0 G_0}{E G}} \log \sqrt{\frac{E_0 G_0}{E G}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7)$$

あるいは,

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{3} \frac{t_0}{\phi} \sqrt{\frac{E_0 G_0}{E G}} \log \frac{E^2 G}{E_0^2 G_0} \\ T_2 &= -\frac{1}{3} \frac{t_0}{\phi} \sqrt{\frac{E_0 G_0}{E G}} \log \frac{E_0 G_0^2}{E G^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

また, (5) より

$$\epsilon = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(\log \sqrt{\frac{E G_0}{E_0 G}}\right)^2 + \left(\log \sqrt{\frac{E G}{E_0 G_0}}\right)^2 + \left(\log \frac{E}{E_0} \sqrt{\frac{G}{G_0}}\right)^2} \dots\dots(9)$$

3. 環状円板より円筒の場合

この場合は, (α, β) として, 内径 r_0 , 外径 r_1 の環状円板に対する平面極座標 (r, θ) を, (α, β) として (x, θ) をとる. ただし x は円筒の母線方向の距離, θ は円周方向の角を表わす (第 1 図).

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{E_0} &= 1, \sqrt{G_0} = r, \sqrt{E} = \sqrt{E}, \\ \sqrt{G} &= \sqrt{G} = a \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

(ただし $dx = dr$)

であるから, (1) または (2) は

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{E} &= 1 + \epsilon_r, \log \sqrt{E} = \epsilon_r \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{\left(\frac{r}{a}\right)} - 1, \epsilon_z = \frac{1}{1 + \epsilon_r} \frac{r}{a} - 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

第 1 図

(3) の第 1 式は (第 2 式は考えなくてよい)

$$T_r = F \dots\dots(12)$$

ただし, 積分定数 F は円筒の両端の条件より定まり, 両端の軸方向引張りによる断面力に等しい. (8) の第 1 式は

$$T_r = \frac{2}{3} \frac{t_0}{\phi} \frac{r}{a} e^{-\epsilon_r} \left[2\epsilon_r - \log \frac{r}{a} \right] = F \dots\dots(13)$$

で, これが F が与えられた場合の解を与える. また (8) より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{T_r}{t} = \frac{2}{3} \frac{1}{\phi} \left[2\epsilon_r - \log \frac{r}{a} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{T_2}{t} = \frac{2}{3} \frac{1}{\phi} \left[\epsilon_r - 2 \log \frac{r}{a} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

(9) より

$$\epsilon = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\epsilon_r^2 - \epsilon_r \log \frac{r}{a} + \left(\log \frac{r}{a}\right)^2} \dots\dots(15)$$

4. 数値計算結果

塑性曲線が与えられれば ϕ が与えられるから, (13) によって ϵ_r が r/a と F によって表わされる. これは explicit には解けぬから, 数値計算によって解く.

一例として Al 板を考え, その引張りによる塑性曲線を第 2 図に示す⁽⁵⁾. ϵ_r をパラメータとして, r/a の種々の値に対して, (15) から ϵ を計算し, それを用いて (13) から F/t_0 を計算すると第 3 図が得られる.

第 3 図を基にして F/t_0 をパラメータとして ϵ_r と r/a の関係を示したのが第 4 図, 同様に r/a に対する ϵ_θ , ϵ_z および σ_r , σ_θ を第 5, 第 6 図に示す. ϵ_θ は F/t_0 に無関係であり, 多くの曲線が $r/a=1$ を境として傾向を異にする.

第 2 図

第 3 図

第 4 図

5. 加工の限界

第 3 図において、八面体せん断ひずみ ε の値を点線で示す。そうすると材料の破壊強度に対する ε の値 ε_B によって加工の可能な範囲が定まる。圧縮応力の側では引張応力の側より ε_B の値がかなり大きいのが普通だから、 $r/a > 1$ の側は $r/a < 1$ の側よりも加工可能な範囲が ε の値に対しても広い。その結果、多くの加工で、破壊の心配のあるのは円板の外側よりも内側すなわち円筒の側面の底に近いところである。これは第 3 図の曲線 $\varepsilon = \varepsilon_B$ (ε_B が与えられたとする) の $r/a < 1$ に対する部分によって与えられる。すなわちそのような ε に対する F/t_0 と r/a の値の組が定まる。すなわち F/t_0 を与えればそれ以下の r/a , r/a を与えればそれ以上の F/t_0 では破壊するということである。

なお、 $\varepsilon_r = \text{const.}$ の曲線は第 3 図の E_1, E_2 の部分に密集しており、それより F/t_0 が大きく、 r/a が小さい範囲には解が全く存在せず、したがってそのような変形が不可能である。その結果、第 3 図の E_1, E_2 の部分に対しては、第 4, 5, 6 図において r/a 対 $\varepsilon_r, \varepsilon_z, \sigma_r, \sigma_\theta$ の曲線が鉛直に立っており、軸力 F/t_0 を与えると、ここで用いた ひずみ・応力曲線に対して

