以上のように、被削材と刃先がある期間相離れる切削の本実験の範囲内においては、切削力の遅れがすべて確かめられた。したがって、びびり振動発生の本原因をなす水平分力の遅れは、切削特有のものと考えられる。

しかし、被削材が水平変位したとき被削材が刃先と相離れることのない切削においては、この遅れの大きさが本実験のものと異なることが考えられる。また本実験は、削り速度に対する被削材の水平変位の周期を一定とした場合である。この周期によっても、遅れの大きさが左右されるものと考えられる。これらについては次報で検討する。

4. 結 論

びびり振動を発生しない普通の切削において、被削材を強制的に変位させ、切くず厚さを周期的に変化させたときにも、切削力の変化の位相は被削材の水平変位よりもわずかに遅れ、切削力の遅れが存在することが確かめられた。すなわち、切削力の遅れの存在は、切削における特有の現象であることが明らかにさ

れた。したがってびびりは、この切削特有の現象である切削力の遅れによって発生する自励振動であることがいっそう明確にされた。

今後この遅れの性質がさらに明らかにされるにしたがって、びびり発生についての種々の特性がよく説明されうるものと考えられる。

本実験遂行に、熱心に協力された学生員、大芝邦彦君、大竹常之君、長谷川武彦君に深謝する。本研究の一部は文部省科学研究費の援助によるものである。

注：一

- (1) 昭和 29 年 10 月 31 日 名古屋臨時大会講演会において講演、原稿受付 昭和 30 年 7 月 1 日。
- (2)(3) 正員、名古屋大学工学部。
- (4) 機械学会論文集, 19 巻 86 号, 34 ページ (昭 28)。
- (5) 機械学会論文集, 21 巻 102 号, 110 ページ (昭 30)。
- (6) 機械学会論文集, 3 巻 10 号, 94 ページ (昭 12)。
- (7) 機械学会論文集, 19 巻 86 号, 28 ページ (昭 28)。
- (8) 機械学会論文集, 19 巻 86 号, 34 ページ (昭 28)。
- (9) 削り面に生ずる高低の波の形が、遅れの大きさ、引いてはびびりの発生に大きな影響を及ぼすものである。このことについては次報で検討する。
- (10) J. of Appl. Phys., Vol. 16, 1945, p. 267, 318.

658.565

ランダムに事故の生ずる自動機械群への適正工員配置

その 1 熟練程度の等しい工員による単独管理⁽¹⁾

千 住 鎮 雄⁽²⁾

The Optimum Assignment of Repairmen in Serving Automatic Machines

Part 1. Independent attendance of equally skilled repairmen

by Shizuo SENJU

Concepts based on stochastic processes and economic principles are applied to determine the optimum assignment of repairmen in serving automatic machines which require attention at random intervals.

For the case where the requisite attention times for each re-start are of Gamma type, tables of machine availability and operative efficiency have been prepared. In addition to examinations on the characteristics of production and profit functions, charts showing an optimum ratio of machines to operators in order to maximize the profit have been made for three distributions of repairing times, viz., constant repairing time, Gamma and exponential distributions of repairing times.

The scope of the present paper is limited to the case where all repairmen are equally skilled and take charge of their own machines independently.

1. 序 論

1.1 まえがき 正常運転においては人手を要し

ないがランダムに事故(故障または材料切れ)の生ずる幾台かの自動機械を 1 人の工員が監督運転する場合には、1 度に修理できる機械は 1 台であるから、いわ

ゆる干渉 (interference) または、同調 (synchronization) と呼ばれる現象が起るので、それらを管理するための工員を最も有利に配置するためには確率過程論的な考察が必要である。自動機械の生産性に関しては既にこの立場に立った数個の研究があるが十分ではない。すなわち、修理に要する時間 (確率変数) の分布が指数型⁽³⁾ならびに定数型⁽⁴⁾の場合については既にある程度数表ができていて、いずれも実際の修理時間分布 (Γ 型と考えられる) とは隔たりがある。そして指数型も定数型も Γ 型の特別な場合なので、本報ではまず Ashcroft の一般解により Γ 型修理時間分布に対する機械実動係数 (machine availability) と工員作業係数 (operative efficiency) を求めて前の二者と比較した。

