局 部 荷 重 に よ る 円 形 板 の 座 屈*

八 卷 昇**

Buckling of a Circular Plate under Locally Distributed Forces

by Noboru YAMAKI

An approximate solution is presented for the problem of the elastic instability of a thin circular plate subject to a pair of locally distributed forces applied on the periphery. The Ritz's method is used and the problem is solved for the two cases where the edge is clamped or simply supported. In each case above cited, buckling loads and deflection surfaces for various values of the load-width are calculated and the results are graphed and discussed.

1. 緒 言

周辺上に一様な等分布荷重をうける円形薄板の座屈に関しては既に厳密解⁽¹⁾があるが、集中荷重または局部荷重による座屈問題はまだ取り扱われていないように思われる。著者は先に局部荷重による長方形板の安定性⁽²⁾について研究したが、本報では同様の方法を用いて、周辺上に一對の局部的分布荷重が作用する場合の円形板の座屈問題を取り扱った。なお板の境界条件としては、固定および単純支持の二場合を考え、そのおのおのにつき荷重幅と座屈荷重および座屈波形の関係を明らかにした。

2. 板内の応力

半径 a , 厚さ h の円形板の周辺上に、図のごとく一對の局部的分布荷重 p が作用する場合の板内の応力分布を求める。

今 Airy の応力関数を F とすると F は次式を満足せねばならぬ。

$$\nabla^4 F \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 F = 0 \dots (1)$$

この F を用いて応力は次のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, & \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}. \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

第 1 図

応力に対する境界条件は、 $r=a$ において

$$\tau_{r\theta} = 0, \dots (3)$$

$$\sigma_r = \begin{cases} -p: -\frac{\varphi}{2} \leq \theta \leq \frac{\varphi}{2} \text{ および} \\ \pi - \frac{\varphi}{2} \leq \theta \leq \pi + \frac{\varphi}{2} \\ 0: \text{上記以外の } \theta. \end{cases} \dots (4)$$

$$\text{いま } P = pa\varphi h, \quad \alpha = \varphi/\pi. \dots (5)$$

とおくと (4) 式は

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi ah} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi\alpha} \cos 2n\theta \right) \dots (4)'$$

ここで F を

$$F = A_0 r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{2n} r^{2n} + B_{2n} r^{2n+2}) \cos 2n\theta$$

とおき、(3) および (4)' 式により係数 A_{2n} , B_{2n} 等を定めると

$$F = -\frac{2P}{\pi ah} \left[\frac{1}{2} r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-a^{-2n}}{2n-1} r^{2n} + \frac{a^{-2n}}{2n+1} r^{2n+2} \right\} \frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi\alpha} \cdot \cos 2n\theta \right] \dots (6)$$

したがって (2) 式から

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -k \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ n\rho^{2n-2} - (n-1)\rho^{2n} \} \right. \\ &\quad \times \alpha_n \cos 2n\theta \Big], \\ \sigma_\theta &= -k \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ -n\rho^{2n-2} + (n+1)\rho^{2n} \} \right. \\ &\quad \times \alpha_n \cos 2n\theta \Big], \\ \tau_{r\theta} &= -k \sum_{n=1}^{\infty} \{ -\rho^{2n-2} + \rho^{2n} \} n\alpha_n \sin 2n\theta. \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

$$\text{ただし } k = \frac{2P}{\pi ah}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad \alpha_n = \frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi\alpha} \dots (8)$$

荷重幅比 α を与えると (7) 式により応力分布が定まる。

* 昭和 30 年 4 月 8 日 第 32 期定時総会議演会において講演，原稿受付 昭和 30 年 8 月 29 日。

** 正員，東北大学高速力学研究所。

3. 座屈の基礎式

板のたわみを w , 曲げこわさを D とすると直交座標 x, y に関する座屈の平衡式⁽³⁾は

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - h\left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0. \quad (9)$$

