向を取る。

(4) 次に、パラメータ ε の増加にともなう振動型の移行を調べる。Bar II の曲げ振動は Bar I のねじりモーメントと釣合いながら種々の形状をなし、結合点での傾斜角も増減する。特に固有値 α_2 が $C^+(\alpha_2) = 0$ を満足すると結合点における傾斜角は零となり、Bar I, II ともに片持はりの振動をする。さらに ε が増加すると α_2 は減少し、結合点の角変位は増大する。また、固有値 α_2 が $U^-(\alpha_2) = 0$ を満足すると、Bar I があるにもかかわらず、Bar II は付加集中慣性モーメントのない左右非対称な振動と同じ形状で運動し、このとき結合点での傾斜角は極大になる。その後、傾斜角は減少の傾向を取る。

6. 結 言

本報告においては十字型はりのうち、ギリシヤ型の振動体の自由振動を理論解析し、振動数方程式および振動型を求めた。また数値計算を行い振動数に及ぼす諸種の影響、振動型の移行状態を明らかにした。第

2 図に見られるように対称振動において固有値が寸法比 l_2/l_1 とともに階段的に変化し、しかも 45 度の傾斜で次の段に移行するありさまは、たいへん興味深く、今後模型実験により確かめる予定である。

終りに、本研究に終始御指導を賜った栖原豊太郎教授に謹んで感謝いたします。

文 献

- (1) 妹沢克雄, 「振動学」中に多くの実例がある。
- (2) 奥村, 構造物の振動問題の一解法, 昭 28-4-2, 材料力学同好会講演前刷。
A. Okumura, *Proc. 2nd Japan N.C.A.M.*, p. 323 (1952). A. Okumura, *Proc. 4th Japan N.C.A.M.*, p. 353 (1954).
- (3) 妹沢, 東京帝国大学航空研究所彙報, 74 号, 404 ページ (昭 5); 87 号, 622 ページ (昭 5)。
- (4) 清水, 機械学会論文集, 9 巻 36 号, I-146 ページ (昭 18); 9 巻 37 号, I-210 ページ (昭 18); 12 巻 42 号, 14 ページ (昭 21)。
高橋・奥村・堀江, 機械学会論文集, 17 巻 64 号, 31 ページ (昭 26)。
- (5) 妹沢, 東京帝国大学航空研究所彙報, 145 号, 568 ページ (昭 11); 148 号, 700 ページ (昭 11); 151 号, 107 ページ (昭 12)。

621.824-185.7:534.014.2

弾性支持された有軸機械系の強制振動に関する研究*

木 内 石**

On the Forced Vibration Characteristics of a Elastically Supported Mechanical System with a Shaft

by Atsushi KIUCHI

This paper deals with problems of a forced vibration characteristics of a elastically supported mechanical system with a shaft. Such a problem, for instance, occurs in a jet engine put on a wing of an aeroplane. Fundamental equations and their solutions are obtained. Numerical calculations and experiments for special cases are also given. The author shows how the forced vibration of such a system is influenced by the shaft within it and how the forced vibration of the shaft varies in response to conditions of the elastic supports. The shaft cross section is uniform.

1. 序 言

前に筆者は軸を有し、かつ弾性支持された機械系の自由振動に関する研究を行ったのであるが、本論文においてはこのような機械系 (第 1 図参照) が種々の原因により、強制外力を受けて強制振動を生ずる場合の特性を論ずるものである。ただし、その構造は外殻 C が軸 AB と直角方向の並進運動と軸の中心線上の点ま

わりの回転運動とが許容せられ、かつ外殻の弾性中心 E および外殻の重心 G はともに軸の中心線上にあるものとする。

2. 解析の基礎

強制力および強制モーメントによる強制振動を考える。外殻 C 上の任意の点に加えられた強制力および強制モーメントはもちろん重心 G に関する力およびモーメントに直しうるわけであるから、重心 G に関する強制力および強制モーメントによる強制振動を考えても一般性を失わない。第 2 図のように弾性支持された外

* 昭和 30 年 9 月 23 日 東海支部講演会において講演, 原稿受付 昭和 30 年 9 月 27 日。

** 正員, 静岡大学工学部。

第 1 図

第 2 図

殻の重心 G に対し Y 方向に $(F + \bar{F}) \sin \omega t$ なる力、
重心まわりに $(M + \bar{M}) \sin \omega t$ なるモーメントを加えた
場合の重心の Y 方向の変位 Y および外殻の傾斜角 Φ は

$$Y = \frac{1}{A} \left\{ \frac{(F + \bar{F})(-\omega^2 + \bar{k}_y^2)}{m_c} + \frac{(M + \bar{M})h\bar{k}_y^2}{m_c J^2} \right\} \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{ここに } Y_G = \left\{ \frac{(F_0 + F_l)(-\omega^2 + \bar{k}_y^2)}{m_c} + \frac{(-M_0 + M_l - F_0 \bar{l}_1 + F_l \bar{l}_2)h\bar{k}_y^2}{m_c J^2} \right\} / A \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\Phi_G = \left\{ \frac{(-M_0 + M_l - F_0 \bar{l}_1 + F_l \bar{l}_2)(-\omega^2 + \bar{k}_y^2)}{m_c J^2} + \frac{(F_0 + F_l)h\bar{k}_y^2}{m_c J^2} \right\} / A \quad \dots\dots\dots (8)$$

軸が $W(x) \sin \omega t$ なる振動をしている場合には、次の関係がある。

$$\begin{bmatrix} W(l) \\ lW'(l) \\ l^2W''(l) \\ l^3W'''(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b/\alpha & c/\alpha^2 & d/\alpha^3 \\ \alpha d & a & b/\alpha & c/\alpha^2 \\ \alpha^2 c & \alpha d & a & b/\alpha \\ \alpha^3 b & \alpha^2 c & \alpha d & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(0) \\ lW'(0) \\ l^2W''(0) \\ l^3W'''(0) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{ここに } \alpha = l\beta, \quad \beta^4 = A\rho\omega^2/EI \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= (\cosh \alpha + \cos \alpha)/2, & b &= (\sinh \alpha + \sin \alpha)/2 \\ c &= (\cosh \alpha - \cos \alpha)/2, & d &= (\sinh \alpha - \sin \alpha)/2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