次に、経済的要素を加味して解の特性を吟味し、利益を最大にする工員数ならびにその配置が一意に定まることを示し、生産力関数と収益関数を求めて最大利益の期待される受持機械台数を与える図を作り、最後に、幾つかの独立な自動機械群が並列的に置かれている場合の工員配置の問題を限界収益関数を使って考察した。

一般に最も“有利”な工員数を決める時に目標とするものは、(i) コストと (ii) 利益であるが、工員数を増減すればコストも生産量も変化するので、コストを最小にする工員数 n_1 と利益を最大にする工員数 n_2 とは一致しないのが普通である (一般に $n_1 \leq n_2$)。しかして市価が一部製作者のコストに無関係に定まっている場合には、製作者にとってはコストを最小にするよりも、その市価に応じて利益を最大にする方がより実際のなので、本報においては後者の立場をとり利益を対象とした。

1.2 本報における仮定と取扱う範囲

(i) 仮定 1 完全な状態に整備されて運転を開始した自動機械が、初めて事故のために運転を中止するに至るまでの連続運転時間 X (確率変数) の密度関数は指数型で、かつ事故の発生は確実事象とする。すなわち運転開始後、時間 x だけ経過した時に初めて事故の生ずる確率密度を $f(x)$ とすれば

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (0 < \lambda, x) \quad (1.1)$$

$$X \text{ の平均値 } E(X) = 1/\lambda \quad (1.2)$$

であるから、 λ は単位実動時間内の平均事故回数を表わす。容易に検証できるように、ある瞬間に事故を起す確率がそれまでに経過した連続運転時間の長短に無関係と言う仮定はこの仮定 1 と同等である。

(ii) 仮定 2 修理に要する時間の分布は一般の Γ 型 (指数型、定数型をも含む) とする。

(iii) 仮定 3 一つの機械群は同一種類、同一程度の自動機械より成るものとし、そこに配置される工員は熟練程度が等しいものとする。

(iv) 工員は各自に割当てられた幾台かの機械をそれぞれ単独別個に監督管理する。すなわち幾人かが 1

チームとなって働く共同管理の場合は扱わない。

2. Γ 型修理時間分布に対する機械実動係数

2.1 Γ 型密度関数の性質 平均値 m なる Γ 型密度関数 $g(x)$ は次式で表わされる。

$$g(x) = \frac{(\nu/m)^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\nu x/m} \quad (0 < x, m, 1 \leq \nu) \quad (2.1)$$

上式で $\nu=1$ とすれば指数型の密度関数となる。この分布の分散を σ^2 とすれば

$$\sigma^2 = m^2/\nu \quad (2.2)$$

すなわち $\nu \rightarrow +\infty$ ならしめれば平均値を m にしたまま分散は 0 に収束し、 $f(x)$ は $1 < \nu$ なる限り $x = m(1-1/\nu)$ においてただ一つの極大値を有する連続関数なるゆえ、確率変数はもはやランダムな値をとらず、常に m なる値をとる定数となる。したがって指数型、定数型は Γ 型の特別な両極端の場合にして、一般の修理時間分布に対しては $1 \leq \nu$ なる適当な値の ν を選んで近似することができる。

