532.595:534.12

組合せ応力を受けつつある薄肉円筒殻の水中振動について*

鬼 頭 史 城**

On Vibration of a Thin Cylindrical Shell, which is immersed
in Water and subjected to a Combined Stress

by Fumiki KITO

The frequency (ω) of free vibration of a thin elastic cylindrical shell was obtained by a theoretical calculation. The effect of virtual mass of water filled inside (or outside) the shell, the effect of external (or internal) normal pressure, together with the effect of axial compressive (or tensile) force are taken into account. It is inferred, from the results of calculation, that: — (a) The effect of axial force is rather small in comparison with the effect of virtual mass of water and that of normal pressure, so long as the shell whose length is larger than its diameter is concerned. (b) Under such a way of loading, in which the ratio of axial force to normal pressure is kept constant, the relation between the angular frequency ω and the pressure p becomes practically a straight line. It is suggested that, taking advantages of this fact, a method of non-destructive test for collapsing pressure of thin cylindrical shells (such as a pressure hull of a submarine) may be possible.

1. 緒 言

著者は先に水圧鉄管の振動について計算し、報告した⁽²⁾⁽³⁾。それは内圧 (または外圧) を受けつつあり、かつ内部 (または外部、または内外部) に存在する水の振動に対する仮性質量の影響をも考えに入れたところの円筒殻の振動数についてであった。その後実際の水力発電所の水圧鉄管の振動を調査して報告した⁽⁷⁾。それ以来も直接間接に実際の水圧鉄管の振動を調査し得たものもかなりの数に上った。先の報告⁽²⁾では実用を主眼とし、略近公式を作ったのであったが、実測値とかなりよく合っているので、これで実用上の目的は達せられると思う。

しかるにその後、もう少し詳しくこの問題を調べてみたいと思ったのと、円筒殻に加えられる応力が組合せ応力である場合に拡張することもある必要であると考えたので、多少の理論的計算を試みた。以下には側面圧力 (内圧または外圧) と軸方向に圧縮応力とを受けつつある弾性円筒殻の水中振動について調べた結果を報告する。ただし円筒殻の振動の基礎方程式そのものも論議の余地がないと言えないし、その解にしても (少くとも公式の形に示すためには) 厳密な形とは言えないから、本報告にのべるのも一種の略近解である。

2. 記 号

第 1 図に示すごとく平均半径が r で厚さが $2h$ なる円筒殻を考え、円筒の中心線を x 軸にとる。そして下

第 1 図

記のごとき記号を用いる。

- x = 円筒面上の点の軸方向の座標 (cm)
- θ = " " の角位置 (rad)
- r = 円筒殻の平均半径 (cm)
- N_x, N_y = 合成力 (引張りまたは圧縮) (kg/cm)
- N_{xy}, N_{yx} = せん断合成力 (縦せん断力) (kg/cm)
- N_1, N_2 = " " (横せん断力) (kg/cm)
- p = 外圧力 (内圧力の場合は負になる) (kg/cm²)
- P' = 軸方向の圧縮力 (kg/cm)
- M_x, M_y = 合成モーメント (曲げ) (cm·kg/cm)
- M_{xy}, M_{yx} = 合成モーメント (ひねり) (cm·kg/cm)
- u = 中性面の変位 (x 方向の) (cm)

* 昭和 30 年 10 月 16 日 東京秋期講演大会において講演、原稿受付 昭和 30 年 10 月 26 日。

** 正員、慶応義塾大学工学部。

v = 中性面の変位 (θ 方向の) (cm)

w = " " (r 方向の) (cm)

$2h$ = 殻の厚さ (cm)

γ = 殻材質の比重 (kg/cm³)

ϵ = 水の仮性質質量を表わす係数

σ = ポアソン比

C = 係数 $= 2Eh/(1-\sigma^2)$

η = 外圧力 p による円周収縮率 $= pr/C$

n = 円周のまわりに生ずる しわ の数 (整数)

k = 軸方向に生ずる しわ の数 (整数)

ω = 振動の角周波数 (rad/s)

g = 重力による加速度 (cm/s²)

t = 時間 (s)

μ = 荷重比を表わす係数 $= P'/(pr)$

$\xi = h^2/(3r^2)$, $\alpha = mr$

$\lambda = 2\gamma h/(gC)$, $m = k\pi/l$

3. 振動の方程式および基本解

第 1 図に示すごとく平均半径が r で厚さが $2h$ であるところの、弾性体でできた円筒殻があるとする。その内部または外部 (または内, 外部) には水が満たされており, その円筒面には法線方向に作用しかつ一様な強さをもった外 (内) 圧 p (たとえば水圧力) が加えられ, なお同時に軸方向に P' なる強さの圧縮的外力が加わっているものとする。この円筒殻の径間 l なる部分の両端が単純支持されており, u, v, w なる微小変位で振動しているものとする。内部 (または外部) に充満しているところの水もこれと同時に振動するものとする。その影響は仮性質質量の形で現われるものとする (第 2 図)。上記の記号を用いて, このような円筒殻の振動の方程式を書き表わせば下のごとくになる。