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ の関係により上式を極座標に変換すると *

$$V = \frac{D}{2} \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \right] \right] r dr d\theta$$

$$= \frac{D}{2a^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \right] \right] \rho d\rho d\theta, \quad (12)$$

$$T = -\frac{h}{2} \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sigma_r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \sigma_\theta \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} r dr d\theta$$

$$= -\frac{h}{2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sigma_r \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \sigma_\theta \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{2}{\rho} \tau_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} \rho d\rho d\theta \quad (13)$$

V は板の曲げによるひずみエネルギー, T は座屈の際に応力のなす仕事, ν は板のポアソン比である. いま w を, 与えられた境界条件を満足する関数 $w_n(\rho, \theta)$ を用いて

$$w = \sum_n a_n w_n(\rho, \theta)$$

のごとく表わし, これを (12), (13) 式に入れて V, T を計算し, (11) 式により各 a_n について

$$\frac{\partial}{\partial a_n} (V - T) = 0 \quad (14)$$

とおくと a_n に関する連立同次方程式が得られる. a_n が恒等的に 0 とならぬためにはこれらの係数行列式が 0 となるを要する. この条件から固有値 P が定まる.

4. 周辺固定の場合

この場合の境界条件は

$$\rho = 1: w = 0, \quad \partial w / \partial \rho = 0 \quad (15)$$

座屈波形 w は, 荷重方向すなわち $\theta = 0$ の軸に関して*

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_r \rho^r \cos 2s\theta d\rho d\theta &= \pi k \alpha_s \left\{ \frac{s-1}{2s+r+1} - \frac{s}{2s+r-1} \right\} \equiv k \varphi_{rs}, \\ \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_\theta \rho^r \cos 2s\theta d\rho d\theta &= \pi k \alpha_s \left\{ \frac{s}{2s+r-1} - \frac{s+1}{2s+r+1} \right\} \equiv k \psi_{rs}, \\ \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \tau_{r\theta} \rho^r \sin 2s\theta d\rho d\theta &= \pi k \alpha_s \left\{ \frac{1}{2s+r-1} - \frac{1}{2s+r+1} \right\} \equiv k \omega_{rs}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

r, s は正の整数である. (16) 式を (13) 式に代入し, 上の関係式を用いると

$$T = -\frac{P}{\pi a} \sum_{r=1}^4 \sum_{s=1}^4 t_{rs} a_r a_s \quad (19)$$

ただし $t_{11} = 36(\varphi_{50} - 2\varphi_{40} + \varphi_{30})$

$$* D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w - h \left\{ \sigma_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \sigma_\theta \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\} = 0 \quad (10)$$

板の境界条件および荷重幅比が与えられると, 座屈値 P は, 与えられた境界条件を満足する上式の固有値として定まる. 上式を直接積分することは困難であるので, Ritz の方法により次の変分の問題に変換する.

$$\delta(V - T) = 0 \quad (11)$$

**は常に対称であるが, これと直角な方向, すなわち $\theta = \pi/2$ の軸に関しては対称の場合と逆対称の場合が考えられる. (一様分布荷重の場合には対称型の波形が最低の座屈荷重に対応することがわかっているが, 荷重幅が変化した場合 どうかは予測できない.) したがって以下二つの場合に別けて考える.

(a) 対称型 この場合の波形を次のごとく仮定する.

$$w = (1 - 3\rho^2 + 2\rho^3) a_1 + \rho^2 (1 - \rho)^2 \{ a_2 + a_3 \cos 2\theta + a_4 \cos 4\theta \} \quad (16)$$

これはもちろん (15) 式を満足する. これを (12) 式に代入して整理すると

$$V = \frac{\pi D}{a^2} \sum_{r=1}^4 \sum_{s=1}^4 v_{rs} a_r a_s \quad (17)$$

ただし $v_{11} = 9$, $v_{22} = 7/15$,

$$v_{12} = v_{21} = 0.6, \dots$$

次に T を計算するにあたり次の関係を考慮する.