2.2 任意の修理時間分布に対する Ashcroft の

解 修理時間の平均値を m 、機械 1 台当りの単位実動時間内の平均事故回数を λ 、 $\rho = m\lambda$ を就業因数 (servicing factor)、1 工員の受持つ機械 k 台のうちで任意の時刻に動いている平均機械台数を A_k 、事故のうちで修理時間が x 以下である確率を $F(x)$ とすれば、 A_k は Ashcroft⁽⁴⁾により次式で与えられる。

$$A_k = \{\rho + (kY_k)^{-1}\}^{-1} \quad (2.3)$$

ただし

$$Y_k = 1 + \binom{k-1}{1} A_{\frac{1}{2}}^1(Y) + \binom{k-1}{2} A_{\frac{2}{2}}^2(Y) + \dots + \binom{k-1}{k-1} A_{\frac{k-1}{2}}^{k-1}(Y) \quad (2.4)$$

しかしてこれらの階差の間には次の関係式が成立つ。

$$A_{\frac{j}{2}+1}^j(Y) = \left[\left\{ \int_0^\infty e^{-\lambda j x} dF(x) \right\}^{-1} - 1 \right] A_{\frac{j}{2}}^{j-1}(Y) \quad (2.5)$$

ただし積分は Stieltjes 積分とした。

2.3 機械実動係数 Γ 型の密度関数 (2.1) を使って (2.5) の $\{ \}$ 内の積分を計算すれば

$$\int_0^\infty e^{-\lambda j x} dF(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda j x} \frac{(\nu/m)^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\nu x/m} dx = \left(\frac{\nu}{j\rho + \nu} \right)^\nu$$

ゆえに (2.5) から

$$A_{\frac{j}{2}+1}^j(Y) = \left\{ \left(1 + \frac{j\rho}{\nu} \right)^\nu - 1 \right\} A_{\frac{j}{2}}^{j-1}(Y) \quad (2.6)$$

が得られるので、これを (2.4) に代入して

$$Y_k = 1 + \binom{k-1}{1} \left\{ \left(1 + \frac{\rho}{\nu} \right)^\nu - 1 \right\} + \binom{k-1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{2\rho}{\nu} \right)^\nu - 1 \right\} \left\{ \left(1 + \frac{\rho}{\nu} \right)^\nu - 1 \right\}$$

$$+ \dots + \binom{k-1}{k-1} \left\{ \left(1 + \frac{(k-1)\rho}{\nu} \right)^\nu - 1 \right\} \\ \times \left\{ \left(1 + \frac{(k-2)\rho}{\nu} \right)^\nu - 1 \right\} \dots \left\{ \left(1 + \frac{\rho}{\nu} \right)^\nu - 1 \right\} \quad \dots \dots \dots (2.7)$$

をうる。この式において $\nu=1$ とすれば

$$Y_k = 1 + \binom{k-1}{1} \rho + \binom{k-1}{2} \rho^2 + \dots \\ + \binom{k-1}{k-1} (k-1)! \rho^{k-1} \dots \dots \dots (2.8)$$

となって指数型の修理時間分布に対する Palm の解と一致し、 $\nu \rightarrow +\infty$ ならしめれば

$$Y_k = 1 + \binom{k-1}{1} (e^\rho - 1) + \binom{k-1}{2} (e^{2\rho} - 1)(e^\rho - 1) \\ + \dots + \binom{k-1}{k-1} (e^{(k-1)\rho} - 1)(e^{(k-2)\rho} - 1) \dots \\ (e^\rho - 1) \dots \dots \dots (2.9)$$

となって定数型に対する解となる。

指数型、 Γ 型、定数型に対する Y_k の値をそれぞれ Y_{k1} , Y_{kv} , $Y_{k\infty}$ と置いて区別すれば (2.7) において $(1+j\rho/\nu)^\nu$ は $1 \leq \nu$ なる範囲で ν の単調増加関数なるゆえ、次の不等式がなりたつ。

$$Y_{k1} < Y_{kv} < Y_{k\infty} \dots \dots \dots (2.10)$$

しかして (2.3) 式からわかるとおり、更に A_k は Y_k の単調増加関数なるゆえ、(2.10) から直ちに次の関係式が導かれる。ただし、添字は上と同様な意味を有する。