第 2 図

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{yx}}{r\partial\theta} + p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) &= 2h\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{r\partial\theta} - \frac{Q_y}{r} - P'\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 2h\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{r\partial\theta} + \frac{N_y}{r} - P'\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{p}{r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + w\right) &= 2h\frac{\gamma}{g}(1+\epsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

しかるにせん断力 Q_x, Q_y は曲げモーメント M_x, M_y ,

H によって下のごとく書き表わされる。ただし略近的に $-M_{yx} = M_{xy} = H$ とおく。

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial\theta} \\ Q_y &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_y}{\partial\theta} &= \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 M_y}{\partial\theta^2} \end{aligned} \right\} \text{それゆゑ振動の方程式は}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{yx}}{r\partial\theta} + p\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) &= 2h\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{r\partial\theta} + \frac{\partial H}{r\partial x} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial M_y}{\partial\theta} - \mu rp\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 2h\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 M_y}{\partial\theta^2} + \frac{N_y}{r} &- \frac{p}{r}\left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \mu r^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 2h\frac{\gamma}{g}(1+\epsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

となる。ただし $P' = \mu rp$ なる関係を代入してある。なお $N_x, N_y, \dots, M_x, M_y, \dots$ を変位 u, v, w を使って書き表わせば

$$\begin{aligned} N_x &= C\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} - w\right)\right] \\ N_y &= C\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} - w\right) + \sigma\frac{\partial u}{\partial x}\right] \\ N_{xy} &= \frac{1-\sigma}{2}C\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] \\ &\quad + \frac{1-\sigma}{2}\frac{Ch^2}{3r^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] \\ N_{yx} &= -\frac{1-\sigma}{2}C\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] \\ &\quad + \frac{1-\sigma}{2}\frac{Ch^2}{3r^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] \\ M_x &= -\frac{1}{3}Ch^2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right] \\ M_y &= -\frac{1}{3}Ch^2\left[\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right] \\ H &= (1-\sigma)\frac{Ch^2}{3r}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] \end{aligned}$$

前記の振動の方程式 (2) の基本解をうるために

$$\left. \begin{aligned} u &= U \sin mx \sin n\theta \sin \omega t \\ v &= V \cos mx \cos n\theta \sin \omega t \\ w &= W \cos mx \sin n\theta \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

とおく。 n は整数であり, m は $m = k\pi/l$ (k は整数) とする。この仮定 (3) を振動の方程式 (2) に代入し, 共通因子を去れば, 振幅 U, V, W に対し次の (4) に示すような一次連立方程式が得られる。これより基本解が得られる。

4. 振動数の公式

前記の U, V, W に対する一次方程式は次の形にな

る。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda\omega^2 - A_1)U - B_1V - C_1W &= 0 \\ -A_2U + (\lambda\omega^2 - B_2)V - C_2W &= 0 \\ -A_3U - B_3V + [(1+\varepsilon)\lambda\omega^2 - C_3]W &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

$$\text{ただし } \lambda = 2h \frac{\gamma}{gC}, \quad \xi = \frac{h^2}{3r^2}$$

とおき, $A_1, B_1, \dots$ は次のとき値の定数である。

$$A_1 = m^2 + \frac{1-\sigma}{2} \frac{n^2}{r^2}$$

$$B_1 = -\left[\frac{1+\sigma}{2} + \eta + \frac{1-\sigma}{2} \xi \right] \frac{mn}{r}$$

$$C_1 = -\left[\sigma + \eta + \frac{1-\sigma}{2} n^2 \xi \right] \frac{m}{r}$$

$$A_2 = -\frac{1+\sigma}{2} \frac{mn}{r}$$

$$B_2 = \frac{1-\sigma}{2} m^2 + \frac{n^2}{r^2} + \frac{3(1-\sigma)}{2} m^2 \xi$$

$$-\frac{n^2}{r^2} \xi - m^2 \mu \eta$$

$$C_2 = \frac{n}{r^2} + \frac{3(1-\sigma)}{2} m^2 n \xi + \frac{n^3}{r^2} \xi + m^2 n \sigma \xi$$