E : 軸を形成する材料の縦弾性係数

I : 軸の断面二次モーメント

ρ : 軸の密度, A : 軸の断面積

軸の端来が外殻に連結されている場合には次の関係が

$$\Phi = \frac{1}{A} \left\{ \frac{(M + \bar{M})(-\omega^2 + \bar{k}_y^2)}{m_c J^2} + \frac{(F + \bar{F})h\bar{k}_y^2}{m_c J^2} \right\} \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに

$$A = (-\omega^2 + \bar{k}_\phi^2)(-\omega^2 + \bar{k}_y^2) - \bar{k}_y^4 h^2 / J^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\bar{k}_\phi^2 = (k_\phi + k_y h^2) / m_c J^2, \quad \bar{k}_y^2 = k_y / m_c \quad \dots\dots\dots (4)$$

m_c : 外殻の質量, J : 外殻の重心まわりの回転二次半径, k_y : 外殻の弾性中心の Y 方向の単位変位に対する力の大きさ, k_ϕ : 外殻の弾性中心まわりの単位回転角に対するモーメントの大きさ, h : GE 間の距離で第 2 図のような場合を正とする。更に軸の両端から

第 3 図

外殻が受ける力 F_0, M_0, F_l, M_l (第 3 図) を外殻が受ける外力を考え $\bar{F} = F_0 + F_l, \bar{M} = -M_0 + M_l$ とし、そのときの (1), (2) による Y, Φ の値を、それぞれ $\bar{Y}_G, \sin \omega t \bar{\Phi}_G \sin \omega t$ とすると

$$\bar{Y}_G = Y_G + \frac{1}{A} \left\{ \frac{F(-\omega^2 + \bar{k}_y^2)}{m_c} + \frac{Mh\bar{k}_y^2}{m_c J^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\bar{\Phi}_G = \Phi_G + \frac{1}{A} \left\{ \frac{M(-\omega^2 + \bar{k}_y^2)}{m_c J^2} + \frac{Fh\bar{k}_y^2}{m_c J^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ある。

$$W(0) = \bar{Y}_G - \bar{l}_1 \bar{\Phi}_G, \quad W(l) = \bar{Y}_G + \bar{l}_2 \bar{\Phi}_G \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$M_0 = -EIW''(0), \quad M_l = -EIW''(l) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$F_0 = -EIW'''(0), \quad F_l = EIW'''(l) \quad \dots\dots\dots (14)$$

(5), (6), (9), (12), (13), (14) 式から次式をうる。

$$A_1 W(0) + B_1 (l/\alpha) W'(0) + C_1 (l/\alpha)^2 W''(0) + D_1 (l/\alpha)^3 W'''(0) = (\mathfrak{B}_1 M l^2 / EI) - (\mathfrak{A}_1 F l^3 / EI) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$A_2 W(0) + B_2 (l/\alpha) W'(0) + C_2 (l/\alpha^2) W''(0) + D_2 (l/\alpha^3) W'''(0) = (-\mathfrak{B}_2 M l^2 / EI) - (\mathfrak{U}_2 F l^3 / EI) \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \alpha^3 b \mathfrak{U} + \alpha^2 c \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{C} \\ B_1 &= \alpha^3 c \mathfrak{U} + \alpha^2 d \mathfrak{B}_1 \\ C_1 &= \alpha^3 d \mathfrak{U} + \alpha^2 a \mathfrak{B}_1 - \alpha^2 \mathfrak{B}_1 \\ D_1 &= \alpha^3 a \mathfrak{U} + \alpha^2 b \mathfrak{B}_1 - \alpha^3 \mathfrak{D}_1 \\ A_2 &= \alpha^3 b \mathfrak{D}_2 - \alpha^2 c \mathfrak{B}_2 - a \mathfrak{C} \\ B_2 &= \alpha^3 c \mathfrak{D}_2 - \alpha^2 d \mathfrak{B}_2 - b \mathfrak{C} \\ C_2 &= \alpha^3 d \mathfrak{D}_2 - \alpha^2 a \mathfrak{B}_2 - c \mathfrak{C} + \alpha^2 \mathfrak{B}_2 \\ D_2 &= \alpha^3 a \mathfrak{D}_2 - \alpha^2 b \mathfrak{B}_2 - d \mathfrak{C} - \alpha^3 \mathfrak{U} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \alpha^3 b \mathfrak{D}_2 - \alpha^2 c \mathfrak{B}_2 - a \mathfrak{C} \\ B_2 &= \alpha^3 c \mathfrak{D}_2 - \alpha^2 d \mathfrak{B}_2 - b \mathfrak{C} \\ C_2 &= \alpha^3 d \mathfrak{D}_2 - \alpha^2 a \mathfrak{B}_2 - c \mathfrak{C} + \alpha^2 \mathfrak{B}_2 \\ D_2 &= \alpha^3 a \mathfrak{D}_2 - \alpha^2 b \mathfrak{B}_2 - d \mathfrak{C} - \alpha^3 \mathfrak{U} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U} &= \bar{K}_\phi - \nu_1 \nu_2 \bar{K}_y + \{\nu^2 + \nu(\nu_2 - \nu_1)\} K_y \\ \mathfrak{C} &= \bar{K}_\phi \bar{K}_y - \nu^2 K_y R \alpha^4 \\ \mathfrak{B}_1 &= \nu_1 \bar{K}_y - \nu K_y, \quad \mathfrak{B}_2 = \nu_2 \bar{K}_y + \nu K_y \\ \mathfrak{U}_1 &= \nu(\nu - \nu_1) K_y + \bar{K}_\phi = \mathfrak{U} + \nu_2 \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{U}_2 &= \nu(\nu + \nu_2) K_y + \bar{K}_\phi = \mathfrak{U} + \nu_1 \mathfrak{B}_2 \\ \mathfrak{D}_1 &= \bar{K}_\phi + \nu_1^2 \bar{K}_y + \nu(\nu - 2\nu_1) K_y \\ \mathfrak{D}_2 &= \bar{K}_\phi + \nu_2^2 \bar{K}_y + \nu(\nu + 2\nu_2) K_y \\ \bar{K}_\phi &= K_\phi - \gamma \alpha^4, \quad K_\phi = l k_\phi / EI \\ \gamma &= m_c J^2 / m_b l^2, \quad m_b: \text{軸の質量} \\ \bar{K}_y &= K_y - R \alpha^4, \quad K_y = l^3 k_y / EI \\ R &= m_c / m_b, \quad \nu = h / l, \quad \nu_1 = \bar{l}_1 / l, \\ \nu_2 &= \bar{l}_2 / l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_\phi &= K_\phi - \gamma \alpha^4, \quad K_\phi = l k_\phi / EI \\ \gamma &= m_c J^2 / m_b l^2, \quad m_b: \text{軸の質量} \\ \bar{K}_y &= K_y - R \alpha^4, \quad K_y = l^3 k_y / EI \\ R &= m_c / m_b, \quad \nu = h / l, \quad \nu_1 = \bar{l}_1 / l, \\ \nu_2 &= \bar{l}_2 / l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