$$A_{k1} < A_{kv} < A_{k\infty} \dots \dots \dots (2.11)$$

したがって今、 $a_k \equiv A_k/k$ を機械実動係数と名づければ

第 1 図 3 種の修理時間分布に対する機械実動係数 a_k の比較、 ρ = 就業因数

$$a_{k1} < a_{kv} < a_{k\infty} \dots \dots \dots (2.12)$$

なる関係が成立つことは当然である(第 1 図)。

しかして ν の値が任意なる一般の Γ 型に対する機械実動係数 a_k については、 ν の逆数補間によって実用上十分な数値が求められる。したがってもしもその変動係数 $\sigma/m = 1/\sqrt{\nu}$ が与えられている場合には、その二乗値を使って補間すればよい。第 1 表には ν に関する逆数補間の便のために $\nu = 2 (1/\nu = 0.5)$ なる Γ 型に対する a_k の値を示した。

2.4 機械実動係数と諸係数との関係 1 工員が同一種類の自動機械 k 台を受持っている場合に、工員が機械修理に従事する時間的割合の平均値 O_k を工員作業係数 (operative efficiency), 工員手待ちの時間的割合の平均値 L_k を工員損失係数 (coefficient of loss

第 1 表 機械実動係数 a_k

ρ	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.08	0.1	ρ	0.3	ρ	0.5
k								k		k	
1	0.990 10	0.980 4	0.970 9	0.961 5	0.952 4	0.925 9	0.909 1	1	0.769 2	6	0.331 6
2	0.990 03	0.980 1	0.970 3	0.960 5	0.950 7	0.922 0	0.902 9	2	0.737 4	7	0.285 4
3	0.989 95	0.979 8	0.969 6	0.959 3	0.948 9	0.917 5	0.895 9	3	0.696 6	8	0.250 0
4	0.989 88	0.979 5	0.968 9	0.958 1	0.947 0	0.912 7	0.888 0	4	0.646 3	9	0.222 2
5	0.989 80	0.979 2	0.968 2	0.956 7	0.944 9	0.906 6	0.879 0	5	0.588 1	ρ 0.8	
6	0.989 72	0.978 9	0.967 4	0.955 3	0.942 6	0.899 9	0.868 5	6	0.526 3		
7	0.989 64	0.978 6	0.966 6	0.953 7	0.940 0	0.892 3	0.855 9	7	0.466 9		
8	0.989 56	0.978 2	0.965 7	0.952 0	0.937 0	0.883 3	0.840 6	8	0.414 0		
9	0.989 48	0.977 8	0.964 7	0.950 1	0.933 7	0.872 8	0.822 4	9	0.369 8	1	0.555 6
10	0.989 39	0.977 4	0.963 7	0.948 0	0.930 2	0.860 6	0.801 3	10	0.333 2	2	0.473 9
11	0.989 30	0.977 0	0.962 6	0.945 8	0.926 1	0.846 5	0.775 9	11	0.303 0	3	0.385 0
12	0.989 21	0.976 6	0.961 4	0.943 3	0.921 5	0.829 2	0.748 0	12	0.277 8	4	0.307 3
13	0.989 12	0.976 1	0.960 2	0.940 6	0.916 4	0.810 1	0.717 6	13	0.256 4	5	0.249 4
14	0.989 03	0.975 6	0.958 9	0.937 6	0.910 6	0.788 2	0.684 8	ρ 1.0		6	0.208 3
15	0.988 93	0.975 1	0.957 4	0.934 3	0.904 1	0.763 7	0.651 0			1	0.500 0
16	0.988 83	0.974 6	0.955 9	0.930 6	0.896 6	0.736 9	0.617 0			2	0.409 2
17	0.988 73	0.974 1	0.954 2	0.926 5	0.888 1	0.708 5	0.584 7			3	0.318 7
18	0.988 63	0.973 5	0.952 4	0.921 9	0.878 4	0.679 2		1	0.666 7	4	0.248 3
19	0.988 53	0.972 9	0.950 4	0.916 8	0.867 5	0.649 6		2	0.609 8	5	0.199 8
20	0.988 42	0.972 3	0.948 2	0.911 1	0.855 1	0.620 8		3	0.539 5	6	0.166 7
								4	0.463 0		
								5	0.391 1		