$$t_{22} = 4(4\varphi_{70} - 12\varphi_{60} + 13\varphi_{50} - 6\varphi_{40} + \varphi_{30}),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$t_{12} = t_{21} = 12(2\varphi_{60} - 5\varphi_{50} + 4\varphi_{40} - \varphi_{30}),$$

$$\dots\dots\dots$$

(17), (19) 両式を変分の式

$$\frac{\partial}{\partial a_r}(V-T)=0$$

に代入すると

$$\sum_{s=1}^4 (v_{rs}Q + t_{rs})a_s = 0, \quad r=1, 2, 3, 4, \dots \quad (20)$$

ただし $Q = \pi^2 D / Pa$.

(20) 式は a_s に関する連立同次方程式を与える。その係数行列式 $|v_{rs}Q + t_{rs}|$ を 0 とおくことにより Q が定まる。したがって求める座屈の特性値

$$\lambda = \frac{\rho h a^2}{D}, \quad \chi = \frac{Pa}{\pi D}. \quad \dots \quad (21)$$

が得られる。なお、かくして得られた Q の最大値が、最低の座屈荷重に対応し、またその Q の値を (20) 式に代入することにより、その場合の座屈波形が求められる。

(b) 逆対称型 この場合の波形を次のごとく仮定する。

$$w = \rho(1-\rho)^2 a_1 \cos \theta + \rho^2(1-\rho)^2 (a_2 \cos \theta + a_3 \cos 3\theta + a_4 \cos 5\theta) \dots \quad (22)$$

これを用いて前と同様にして座屈荷重および座屈波形が定められる。

(c) 計算結果 荷重幅比 α の種々の値に対して (a), (b) の両場合における λ, χ の第 4 近似値を示すと第 1 表および第 2 図を得る。これらから容易にわかるごとく、両場合における座屈荷重は α の減少とともに互に接近するが、(a) の場合の方が常に (b) の場

第 1 表 荷重幅比 α に対する λ, χ の値

α	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
(a)	λ	∞	65.4	34.4	24.0	18.4
	χ	12.8	13.1	13.8	14.4	14.7
(b)	λ	∞	70.9	39.1	30.3	27.8
	χ	13.7	14.2	15.6	18.2	22.2

第 2 図

合より低い。したがって、この場合円形板は外から何らかの拘束を加えない限り対称型に座屈する。

一様圧縮すなわち $\alpha=1$ の場合の λ の厳密値⁽¹⁾は、(a) の場合 14.68, (b) の場合 26.37 であり、ここで得られた値が、だいたい妥当なものであることがわかる。

一例として集中荷重の場合の座屈波形の式および図形を下に示す。C は定数である。

$$(a) : w = C \{ 0.460(1-3\rho^2+2\rho^3) - \rho^2(1-\rho)^2(0.733+\cos 2\theta + 0.047 \cos 4\theta) \},$$

$$(b) : w = C \{ 0.895\rho(1-\rho)^2 \cos \theta + \rho^2(1-\rho)^2(\cos \theta + 0.016 \cos 3\theta - 0.004 \cos 5\theta) \}.$$

第 3 図

第 4 図

なお比較のため著者が前に求めた周辺固定の正方形板の集中荷重による座屈波形⁽²⁾を第 4 図に示す。第 3 図 (a) とだいたい似ていることがわかる。この場合正方形板の一辺の長さを円形板の直径 $2a$ に等しくとると、 χ の値は 11.2 となり、円形板の場合の値 12.8 に比し 12.5% 低い。これは板の拘束の程度の差に基づくものと思われる。

5. 周辺単純支持の場合

この場合の境界条件は

$$\rho=1 : w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad \dots \quad (23)$$