3. 軸の両端が回転支持の場合 (回転-回転の場合)

3・1 軸の両端の変位 $W''(0)=0, W''(l)=0$ なる条件と (15), (16) 式とから

$$W(0) = [\{\alpha^3(bc-ad+d) + (d^2-b^2)\mathfrak{B}_1\} l^2 M / EI \mathcal{A}_{ss}] + [\{\alpha^3\nu_2(ad-bc) + \nu_1\alpha^3d + (b^2-d^2)\mathfrak{U}_1\} l^3 F / EI \mathcal{A}_{ss}] \dots\dots\dots (21)$$

$$W'(0) = [\{\alpha^3(ca-b^2-c) + (ab-cd)\mathfrak{B}_1 + b\mathfrak{B}_2\} \alpha l M / EI \mathcal{A}_{ss}] + [\{\nu_2\alpha^3(b^2-ca) - \nu_1\alpha^3 + (cd-ab)\mathfrak{U}_1 + b\mathfrak{U}_2\} \alpha l^2 F / EI \mathcal{A}_{ss}] \dots\dots\dots (22)$$

$$W'''(0) = [\{\alpha^3(bd-c^2) + (bc-ad)\mathfrak{B}_1 - d\mathfrak{B}_2\} \alpha^3 M / EI \mathcal{A}_{ss}] + [\{\nu_2\alpha^3(c^2-bd) + (ad-bc)\mathfrak{U}_1 - d\mathfrak{U}_2\} \alpha^3 F / EI \mathcal{A}_{ss}] \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } \mathcal{A}_{ss} &= (b^2-d^2)\mathfrak{C} - 2d\alpha^3\mathfrak{U} \\ &+ (ad-bc)\alpha^3(\mathfrak{D}_1+\mathfrak{D}_2) + (c^2-bd)\alpha^6 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$\mathcal{A}_{ss}=0 \dots\dots (25)$ は固有振動式である。

(9), (21), (22), (23) から $W(l)$ を求めると

$$\begin{aligned} W(l) &= \frac{\{\alpha^3(ad-bc-d) + (b^2-d^2)\mathfrak{B}_2\} l^2 M}{EI \mathcal{A}_{ss}} \\ &+ \frac{\{\nu_1\alpha^3(ad-bc) + \nu_2\alpha^3d + (b^2-d^2)\mathfrak{U}_2\} l^3 F}{EI \mathcal{A}_{ss}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{Q}}_G &= [\{2\alpha^3(ad-bc-d) + (b^2-d^2)(\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_2)\} l M / EI \mathcal{A}_{ss}] \\ &+ [\{(\nu_1-\nu_2)\alpha^3(ad-bc) + (\nu_2-\nu_1)\alpha^3d + (b^2-d^2)(\mathfrak{U}_2-\mathfrak{U}_1)\} l^2 F / EI \mathcal{A}_{ss}] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (28)$$

また $\bar{Y}_G = \nu_2 W(0) + \nu_1 W(l) \dots\dots (29)$ であるから外殻の重心の変位は

$$\begin{aligned} \bar{Y}_G &= [\{\alpha^3(bc-ad+d)(\nu_2-\nu_1) + (b^2-d^2)(\nu_1\mathfrak{B}_2-\nu_2\mathfrak{B}_1)\} l^2 M / EI \mathcal{A}_{ss}] \\ &+ [\{\alpha^3(ad-bc)(\nu_1^2+\nu_2^2) + 2\nu_1\nu_2\alpha^3d + (b^2-d^2)(\nu_2\mathfrak{U}_1+\nu_1\mathfrak{U}_2)\} l^3 F / EI \mathcal{A}_{ss}] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (30)$$

3・3 軸上各点の変位, 傾斜, 曲げモーメント, せん断力 一般に軸の振動においては次の関係がある。

$$\begin{bmatrix} W(\bar{x}) \\ W'(\bar{x}) \\ W''(\bar{x}) \\ W'''(\bar{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\bar{x}) & (l/\alpha)b(\bar{x}) & (l/\alpha)^2c(\bar{x}) & (l/\alpha)^3d(\bar{x}) \\ (\alpha/l)d(\bar{x}) & a(\bar{x}) & (l/\alpha)b(\bar{x}) & (l/\alpha)^2c(\bar{x}) \\ (\alpha/l)^2c(\bar{x}) & (\alpha/l)d(\bar{x}) & a(\bar{x}) & (l/\alpha)b(\bar{x}) \\ (\alpha/l)^3d(\bar{x}) & (\alpha/l)^2c(\bar{x}) & (\alpha/l)d(\bar{x}) & a(\bar{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(0) \\ W'(0) \\ W''(0) \\ W'''(0) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } a(\bar{x}) &= (\cosh \alpha \bar{x} + \cos \alpha \bar{x})/2, \quad b(\bar{x}) = (\sinh \alpha \bar{x} + \sin \alpha \bar{x})/2 \\ c(\bar{x}) &= (\cosh \alpha \bar{x} - \cos \alpha \bar{x})/2, \quad d(\bar{x}) = (\sinh \alpha \bar{x} - \sin \alpha \bar{x})/2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$\bar{x}=x/l \dots\dots (33)$ したがって軸上各点の変位 $W(\bar{x})$, 傾斜 $W'(\bar{x})$, 曲げモーメント M_b , せん断力 F_b を求めると