(ρ : 就業因数, k : 工員 1 人の受持機械台数)

第 2 表 工員作業係数 O_k

ρ	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.08	0.1	ρ	0.3	ρ	0.5
k								k		k	
1	0.0099	0.0196	0.0291	0.0385	0.0476	0.0741	0.0909	1	0.2308	6	0.9948
2	0.0198	0.0392	0.0582	0.0768	0.0951	0.1475	0.1807	2	0.4424	7	0.9989
3	0.0297	0.0588	0.0873	0.1151	0.1423	0.2202	0.2688	3	0.6269	8	0.9996
4	0.0396	0.0784	0.1163	0.1533	0.1894	0.2921	0.3552	4	0.7756	9	1.0000
5	0.0495	0.0979	0.1452	0.1913	0.2362	0.3626	0.4398	5	0.8821	ρ k 0.8	
6	0.0594	0.1175	0.1741	0.2293	0.2828	0.4320	0.5211	6	0.9473		
7	0.0693	0.1370	0.2030	0.2670	0.3290	0.4997	0.5991	7	0.9805		
8	0.0792	0.1565	0.2318	0.3046	0.3748	0.5653	0.6725	8	0.9936	1	0.4445
9	0.0891	0.1760	0.2605	0.3420	0.4202	0.6284	0.7402	9	0.9985	2	0.7582
10	0.0989	0.1955	0.2891	0.3792	0.4651	0.6885	0.8013	10	0.9996	3	0.9240
11	0.1088	0.2149	0.3177	0.4162	0.5093	0.7449	0.8535	11	0.9999	4	0.9834
12	0.1187	0.2344	0.3461	0.4527	0.5530	0.7960	0.8976	12	0.9999	5	0.9976
13	0.1286	0.2538	0.3745	0.4891	0.5957	0.8425	0.9329	13	1.0000	6	0.9998
14	0.1385	0.2732	0.4027	0.5251	0.6374	0.8828	0.9587	ρ k 0.5		ρ k 1.0	
15	0.1483	0.2925	0.4308	0.5606	0.6781	0.9164	0.9765				
16	0.1582	0.3119	0.4588	0.5956	0.7173	0.9432	0.9872	1	0.3334	1	0.5000
17	0.1681	0.3312	0.4866	0.6300	0.7549	0.9636	0.9940	2	0.6098	2	0.8184
18	0.1780	0.3505	0.5143	0.6638	0.7906	0.9780		3	0.8093	3	0.9561
19	0.1878	0.3697	0.5417	0.6967	0.8241	0.9874		4	0.9260	4	0.9932
20	0.1977	0.3891	0.5689	0.7289	0.8551	0.9933		5	0.9778	5	0.9990
										6	1.0000

(ρ : 就業因数, k : 工員 1 人の受持機械台数)

or repairmen), 任意の時刻において干渉のため修理を待ちながら止まっている機械の平均台数 W_k を持台数 k で割った値 $w_k = W_k/k$ を機械損失係数 (coefficient of loss for machines) とそれぞれ名づけられ、定義から直ちに

$$O_k + L_k = 1$$

$$W_k + O_k + A_k = k \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

$$O_k = \rho A_k = k \rho a_k$$

およびこれらからの簡単な演算によって

$$w_k = 1 - (1 + \rho) a_k \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

が得られる。したがって a_k 以外の上に述べた諸係数は皆 a_k の一次関数なるゆえ、任意の変動係数を有する一般の Γ 型分布に対応する値は、上述の 3 組の数値 $O_{k1}, O_{k\gamma}, O_{k\infty}, \dots\dots$ から $1/\nu$ の補間によって求めれば実用上十分である。