$$A_3 = -\frac{\sigma m}{r}$$

$$B_3 = (2-\sigma) m^2 n \xi + \frac{n^2}{r^2} \xi + \frac{n}{r^2}$$

$$C_3 = r^2 m^4 \xi + 2\sigma m^2 n^2 \xi + 2(1-\sigma) m^2 n^2 \xi \quad *$$

$$\frac{r^6}{\alpha^4} \frac{2}{(1-\sigma)} \Delta_0 = (1-\sigma^2) - \eta \left\{ \left(\frac{n^2 + \alpha^2}{\alpha^2} \right)^2 (n^2 - 1 + \mu \alpha^2) [\sigma + 2\mu(1+\sigma)] + (3\mu - 1) \frac{n^2}{\alpha^2} \right\} \\ + \xi \left\{ \frac{(n^2 + \alpha^2)^4}{\alpha^4} - \frac{n^4(2n^2 - 1)}{\alpha^4} + \frac{n^2(4-\sigma)}{\alpha} - \frac{n^4(7-\sigma)}{\alpha^2} + 3(1-\sigma^2) - n^2(7+\sigma-2\sigma^2) \right\}$$

(この計算は単なる演算であるからここには省略する。詳しくは文献 (1) 参照)

一般の薄肉円筒殻の場合に対してはこの Δ_0 の値を用うべきである。しかし通常現われるような細長い円筒殻に対しては、更に略近的に

$$\Delta_0 = -\frac{1-\sigma}{2} \frac{\alpha^4}{r^6} \left\{ \left(\frac{n^2 + \alpha^2}{\alpha^2} \right)^2 (n^2 - 1 + \mu \alpha^2) \right\} [\eta - F(n, \alpha)]$$

の形に書くことができる。ただし簡単のために

$$F(n, \alpha) = \frac{1}{(n^2 - 1 + \mu \alpha^2)} \left[\frac{(1-\sigma^2)\alpha^4}{(n^2 + \alpha^2)^2} + \xi \left\{ (n^2 + \alpha^2)^2 - \frac{n^4(2n^2 - 1)}{(n^2 + \alpha^2)^2} \right\} \right]$$

と置く。以上の計算をとりまとめ、 ω^2 に対する略近式を作れば下のごとくなる。

$$\omega^2 = \left(\frac{1-\sigma}{2} \right) (n^2 + \alpha^2)^2 \times \frac{gE}{(1-\sigma^2)\gamma r^2} \frac{f(n, \alpha) - \eta(n^2 - 1 + \mu \alpha^2)}{[L + M\xi + N\eta] + \varepsilon[R + S\xi + T\eta]} \dots (9)$$

$$\text{ただし } f(n, \alpha) = \frac{(1-\sigma^2)\alpha^4}{(n^2 + \alpha^2)^2} + \xi \left\{ (n^2 + \alpha^2)^2 - \frac{n^4(2n^2 - 1)}{(n^2 + \alpha^2)^2} \right\}$$

なお係数 $L, M, \dots, T$ は円筒殻の寸法比としわ数 n によって定まる定数であって、下のごとき値をもっている。

$$L = (1-\sigma) \left[\frac{1}{2} n^2 (n^2 + 1) + \alpha^2 n^2 + \frac{1}{2} \alpha^4 + \frac{3+2\sigma}{2} \alpha^2 \right]$$

$$M = \frac{3-\sigma}{2} (\alpha^2 + n^2)^3 + n^2 + \frac{3(1-\sigma)}{2} \alpha^2 + \frac{3(1-\sigma)}{2} \alpha^4 + \frac{1-\sigma}{2} n^4 + \frac{3-4\sigma+3\sigma^2}{2} \alpha^2 n^2$$

$$-N = -\left\{ \frac{3(1-\sigma)}{2} - \mu \right\} \alpha^2 + \mu \frac{5-\sigma}{2} \alpha^4 + \{2 + (1-\sigma)\mu\} \alpha^2 n^2 + \frac{1-\sigma}{2} n^2 (n^2 - 1) + n^2$$

$$R = \frac{1-\sigma}{2} (n^2 + \alpha^2)^2, \quad -T = \mu \alpha^4 + \frac{3+\sigma}{2} \mu \alpha^2 n^2$$

$$* + \frac{n^4}{r^2} \xi + \frac{1}{r^2} + \frac{1-n^2}{r^2} \eta - \mu m^2 \eta$$

自由振動に対しては ω が方程式

$$\begin{vmatrix} \lambda\omega^2 - A_1, & -B_1, & -C_1 \\ -A_2, & \lambda\omega^2 - B_2, & -C_2 \\ -A_3, & -B_3, & (1+\varepsilon)\lambda\omega^2 - C_3 \end{vmatrix} = 0 \dots (5)$$