$$\begin{aligned} W(\bar{x}) &= [\{\alpha^3(bc-ad) + \alpha^3d + (d^2-b^2)\mathfrak{B}_1\} a(\bar{x}) + \{\alpha^3(ca-b^2) - \alpha^3c + (ab-cd)\mathfrak{B}_1 + b\mathfrak{B}_2\} b(\bar{x}) \\ &+ \{\alpha^3(bd-c^2) + (bc-ad)\mathfrak{B}_1 - d\mathfrak{B}_2\} d(\bar{x})] l^2 M / EI \mathcal{A}_{ss} \\ &+ [\{\alpha^3\nu_2(ad-bc) + \nu_1\alpha^3d + (b^2-d^2)\mathfrak{U}_1\} a(\bar{x}) + \{\alpha^3\nu_2(b^2-ca) - \nu_1\alpha^3 + \mathfrak{U}_1(cd-ab) + b\mathfrak{U}_2\} b(\bar{x}) \\ &+ \{\nu_2\alpha^3(c^2-bd) + \mathfrak{U}_1(ad-bc) - d\mathfrak{U}_2\} d(\bar{x})] l^3 F / EI \mathcal{A}_{ss} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$\begin{aligned} W'(\bar{x}) &= [\{\alpha^3(bc-ad) + \alpha^3d + (d^2-b^2)\mathfrak{B}_1\} d(\bar{x}) + \{\alpha^3(ca-b^2) - \alpha^3c + (ab-cd)\mathfrak{B}_1 + b\mathfrak{B}_2\} a(\bar{x}) \\ &+ \{\alpha^3(bd-c^2) + (bc-ad)\mathfrak{B}_1 - d\mathfrak{B}_2\} c(\bar{x})] \alpha l M / EI \mathcal{A}_{ss} \end{aligned}$$

$$+ [\{\alpha^3 \nu_2(ad-bc) + \nu_1 \alpha^3 d + (b^2-d^2) \mathfrak{U}_1\} d(\bar{x}) + \{\alpha^3 \nu_2(b^2-ca) - \nu_1 c \alpha^3 + \mathfrak{U}_1(cd-ab) + b \mathfrak{U}_2\} a(\bar{x}) + \{\nu_2 \alpha^3(c^2-bd) + \mathfrak{U}_1(ad-bc) - d \mathfrak{U}_2\} c(\bar{x})] \alpha l^2 F / EI \Delta_{ss} \dots (35)$$

$$M_b(\bar{x}) = [\{\alpha^3(bc-ad) + \alpha^3 d + (d^2-b^2) \mathfrak{B}_1\} c(\bar{x}) + \{\alpha^3(ca-b^2) - \alpha^3 c + (ab-cd) \mathfrak{B}_1 + b \mathfrak{B}_2\} d(\bar{x}) + \{\alpha^3(bd-c^2) + (bc-ad) \mathfrak{B}_1 - d \mathfrak{B}_2\} b(\bar{x})] \alpha^2 M / \Delta_{ss} \\ + [\{\alpha^3 \nu_2(ad-bc) + \nu_1 \alpha^3 d + (b^2-d^2) \mathfrak{U}_1\} c(\bar{x}) + \{\alpha^3 \nu_2(b^2-ca) - \nu_1 c \alpha^3 + \mathfrak{U}_1(cd-ab) + b \mathfrak{U}_2\} d(\bar{x}) + \{\alpha^3 \nu_2(c^2-bd) + \mathfrak{U}_1(ad-bc) - d \mathfrak{U}_2\} b(\bar{x})] \alpha^2 l F / \Delta_{ss} \dots (36)$$

$$F_b(\bar{x}) = [\{\alpha^3(bc-ad) + \alpha^3 d + (d^2-b^2) \mathfrak{B}_1\} b(\bar{x}) + \{\alpha^3(ca-b^2) - \alpha^3 c + (ab-cd) \mathfrak{B}_1 + b \mathfrak{B}_2\} c(\bar{x}) + \{\alpha^3(bd-c^2) + (bc-ad) \mathfrak{B}_1 - d \mathfrak{B}_2\} a(\bar{x})] \alpha^3 M / l \Delta_{ss} \\ + [\{\alpha^3 \nu_2(ad-bc) + \nu_1 \alpha^3 d + (b^2-d^2) \mathfrak{U}_1\} b(\bar{x}) + \{\alpha^3 \nu_2(b^2-ca) - \nu_1 c \alpha^3 + \mathfrak{U}_1(cd-ab) + b \mathfrak{U}_2\} c(\bar{x}) + \{\alpha^3 \nu_2(c^2-bd) + \mathfrak{U}_1(ad-bc) - d \mathfrak{U}_2\} a(\bar{x})] \alpha^3 F / \Delta_{ss} \dots (37)$$

3・4 軸の節点 軸の節点は $W(\bar{x})=0$ の点であるから (34) から

$$[\{\alpha^3(bc-ad+d) + (d^2-b^2) \mathfrak{B}_1\} a(\bar{x}) + \{\alpha^3(ca-b^2-c) + (ab-cd) \mathfrak{B}_1 + b \mathfrak{B}_2\} b(\bar{x}) + \{\alpha^3(bd-c^2) + (bc-ad) \mathfrak{B}_1 - d \mathfrak{B}_2\} d(\bar{x})] M + [\{\alpha^3 \nu_2(ad-bc) + \nu_1 \alpha^3 d + (b^2-d^2) \mathfrak{U}_1\} a(\bar{x}) + \{\alpha^3 \nu_2(b^2-ca) - \nu_1 c \alpha^3 + \mathfrak{U}_1(cd-ab) + b \mathfrak{U}_2\} b(\bar{x}) + \{\nu_2 \alpha^3(c^2-bd) + \mathfrak{U}_1(ad-bc) - d \mathfrak{U}_2\} d(\bar{x})] l F = 0 \dots (38)$$

4. 軸の両端が固定的条件の場合 (固定-固定の場合)

4・1 軸の両端の変位 この場合は

$$W'(0) = \overline{\Phi}_G \dots (39), \quad W'(l) = W'(l) \dots (40)$$

なる関係がある。(39) なる関係から次式をうる。

$$A_3 W(0) + B_3(l/a) W'(0) + C_3(l/\alpha) W''(0) + D_3(l/\alpha)^3 W'''(0) = -\{(Ml^2 \overline{K}_y / EI) + (Fl^3 \nu K_y / EI)\} \dots (41)$$

ここに $A_3 = \alpha^3 b \mathfrak{B}_2 - \alpha^2 c \overline{K}_y$,

$$B_3 = \alpha^3 c \mathfrak{B}_2 - \alpha^2 d \overline{K}_y - \alpha \mathfrak{C}, \\ C_3 = \alpha^3 d \mathfrak{B}_2 - \alpha^2 a \overline{K}_y + \alpha^2 \overline{K}_y, \\ D_3 = \alpha^3 a \mathfrak{B}_2 - \alpha^2 b \overline{K}_y + \alpha^3 \mathfrak{B}_1 \dots (42)$$