3. 経済的要素を加味した解の性質

3.1 広義の均等な工員配置 同一種類の自動機械 M 台を熟練程度の等しい工員 n 人に割当てるとき、できるだけ均等に行えば工員の受持台数 $k_i (i=1, 2, \dots, n)$ の中の最大値と最小値との差を 0 または 1 とならしめることができ、そのような割当て方法はただ一通りに限る。何となれば $n \leq M$ なる任意の自然数 M, n に対して

$$M/n = k + r, \quad (0 \leq r < 1, k: \text{自然数}) \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

なる関係があるとき、 n 人を次のような A, B 2 組に分け、 A 組に属する n_k 人には k 台ずつ、 B 組に属する n_{k+1} 人には $k+1$ 台ずつ割当てればよい。ただし

$$\left. \begin{aligned} n_k &= n(k+1) - M \\ n_{k+1} &= M - kn \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

このような配置を広義の均等な配置と名づけ、この場合に M 台より成る機械群の平均実動時間の総計が最大になる。何となれば、1 工員の受持台数 k が増加するに従って、干渉のための機械損失係数は加速度的に増加し、数表からわかるとおりに A_k のグラフは就業因数 ρ に無関係に常に k に関して上に凸な多角形の辺の一部をなすので、今もし $k_i - k_j \geq 2$ なる関係が

第 2 図

あれば、 i 番目の工員の受持機械 1 台を j 番目の工員に移すことによって

$$A(k_i) + A(k_j) < A(k_{i-1}) + A(k_{j+1}) \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

ただし、ここでは A_k の代りに $A(k)$ としたとなり、実動機械の平均数を増すことができるからである。したがって今後は、機械 M 台を工員 n 人に割当てての場合には、常にここに述べたような広義の均等

な条件

$$k_{\max} - k_{\min} = 0 \text{ または } 1 \dots\dots\dots (3.4)$$

を満足しているものとし、いちいち断らない。

3.2 機械 M 台, 工員 n 人の生産力関数 上と同じ条件で 1 日の実生産量を $T(M, n)$, 1 台の機械が 1 日間無事故で連続運転した時の生産量, すなわち生産能力を Z とし, $M/n = k + r$ (k : 整数, $0 \leq r < 1$) なる場合の機械実動係数を新しく $a(M, n)$ で表わせば, 1 日の実生産量 $T(M, n)$ は次式で表わされる。これを生産力関数と名づける。

$$T(M, n) = ZMa(M, n) \dots\dots\dots (3.5)$$

$$\text{ただし } a(M, n) = (1-q) \cdot a_k + q \cdot a_{k+1}$$

$$\text{および } q = \frac{n(k+1)r}{M} = \frac{(k+1)r}{k+r}$$

なぜなら, M が n の整数 k 倍 ならば $r=0, q=0$ となり, $T(M, n) = ZMa_k$ となって (3.5) は明らかに成立する。 $0 < r < 1$ の場合には n 人を (3.2) のごとく 2 組に分けるゆえ

$$A \text{ 組の総生産量} = Zkn_k a_k$$

$$B \text{ 組の総生産量} = Z(k+1)n_{k+1} a_{k+1}$$

を合計し, n_k および n_{k+1} の代りに (3.2) を代入して整とんすれば (3.5) が得られる。

3.3 利益を最大にする工員数 まず使用する記号を列挙する。

(i) 製品の単位数量当りの価格を a ,

(ii) 工員数 n に比例する費用 (おもに工員の固定給料, 福利厚生施設費, 工員のための各種保険料等) を 1 人 1 日当り b ,

(iii) 生産量に比例する費用 (おもに工員の出来高比例式賃金, 原材料費, および事故に伴う損害等) を単位数量当り d ,

(iv) 生産高ならびに工員数に無関係な定常的な費用 (おもに建物, 機械等の減価償却費, 職員給料, 金利その他一般経費の大部分) を 1 日当り c , とそれぞれ置けば, 機械 M 台, 工員 n 人に対する 1 日当りの利益 $R(M, n)$ は

$$R(M, n) = (a-d)ZMa(M, n) - bn - c \dots\dots\dots (3.6)$$

で表わされ, かつ

$$\text{区間: } M/(k+1) < n < M/k \quad (k=1, 2, \dots, M-1) \dots\dots\dots (3.7)$$