第 5 図

第 6 図

は、延性のどんなに大きい材料であっても、破壊なしに加工しうる r_0/a の最小値は一定に定まる。 $\varepsilon_r = \text{const.}$ したがって $\varepsilon = \text{const.}$ の曲線が密集する $E_1 E_2$ の位置および密集のしかたは ひずみ・応力関係によって異なるが、このような部分 $E_1 E_2$ の存在することは通常の延性材料では認めてよいであろう。これが単純引張りの場合の necking に相当するかどうかは、ここで述べたことからわからない。

また ε の値の与えられた範囲の加工に対応する最初の円板の大きさおよび加工された円筒の長さを求めることも出来る。 ε の範囲をきめればその長さは F/t_0 によってほとんど変わらないが、環状円板の幅は F/t_0 とともに減少する。

6. む す び

環状円板が円筒に加工される場合を、全ひずみ理論

の下に, 曲面の変形に関する簡単な幾何学的概念を用いて解き, ひずみ, 応力の分布を求めた. その結果, 通常の延性材料の加工限界の一般的傾向がかなりはっきりした. ひずみ・応力関係を与えれば, 加工限界は材料の延性によって定まる場合と, 解の不存在により延性に無関係に定まる場合とがある.

注:—

- (1) 昭和 27 年 11 月 7 日 第 549 回講演会において講演, 原稿受付 昭和 29 年 5 月 19 日.
- (2) 正員, 東京大学理工学研究所.
- (3) 筆者, 東大理工学研究所報告, 2, (1948), 167 および 3, (1949) 19.
- (4) R. Hill, Mathematical theory of plasticity, 1950.
- (5) 福井, 竹山, 東大理工学研究所報告 5, (1951), 124.

621.983.1

薄板塑性変形の一解法

(第 2 報 円板から球形殻への加工)⁽¹⁾

吉 村 慶 丸⁽²⁾ 植 村 益 次⁽³⁾

A Method of Solution for the Plastic Deformation of Thin Plates

(II. Forming of partial spherical shells from circular plates)

by Yoshimaru YOSHIMURA and Masuji UEMURA

Continued from the 1st report, the problem of forming of partial spherical shells from circular plates is solved, based on the geometrical consideration with regard to the deformation of surfaces.

1. は し が き

第 1 報⁽⁴⁾では円板から回転曲面への変形をやや一般的に扱い, その一例として環状円板から円筒殻への加工を計算した. ここでは第 1 報の結果を, 円板から球形殻を造る場合に応用する.

塑性法則としては, 第 1 報と同様に, 全ひずみ理論を用いるから, 変形過程は無視している. 得られた結果はむしろ種々の加工法に対する一般的傾向と見るべきであろう.

記号は第 1 報と同様であるものは説明を省略する.

2. 基礎方程式

半径 a の円板が半径 A の球形殻になるとし(第 1 図), (α, β) として円板に対する平面極座標 (r, φ) を, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ として球面上の緯度方向および経度方向の角 (θ, φ) をとる. そうすると,

第 1 図

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{E_0} &= 1, \quad \sqrt{G_0} = r \\ \sqrt{E} &= A, \quad \sqrt{G} = \sqrt{G_0} = A \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

であるから, (I, 1)* あるいは (I, 2) より

$$A \frac{d\theta}{dr} = \sqrt{E} \dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{E} &= 1 + \epsilon_r = e^{\epsilon_r} \\ \sqrt{G} &= r(1 + \epsilon_\varphi) = r e^{\epsilon_\varphi} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

両立条件は (1) の第 4 式と (2) より θ を消去して (3) を用いれば

$$\frac{d\epsilon_\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \left\{ e^{\epsilon_r - \epsilon_\varphi} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{A}\right)^2 e^{2\epsilon_\varphi}} - 1 \right\} \dots\dots (4)$$

また体積一定の条件は

$$\epsilon_r + \epsilon_\varphi + \epsilon_z = 0 \dots\dots (5)$$

変形前後の板厚の関係 (I, 6) は

$$t = t_0 e^{-(\epsilon_r + \epsilon_\varphi)} \dots\dots (6)$$

ひずみ・応力関係 (I, 8) は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2 \frac{\tau_n}{\gamma_n} (2\epsilon_r + \epsilon_\varphi) \\ \sigma_\varphi &= 2 \frac{\tau_n}{\gamma_n} (2\epsilon_\varphi + \epsilon_r) \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \tau_n &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2} \\ \gamma_n &= 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\epsilon_r^2 + \epsilon_r \epsilon_\varphi + \epsilon_\varphi^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

平衡方程式 (I, 3) は (3), (7) を用いれば

$$\frac{dT_r}{dr} = -T_r \frac{\epsilon_r - \epsilon_\varphi}{2\epsilon_r + \epsilon_\varphi} \frac{e^{\epsilon_r - \epsilon_\varphi}}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{A}\right)^2 e^{2\epsilon_\varphi}} \dots\dots (9)$$

* (I, 1) は第 1 報の式 (1) を示す. 以下同様.