(15), (16), (40), (41) から $W(0)$ などを求めると

$$W(0) = Ml^2 \Delta_1 / (EI \Delta_{rr}) - Fl^3 \Delta_2 / (EI \Delta_{rr}) \\ W'(0) = Ml \alpha \Delta_3 / (EI \Delta_{rr}) - Fl^2 \alpha \Delta_4 / (EI \Delta_{rr}) \\ W''(0) = M \alpha^2 \Delta_5 / (EI \Delta_{rr}) - Fl \alpha^2 \Delta_6 / (EI \Delta_{rr}) \\ W'''(0) = M \alpha^3 \Delta_7 / (EI \Delta_{rr}) - F \alpha^3 \Delta_8 / (EI \Delta_{rr}) \dots (43)$$

ここに

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ -\mathfrak{B}_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ -\overline{K}_y & B_3 & C_3 & D_3 \\ 0 & a-1 & b & c \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{U}_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ \mathfrak{U}_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \nu K_y & B_3 & C_3 & D_3 \\ 0 & a-1 & b & c \end{vmatrix} \dots (44)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & \mathfrak{B}_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & -\mathfrak{B}_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & -\overline{K}_y & C_3 & D_3 \\ d & 0 & b & c \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} A_1 & \mathfrak{U}_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & \mathfrak{U}_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & \nu K_y & C_3 & D_3 \\ d & 0 & b & c \end{vmatrix} \dots (45)$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \mathfrak{B}_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & -\mathfrak{B}_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & -\overline{K}_y & D_3 \\ d & a-1 & 0 & c \end{vmatrix}, \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \mathfrak{U}_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & \mathfrak{U}_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & \nu K_y & D_3 \\ d & a-1 & 0 & c \end{vmatrix} \dots (46)$$

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \mathfrak{B}_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -\mathfrak{B}_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -\overline{K}_y \\ d & a-1 & b & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_8 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \mathfrak{U}_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \mathfrak{U}_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & \nu K_y \\ d & a-1 & b & 0 \end{vmatrix} \dots (47)$$

$$\Delta_{rr} = \mathfrak{C}(c^2-bd) - 2\mathfrak{U}\alpha^3 b + \mathfrak{D}\alpha^3(ab-cd) + 2\alpha \overline{K}_y \{d+bc-ad\} - \alpha(c+b^2-d^2) \\ - 2\alpha^4 \{4a+(c^2-a^2)+2(bd-a^2)-1\} + 4\alpha^5 \{d+(bc-ad)\} - (b^2-d^2)\alpha^6 \dots (48)$$

$\Delta_{rr}=0$ (49) は、この場合の固有振動数式である。B 点の変位 $W(l)$ は

$$W(l) = [a \Delta_1 + b \Delta_3 + c \Delta_5 + d \Delta_7] M l^2 / EI \Delta_{rr} - [a \Delta_2 + b \Delta_4 + c \Delta_6 + d \Delta_8] F l^3 / EI \Delta_{rr} \dots (50)$$

4・2 外殻の変位と回転角 ゆえに外殻の重心の変位 $\overline{Y}_G$ は

$$\overline{Y}_G = M \{a + (\nu_2/\nu_1)\} \Delta_1 + b \Delta_3 + c \Delta_5 + d \Delta_7 \nu_1 l^2 / EI \Delta_{rr} \\ - F \{a + (\nu_2/\nu_1)\} \Delta_2 + b \Delta_4 + c \Delta_6 + d \Delta_8 \nu_1 l^3 / EI \Delta_{rr} \dots (51)$$

外殻の回転角 $\overline{\Phi}_G$ は (39) 式から求めることができる。

4・3 軸上各点の変位, 傾斜, 曲げモーメント, せん断力 軸上各点の変位 $W(\bar{x})$, 傾斜 $W'(\bar{x})$, 曲げモーメント $M_b(\bar{x})$, せん断力 $F_b(\bar{x})$ は次のようになる。

$$W(\bar{x}) = M[A_1a(\bar{x}) + A_3b(\bar{x}) + A_5c(\bar{x}) + A_7d(\bar{x})]l^2/EI\Delta_{rr} \\ - F[A_2a(\bar{x}) + A_4b(\bar{x}) + A_6c(\bar{x}) + A_8d(\bar{x})]l^3/EI\Delta_{rr} \quad (52)$$

$$W'(\bar{x}) = M[A_1d(\bar{x}) + A_3a(\bar{x}) + A_5b(\bar{x}) + A_7c(\bar{x})]\alpha l/EI\Delta_{rr} \\ - F[A_2d(\bar{x}) + A_4a(\bar{x}) + A_6b(\bar{x}) + A_8c(\bar{x})]\alpha l^2/EI\Delta_{rr} \quad (53)$$

$$M_b(\bar{x}) = M[A_1c(\bar{x}) + A_3d(\bar{x}) + A_5a(\bar{x}) + A_7b(\bar{x})]\alpha^2/\Delta_{rr} \\ - F[A_2c(\bar{x}) + A_4d(\bar{x}) + A_6a(\bar{x}) + A_8b(\bar{x})]l\alpha^2/\Delta_{rr} \quad (54)$$

$$F_b(\bar{x}) = M[A_1b(x) + A_3c(x) + A_5d(x) + A_7a(x)]\alpha^3/l\Delta_{rr} \\ - F[A_2b(x) + A_4c(x) + A_6d(x) + A_8a(x)]\alpha^3/\Delta_{rr} \quad (55)$$

4.4 軸の節点

$$[A_1a(\bar{x}) + A_3b(\bar{x}) + A_5c(\bar{x}) + A_7d(\bar{x})]M - [A_2a(\bar{x}) + A_4b(\bar{x}) + A_6c(\bar{x}) + A_8d(\bar{x})]lF = 0 \quad (56)$$

5. 軸の一端が固定的条件で他端が回転的 条件の場合 (固定-回転の場合)

5.1 軸の両端の変位 この場合は (15), (16),

(39) の条件の外に, $W(l) = 0$ なる条件が存在するから, 次の関係式をうる.