において n に関して微分可能にして, (3.1) および (3.5) を参照すれば

$$\frac{\partial}{\partial n} R(M, n) = (a-d)Z \frac{1}{2}(k+1)(a_k - a_{k+1}) - b \dots\dots\dots (3.8)$$

となる。したがって, 導関数は区間 (3.7) においては一定, $n = M/k$ ($k=2, 3, \dots, M-1$) において不連続にして, かつ a_k の数表を参照すれば ρ のいかんにかかわらず, n の増加 (すなわち k の減少) とともに階段的に減少する単調非増加関数であることがわかる。一方 (3.6) に示されているように $R(M, n)$ は $1 \leq n$

$\leq M$ なる実数 n に関して連続であるから, $R(M, n)$ のグラフは第 3 図の縦線を引いた部分で表わされるこ

第 3 図

とく $n = M/k$ ($k=1, 2, \dots, M$) の上に頂点を有し上に凸なる折線グラフであることがわかる。すなわち

$\frac{\partial}{\partial n} R(M, n) > 0$ なる限り n の増加とともに $R(M, n)$ もまた増加する。

ゆえにもし k がある整数 k_{0p} の値をとった時 (3.8) の右辺が 0 となるならば $M/(k_{0p}+1) \leq n_{0p} \leq M/k_{0p}$ なる任意の整数 n_{0p} において $R(M, n)$ は最大になるが, その区間内に n の整数値がなければ, それをはさむ最も近い二つの整数の中のいずれか一方, またはその両方において $R(M, n)$ は最大になる。

またもし $\frac{\partial}{\partial n} R(M, n) = 0$ ならしめる k の整数値がなければ $\frac{\partial}{\partial n} R(M, n) > 0$ を満足する n の上限 n_{0p}' で $R(M, n)$ は最大となる。この n_{0p}' が整数ならばそれが求める工員数 n_{0p} となるが, n_{0p}' が整数でなければ, それをはさむ最も近い二つの整数の中のいずれか一方, またはその両方において $R(M, n)$ は最大となる。

いずれの場合にも $\frac{\partial}{\partial n} R(M, n)$ の不連続点は $n = M/k$ (k は整数) にして, かつ単調非増加であるから, 計算上の最適工員数 n_{0p}' は機械台数 M のある整数分の 1 の所 1 個所にある。その整数 k_{0p} は定数 a, b, d, Z, M, ρ の値がわかれば第 4 図によって与えられる。ただし定数型 (変動係数=0), Γ 型 (特に変動係数 $=1/\sqrt{2}$ の場合について), 指数型 (変動係数=1) の三つの場合について求めてあるので, 一般の Γ 型修理時間分布に関してはその変動係数の二乗によって補間すれば実用上十分である。

k_{0p} を求める場合に考えている点が k_{0p} を区切る境界線上, またはそれに近い場合には, そのいずれの k_{0p} をとっても大差ない。

3.4 並列機械群への工員配置 一つの工場で相異なる幾種類かの独立な製品をそれぞれ自動機械群によって生産している時のように, 互に独立な機械群 G_i ($i=1, 2, \dots, h$) が材料の流れに関して並列的に