前同様、座屈波形を二つの場合に別けて考える。

(a) 対 称 型

$$w = (1+C_1\rho^2+C_2\rho^3)a_1 + \rho^2(1+C_3\rho + C_4\rho^2)(a_2+a_3 \cos 2\theta + a_4 \cos 4\theta), \quad \dots \quad (24)$$

ただし

$$C_1 = -\frac{3(2+\nu)}{4+\nu}, \quad C_2 = \frac{2(1+\nu)}{4+\nu}$$

$$C_3 = -\frac{2(5+\nu)}{6+\nu}, \quad C_4 = \frac{4+\nu}{6+\nu}.$$

(b) 逆対称型

$$w = \rho(1 + C_5\rho + C_6\rho^2)a_1 \cos \theta$$

$$+ \rho^2(1 + C_3\rho + C_4\rho^2)(a_2 \cos \theta + a_3 \cos 3\theta$$

$$+ a_4 \cos 5\theta) \dots \dots \dots (25)$$

ただし

$$C_5 = -\frac{2(3+\nu)}{4+\nu}, \quad C_6 = \frac{2+\nu}{4+\nu}.$$

(24), (25) 式を用いて, 前と全く同様にして座屈荷重および座屈波形が求められる。

(c) 計算結果 ポアソン比 $\nu=0.3$ として計算した結果を第 2 表* および第 5 図に示す。この場合も対称型が最低の座屈荷重に対応することがわかる。

第 2 表 荷重幅比 α に対する λ, χ の値 ($\nu=0.3$)

α		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
(a)	λ	∞	20.9	10.5	6.99	5.25	4.199
	χ	4.182	4.185	4.190	4.195	4.198	4.199
(b)	λ	∞	33.6	18.7	14.6	13.3	13.2
	χ	6.48	6.73	7.47	8.75	10.7	13.2

第 5 図

一様圧縮すなわち $\alpha=1$ の場合の λ の厳密値⁽⁴⁾は, (a) の場合 4.196, (b) の場合 13.14 であり, この場合の近似度がきわめてよいことがわかる。

集中荷重の場合の座屈波形を下に示す。C は定数である。

$$(a) : w = C\{(1 - 1.605\rho^2 + 0.605\rho^3)$$

$$+ \rho^2(1 - 1.683\rho + 0.683\rho^2)(0.272$$

$$+ 0.180 \cos 2\theta + 0.005 \cos 4\theta)\},$$

$$(b) : w = C\{0.617\rho(1 - 1.535\rho + 0.535\rho^2) \cos \theta$$

$$+ \rho^2(1 - 1.683\rho + 0.683\rho^2)(\cos \theta$$

$$+ 0.090 \cos 3\theta + 0.006 \cos 5\theta)\}$$

第 6 図

第 7 図

比較のため, 周辺単純支持の正方形板の集中荷重による座屈波形⁽²⁾を第 7 図に示す。この場合の χ の値は 4.09 であり, 円形板の場合の値 4.18 に比し, 約 3% 低いことがわかる。

6. 結 論

周辺上に一對の局部的な等分布荷重をうける円形板の安定問題を Ritz の方法により解析した。板の境界条件としては, 固定および単純支持の二つの場合を考え, そのおのおのにつき荷重幅と座屈荷重および座屈波形の関係を明らかにするとともに, その結果を検討した。

終りに本研究に御指導を賜った樋口盛一教授に深甚の謝意を表する。

文 献

- (1) A. Nádai, *Z.V.D.I.*, Bd. 59, S. 169 (1915).
- (2) 筆者, 機械学会論文集, 20 巻 91 号, 174 ページ (昭 29) および 20 巻 99 号, 715 ページ (昭 29).
- (3) S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, p. 324 (1936).
- (4) A. Nádai, 前掲, ただし 13.14 は Nádai の導いた座屈の条件式 (該論文 222 ページ) から算出した。

* 筆者, 講演会前刷の (b) の場合の計算値は誤りにつき訂正する。