$$W(0) = Ml^2A_{11}/(EI\Delta_{rs}) - Fl^3A_{12}/(EI\Delta_{rs}) \\ W'(0) = Ml\alpha A_{13}/(EI\Delta_{rs}) - Fl^2A_{14}/(EI\Delta_{rs}) \\ W''(0) = M\alpha^2A_{15}/(EI\Delta_{rs}) - Fl\alpha^2A_{16}/(EI\Delta_{rs}) \\ W'''(0) = M\alpha^3A_{17}/(EI\Delta_{rs}) - F\alpha^3A_{18}/(EI\Delta_{rs}) \quad (57)$$

ここに

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ -\mathfrak{B}_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ -\overline{K}_y & B_3 & C_3 & D_3 \\ 0 & d & a & b \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} \mathfrak{U}_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ \mathfrak{U}_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \nu K_y & B_3 & C_3 & D_3 \\ 0 & d & a & b \end{vmatrix} \quad (58)$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} A_1 & \mathfrak{B}_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & -\mathfrak{B}_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & -\overline{K}_y & C_3 & D_3 \\ c & 0 & a & b \end{vmatrix}, \quad A_{14} = \begin{vmatrix} A_1 & \mathfrak{U}_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & \mathfrak{U}_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & \nu K_y & C_3 & D_3 \\ c & 0 & a & b \end{vmatrix} \quad (59)$$

$$A_{15} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \mathfrak{B}_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & -\mathfrak{B}_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & -\overline{K}_y & D_3 \\ c & d & 0 & b \end{vmatrix}, \quad A_{16} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \mathfrak{U}_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & \mathfrak{U}_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & \nu K_y & D_3 \\ c & d & 0 & b \end{vmatrix} \quad (60)$$

$$A_{17} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \mathfrak{B}_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -\mathfrak{B}_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -\overline{K}_y \\ c & d & a & 0 \end{vmatrix}, \quad A_{18} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \mathfrak{U}_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \mathfrak{U}_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & \nu K_y \\ c & d & a & 0 \end{vmatrix} \quad (61)$$

$$\Delta_{rs} = \mathfrak{C}(bc - ad) - 2\mathfrak{U}\alpha^3a + \overline{K}_y\alpha(b^2 - d^2) - 2\mathfrak{B}_1\alpha^2(ab - cd) \\ - 2\mathfrak{B}_2\alpha^2b + \mathfrak{D}_1\alpha^3(a^2 - c^2) + \mathfrak{D}_2\alpha^3(a^2 - bd) - \alpha^6(ab - cd) \\ + \alpha^5\{2c + (b^2 - d^2)\} - 2\alpha^4\{d + (bc - ad)\} \quad (62)$$

$\Delta_{rs} = 0$ (63) は, この場合の固有振動式である.

B 点の変位 $W(l)$ は

$$W(l) = [aA_{11} + bA_{13} + cA_{15} + dA_{17}]Ml^2/EI\Delta_{rs} - [aA_{12} + bA_{14} + cA_{16} + dA_{18}]Fl^3/EI\Delta_{rs} \quad (64)$$

5.2 外殻の変位と回転角 外殻の回転角 $\overline{\Phi}_G$ および外殻の重心の変位 $\overline{Y}_G$ は

$$\overline{\Phi}_G = [(a-1)A_{11} + bA_{13} + cA_{15} + dA_{17}]Ml/EI\Delta_{rs} - [(a-1)A_{12} + bA_{14} + cA_{16} + dA_{18}]Fl^2/EI\Delta_{rs} \quad (65)$$

$$\overline{Y}_G = [\{a + (\nu_2/\nu_1)\}A + bA_4 + cA_6 + dA_8]M\nu_1l^2/EI\Delta_{rs} \\ - [\{a + (\nu_2/\nu_1)\}A_2 + bA_4 + cA_6 + dA_8]F\nu_1l^3/EI\Delta_{rs} \quad (66)$$

5.3 軸上各点の変位 $W(\bar{x})$, 傾斜 $W'(\bar{x})$, 曲げモーメント $M_b(\bar{x})$, せん断力 $F_b(\bar{x})$

$$W(\bar{x}) = M[A_{11}a(\bar{x}) + A_{13}b(\bar{x}) + A_{15}c(\bar{x}) + A_{17}d(\bar{x})]l^2/EI\Delta_{rs} \\ - F[A_{12}a(\bar{x}) + A_{14}b(\bar{x}) + A_{16}c(\bar{x}) + A_{18}d(\bar{x})]l^3/EI\Delta_{rs} \quad (67)$$

$$W'(\bar{x}) = M[A_{11}d(\bar{x}) + A_{13}a(\bar{x}) + A_{15}b(\bar{x}) + A_{17}c(\bar{x})]\alpha l/EI\Delta_{rs} \\ - F[A_{12}d(\bar{x}) + A_{14}a(\bar{x}) + A_{16}b(\bar{x}) + A_{18}c(\bar{x})]\alpha l^2/EI\Delta_{rs} \quad (68)$$

$$M_b(\bar{x}) = M[A_{11}c(\bar{x}) + A_{13}d(\bar{x}) + A_{15}a(\bar{x}) + A_{17}b(\bar{x})]\alpha^2/\Delta_{rs} \\ - F[A_{12}c(\bar{x}) + A_{14}d(\bar{x}) + A_{16}a(\bar{x}) + A_{18}b(\bar{x})]l\alpha^2/\Delta_{rs} \quad (69)$$

$$F_b(\bar{x}) = M[A_{11}b(x) + A_{13}c(x) + A_{15}d(x) + A_{17}a(x)]\alpha^3/l\Delta_{rs} \\ - F[A_{12}b(x) + A_{14}c(x) + A_{16}d(x) + A_{18}a(x)]\alpha^3/\Delta_{rs} \quad (70)$$

5・4 軸の節点 軸の節点の位置は

$$\left. \begin{aligned} &[A_{11}a(\bar{x}) + A_{13}b(\bar{x}) + A_{15}c(\bar{x}) \\ &+ A_{17}d(\bar{x})]M - [A_{12}a(\bar{x}) + A_{14}b(\bar{x}) \\ &+ A_{16}c(\bar{x}) + A_{18}d(\bar{x})]lF = 0 \end{aligned} \right\} \dots (71)$$

6. 軸の一端が自由端的で他端が固定端的である場合 (自由-固定の場合)