第 4 図

置かれ、一つの群を通過した品物が更に他の群を通過することは無いとする。機械、材料ならびに製品の種類は群間では異なっても、群内では同じとする。 i 番目の群に関する諸記号には、従来使ってきた記号に添字 i をつけて区別する。

i 群の工員数 n_i を自由に定めうる場合には、各群で既述の方法をそれぞれ独立に適用すればよいので問題はないが、工員の総数 n が与えられていて、各群への配分法 $n_i (n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$ が問題となる場合 (工員の配置転換が可能な場合) には工員に関する限界収益関数 $U_i(n_i)$ を考える必要がある。ここに $U_i(n_i)$ とは

$$\begin{aligned} U_i(n_i) &= R_i(M_i, n_i) - R_i(M_i, n_i - 1) \\ &= (a_i - d_i) Z_i M_i \{a(M_i, n_i) \\ &\quad - a(M_i, n_i - 1)\} - b \dots\dots\dots (3.9) \end{aligned}$$

で表わされる。既述のとおり、 $R(M, n)$ は n に関して上に凸な多角形の辺の一部であるから、その上にとった整数値に対応する値を順に結んで得られる多角形もまた上に凸である。したがって $U(n_i)$ は n_i に関する単調非増加関数である。すなわち

$$U_i(n_i - 1) \geq U_i(n_i) \dots\dots\dots (3.10)$$

なる関係が存在する。

今各群の利益の合計を最大にするためには、各群の限界収益を均等に近づけることが必要である。何となれば、もし 2 群 G_i, G_j の間に

$$U_i(n_i + 1) > U_j(n_j) \dots\dots\dots (3.11)$$

なる関係があれば、群 G_j の工員 1 人を群 G_i に移すことによって工場全体の収益を増しうることは (3.9) の定義式から明らかである。かくして逐次に配置転換を行い、遂にいかなる 2 群の間にもその限界収益について

$$U_i(n_i + 1) \leq U_j(n_j) \dots\dots\dots (3.12)$$

なる均等の条件が満たされるに至れば、限界収益関数の単調非増加性から、それ以上に有利な工員配置の存

在しないことがわかる。

4. 結 語

(i) 修理時間の分布が定数型 (変動係数=0)、指数型 (変動係数=1) の場合は Γ 型 (2.1) (変動係数=1/ $\sqrt{v}$) の特別な両極端の場合にして、一般の Γ 型に対する諸係数はそれら両端ならびに第 1 表 (変動係数=1/ $\sqrt{2}$) を利用して変動係数の二乗で補間すれば実用上十分な値が求められる。

(ii) 機械 M 台、工員 n 人の全生産量は、 n 人を均等の条件 (3.4) を満足するように配置したときに最大となり、その生産量および収益はそれぞれ (3.5), (3.6) で表わされる。

(iii) 機械 M 台からの利益を最大にする計算上の工員数 n_{0p}' は常に M のある整数分の 1 の所 1 個所にあり、その整数 k_{0p} は第 4 図で与えられる。実際の最適工員数 n_{0p} は n_{0p}' が整数でない場合には、それをはさむ最も近い整数の一方または両方である。

(iv) 幾つかの独立な自動機械群が並列に置かれているときには、各群における工員の限界収益 (3.9) が均等の条件 (3.12) を満足するときに利益の合計が最大になる。

終りに御懇篤な御指導を賜った東大助教授朝香鉄一博士ならびに故 Palm の貴重な論文を御送付戴いたスウェーデンの Erik Swartling 氏の御厚情に対して深甚なる謝意を表します。

注:—

- (1) 昭和 29 年 11 月 28 日 (第 1 報) 東京秋期講演大会, 昭和 30 年 4 月 7 日 (第 2 報) 第 32 期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 30 年 4 月 13 日。
- (2) 正員, 慶応義塾大学工学部。
- (3) Palm: Arbetskraftens fördelning vid betjäning av automatmaskiner, Industritidningen Norden, Nr. 8 (1947) 75.
- (4) Ashcroft: The Productivity of Machines Under the Care of One Operator, J. Roy. Statist. Soc., B. 12 (1950), 145.