いま A 点が自由で B 点が固定であるとする。この場合は (12) 式は不成立であって、(13) 式の外に $W'(l) = \bar{\Phi}_G \dots (72)$, $W''(0) = 0$, $W'''(0) = 0$ なる条件がある。(72) から

$$\begin{aligned} &A_4 W(0) + B_4 (l/\alpha) W'(0) + C_4 (l/\alpha)^2 W''(0) \\ &+ D_4 (l/\alpha)^3 W'''(0) \\ &= -\{Ml^2 \bar{K}_y / EI + Fl^3 \nu K_y / EI\} \dots (73) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_G = \{ &d(\bar{K}_y B_2 - \mathfrak{B}_2 B_4) + a(\bar{K}_y A_2 - \mathfrak{B}_2 A_4) \} Ml\alpha / EI\Delta_{fr} \\ &+ \{d(\nu K_y B_2 - \mathfrak{U}_2 B_4) + a(\nu K_y A_2 - \mathfrak{U}_2 A_4)\} Fl^2\alpha / EI\Delta_{fr} \dots (79) \end{aligned}$$

$\bar{Y}_G = W(0) + l_1 \bar{\Phi}_G$ なる関係があるから、外殻の重心の変位は

$$\begin{aligned} \bar{Y}_G = \{ &(\bar{K}_y B_2 - \mathfrak{B}_2 B_4) + \nu_1 d(\bar{K}_y B_2 - \mathfrak{B}_2 B_4) + \nu_1 a(\bar{K}_y A_2 - \mathfrak{B}_2 A_4) \} Ml^2\alpha / EI\Delta_{fr} \\ &+ \{(\nu K_y B_2 - \mathfrak{U}_2 B_4) + \nu_1 d(\nu K_y B_2 - \mathfrak{U}_2 B_4) + \nu_1 a(\nu K_y A_2 - \mathfrak{U}_2 A_4)\} Fl^3 / EI\Delta_{fr} \dots (80) \end{aligned}$$

軸上各点の変位, 傾斜, 曲げモーメント, せん断力は

$$\begin{aligned} W(\bar{x}) = \{ &(\bar{K}_y B_2 - \mathfrak{B}_2 B_4)a(\bar{x}) + (\bar{K}_y A_2 - \mathfrak{B}_2 A_4)b(\bar{x}) \} Ml^2 / EI\Delta_{fr} \\ &+ \{(\nu K_y B_2 - \mathfrak{U}_2 B_4)a(\bar{x}) + (\nu K_y A_2 - \mathfrak{U}_2 A_4)b(\bar{x}) \} Fl^3 / EI\Delta_{fr} \dots (81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W'(\bar{x}) = \{ &(\bar{K}_y B_2 - \mathfrak{B}_2 B_4)d(\bar{x}) + (\bar{K}_y A_2 - \mathfrak{B}_2 A_4)a(\bar{x}) \} Ml\alpha / EI\Delta_{fr} \\ &+ \{(\nu K_y B_2 - \mathfrak{U}_2 B_4)d(\bar{x}) + (\nu K_y A_2 - \mathfrak{U}_2 A_4)a(\bar{x}) \} Fl^2\alpha / EI\Delta_{fr} \dots (82) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_b(\bar{x}) = \{ &(\bar{K}_y B_2 - \mathfrak{B}_2 B_4)c(\bar{x}) + (\bar{K}_y A_2 - \mathfrak{B}_2 A_4)d(\bar{x}) \} M\alpha^2 / \Delta_{fr} \\ &+ \{(\nu K_y B_2 - \mathfrak{U}_2 B_4)c(\bar{x}) + (\nu K_y A_2 - \mathfrak{U}_2 A_4)d(\bar{x}) \} Fl\alpha^2 / \Delta_{fr} \dots (83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_b(\bar{x}) = \{ &(\bar{K}_y B_2 - \mathfrak{B}_2 B_4)b(\bar{x}) + (\bar{K}_y A_2 - \mathfrak{B}_2 A_4)c(\bar{x}) \} M\alpha^3 / l\Delta_{fr} \\ &+ \{(\nu K_y B_2 - \mathfrak{U}_2 B_4)b(\bar{x}) + (\nu K_y A_2 - \mathfrak{U}_2 A_4)c(\bar{x}) \} F\alpha^3 / \Delta_{fr} \dots (84) \end{aligned}$$

7. 数 値 計 算

回転-回転の特別な場合, すなわち第 4 図のような場合に関して数値計算を行う。

7.1 計算の

基礎 第 4 図に示された場合のばねは全部等しいばねであるとする。図からわかるように $\nu_1 = \nu_2 = 0.5$,

$\nu = 0.25$ 。ばね

第 4 図

が全部等しい時は $K_y = 16 K_\phi$ なる関係があるから、(19) 式から

$$\mathfrak{U}_1 = -\gamma\alpha^4, \mathfrak{U}_2 = 4 K_\phi - \gamma\alpha^4 \dots (85)$$

いま一例として $\lambda = R/\gamma = 7$ の場合を考えると (19) 式

$$\begin{aligned} \frac{W(0)}{F} \frac{EI}{l^3} = &\{0.5 \alpha^3(ad-bc+d) - (b^2-d^2)\gamma\alpha^4\} \\ &+ [16(b^2-d^2)K_\phi^2 - \{29.9(b^2-d^2)\gamma\alpha^4 - 4\alpha^3d - 12\alpha^3(ad-bc)\}K_\phi \\ &+ 7(b^2-d^2)\gamma^2\alpha^8 - 1.5d\gamma\alpha^7 - 5.475(ad-bc)\gamma\alpha^7 + \alpha^6(c^2-bd)] \dots (90) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } A_4 &= \alpha^3 b \mathfrak{B}_2 - \alpha^2 c \bar{K}_y - \alpha d \mathfrak{C} \\ B_4 &= \alpha^3 c \mathfrak{B}_2 - \alpha^2 d \bar{K}_y - \alpha a \mathfrak{C} \\ C_4 &= \alpha^3 d \mathfrak{B}_2 - \alpha^2 a \bar{K}_y - \alpha b \mathfrak{C} + \alpha^2 \bar{K}_y \\ D_4 &= \alpha^3 a \mathfrak{B}_2 - \alpha^2 b \bar{K}_y - \alpha c \mathfrak{C} + \alpha^3 \mathfrak{B}_1 \end{aligned} \right\} \dots (74)$$

(16), (73), $W''(0) = 0$, $W'''(0) = 0$ から $W(0)$ など

$$\begin{aligned} W(0) = &(\bar{K}_y B_2 - \mathfrak{B}_2 B_4) Ml^2 / EI\Delta_{fr} \\ &+ (\nu K_y B_2 - \mathfrak{U}_2 B_4) Fl^3 / EI\Delta_{fr} \dots (75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W'(0) = &(\bar{K}_y A_2 - \mathfrak{B}_2 A_4) Ml\alpha / EI\Delta_{fr} \\ &+ (\nu K_y A_2 - \mathfrak{U}_2 A_4) Fl^2\alpha / EI\Delta_{fr} \dots (76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } \Delta_{fr} = &\mathfrak{C}(a^2-bd) + \bar{K}_y\alpha(ad-bc) \\ &+ \mathfrak{B}_2\alpha^2(b^2-d^2) - \mathfrak{D}_2\alpha^3(ab-cd) \\ &+ \alpha^4(c^2-bd) \dots (77) \end{aligned}$$

$\Delta_{fr} = 0 \dots (78)$ は、この場合の固有振動式である。(72) から外殻の回転角 $\bar{\Phi}_G$ は

$$\left. \begin{aligned} \text{から } \mathfrak{C} &= 16 K_\phi^2 - 29.9 K_\phi \gamma\alpha^4 + 7\gamma^2\alpha^8 \\ \mathfrak{U} &= -2 K_\phi + 0.75 \gamma\alpha^4 \\ \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 &= 12 K_\phi - 5.475 \gamma\alpha^4 \end{aligned} \right\} \dots (86)$$

(86) 式を用うると Δ_{ss} は (24) から

$$\begin{aligned} \Delta_{ss} = &16(b^2-d^2)K_\phi^2 - \{29.9(b^2-d^2)\gamma\alpha^4 \\ &- 4\alpha^3d - 12\alpha^3(ad-bc)\}K_\phi + 7(b^2-d^2)\gamma^2\alpha^8 \\ &- 1.5d\gamma\alpha^7 - 5.475(ad-bc)\gamma\alpha^7 + \alpha^6(c^2-bd)] \dots (87) \end{aligned}$$

7.2 軸の両端の変位 強制 M が零である場合

を考えると、(21) および (26) 式はそれぞれ

$$\frac{W(0)}{F} \frac{EI}{l^3} = \frac{\nu_2\alpha^3(ad-bc) + \nu_1\alpha^3d + (b^2-d^2)\mathfrak{U}_1}{\Delta_{ss}} \dots (88)$$

$$\frac{W(l)}{F} \frac{EI}{l^3} = \frac{\nu_1\alpha^3(ad-bc) + \nu_2\alpha^3d + (b^2-d^2)\mathfrak{U}_2}{\Delta_{ss}} \dots (89)$$

(85), (87) 式を用いると (88), (89) 式は

$$\begin{aligned} \frac{W(l)}{F} \frac{EI}{l^3} = & \{0.5 \alpha^3(ad-bc+d) + (b^2-d^2)(4K_\phi - \gamma\alpha^4)\} \\ & \div [16(b^2-d^2)K_\phi^2 - \{29.9(b^2-d^2)\gamma\alpha^4 - 4\alpha^3d - 12\alpha^3(ad-bc)\}K_\phi \\ & + 7(b^2-d^2)\gamma^2\alpha^8 - 1.5d\gamma\alpha^7 - 5.475(ad-bc)\gamma\alpha^7 + \alpha^6(c^2-bd)] \dots\dots\dots (91) \end{aligned}$$

特に $K_\phi/\gamma=130$ とし, $\gamma=0.1, 0.68, 100$ とした場合の (90), (91) 式の数値計算の結果が第 5 図, 第 6 図, 第 7 図である. 図において $W(0)/F \cdot EI/l^3$ または $W(l)/F \cdot EI/l^3$ の正負によって $W(0)$ または $W(l)$

第 5 図

第 6 図

第 7 図

が F と同相であるか, 逆相であるかがわかる. α_a 点, α_c 点, α_e 点はそれぞれ共振点で, 共振点の両側で $W(0)$, $W(l)$ の位相はそれぞれ逆転する. α_b 点, α_d 点はそれぞれ $W(0)$, $W(l)$ が節点になる位置である. α_d よりも小なる領域においては, α_b 点を除き節点は 1 であり, α_d よりも大なる領域 (図示の範囲内) においては節点は 2 である. $\gamma=0.1$ の場合と $\gamma=100$ の場合とを比較してみると, α_d と α_e との大小の関係が逆になり, α_e の前後において $W(0)$ の位相が逆転することがわかる. α_b 点においては A 点と B 点とが同時に節点となる. (87), (88) から $\alpha=\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ で $W(0)$, $W(l)$ が同時に零になることがわかる. すなわち両端が回転端支持の単純な軸になるわけである.

ゆえに $\alpha_b=\pi$ である. 両端が回転端支持の単純な軸は $\alpha=2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ 等でも両端が節点になるが, 上述の場合には $\alpha=2\pi, 4\pi, 6\pi$ では節点にはならない.

7.3 軸の端部が接点となる場合 第 5 図に示すように軸の端部 A 点および B 点が, それぞれ節点になる場合がある. そのときの条件は (90) および (91) 式から

$$0.5 \alpha^3(ad-bc+d) - (b^2-d^2)\gamma\alpha^4 = 0 \dots\dots\dots (92)$$

$$0.5 \alpha^3(ad-bc+d) + (b^2-d^2)(4K_\phi - \gamma\alpha^4) = 0 \dots\dots\dots (93)$$

$K_\phi/\gamma=130$ とし, (92), (93) 式によって α と γ との間の関係を計算した結果が第 6 図である.

8. 結 言

第 1 図に示すような弾性支持され, かつ軸を有する機械系の強制力および強制モーメントによる強制振動の特性を解析し, その特別な場合に関しては数値計算をして特性の様相を明らかにした. 軸の危険速度の問題または機械の振動絶縁の問題は, 強制振動と見なすべき場合が多いわけであるから, 本研究の結果から第 1 図のような機械系の危険速度ならびに振動絶縁の問題は解くことができる. なお強制変位による強制振動に関しては将来報告を行う予定であって, その報告中において本論文の数値計算に対する実験的裏づけが行われるはずである.