の根でなくてはならない。この (5) 式を展開すれば

$$\lambda^3 \omega^6 - \lambda^2 \omega^4 [A_1 + B_2 + C_3] \\ + \lambda \omega^2 \left[\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} \right] \\ - \Delta_0 + \varepsilon \lambda^3 \omega^6 + \varepsilon \omega^4 \lambda^2 [A_1 + B_2] \\ + \varepsilon \lambda \omega^2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \dots (6)$$

となる。ただし

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \dots (7)$$

とおく。実用上 ω^2 の最小根は略近的に⁽²⁾⁽⁶⁾

$$\lambda \omega^2 = \Delta_0 + \left[(1+\varepsilon) \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} \right] \dots (8)$$

によって与えられる。(7) によって与えられるところの定数 Δ_0 は ξ, η に関する代数式の形になっているが、 ξ, η の二次以上の項を無視すれば次の形に書きわされる⁽¹⁾。

$$S = \frac{3(1-\sigma)}{2}\alpha^4 + \frac{1-\sigma}{2}n^4 + \left\{ \frac{3}{4}(1-\sigma)^2 + 1 - \frac{1-\sigma^2}{4} \right\} \alpha^2 n^2$$

5. 実 用 公 式

実用上は上に得られた公式 (9) を次の形に直しておいた方が便利である。すなわち

$$L = \left(\frac{1-\sigma}{2} \right) n^4 L_1, \quad M = \left(\frac{3-\sigma}{2} \right) n^6 M_1,$$

$$N = - \left(\frac{1-\sigma}{2} \right) n^4 [N_1 + \mu N_2]$$

$$R = \left(\frac{1-\sigma}{2} \right) n^4 R_1, \quad S = \left(\frac{1-\sigma}{2} \right) n^4 S_1$$

$$-T = \left(\frac{1-\sigma}{2} \right) n^4 T_2 \mu$$

の形におくときは

第 3 図 L_1 の 値

第 4 図 M_1 の 値

第 5 図 N_1 の 値

第 6 図 N_2 の 値

第 7 図 R_1 の 値

第 8 図 S_1 の 値

第 9 図 T_2 の 値

$$\omega^2 = \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^2 \left[\frac{gE}{(1-\sigma^2)\gamma r^2} \right] \times \frac{1}{U_1} \times [f(n, \alpha) - \eta(n^2 - 1 + \mu\alpha^2)] \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここに U_1 は

$$U_1 = \left[L_1 + \left(\frac{3-\sigma}{1-\sigma} \right) n^2 M_1 \xi - (N_1 + \mu N_2) \eta \right] + \varepsilon [R_1 + S_1 \xi - T_2 \mu \eta] \quad \dots\dots\dots (11)$$

である。 $L_1, M_1, N_1, R_1, S_1, T_1$ は n が大きくなれば 1 または 0 に近づく性質のものであり、そのグラフを第 3 図ないし第 9 図に示してある。

6. 特別の場合の吟味 (非常に長い円筒殻)

もし円筒殻の長さ l が非常に長く、したがって α が n に比し小であり、かつ ω^2 の公式の分母において ξ, η の項を無視しうほど円筒殻が薄く圧力が小であれば (9) は

$$\omega^2 = \frac{n^2 - 1 + \mu\alpha^2}{n^2 + 1} \times \frac{gE}{(1-\sigma^2)\gamma r^2} \times n^2 \times \frac{F(n, \alpha) - \eta}{\left[1 + \varepsilon \frac{n^2}{n^2 + 1} \right]}$$

となる。すなわち水の仮性質量の影響は、単に分母において

$$1 + \varepsilon \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

なる係数がかかるだけのことになる。これは前回報告の結果⁽²⁾と一致する。またこのように細長い円筒殻に対して略近的に

$$F(n, \alpha) = \frac{1}{n^2 - 1} \left[(1 - \sigma^2) \frac{\alpha^4}{n^4} + (n^2 - 1)^2 \xi \right]$$

したがって

$$\omega^2 = \left[\frac{gE}{(1-\sigma^2)\gamma r^2} \right] \frac{n^2}{n^2 + 1} \times \left[(1 - \sigma^2) \frac{\alpha^4}{n^4} + (n^2 - 1)^2 \xi - (n^2 - 1) \eta \right] \times \frac{1}{\left[1 + \varepsilon \frac{n^2}{n^2 + 1} \right]} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。これは著者が水圧鉄管の振動数の略近公式としてすでに与えたものと実質上同じである。ただし上では μ は 0 か余り大きくない値をもっているものとした。

7. 振 幅 比

円筒殻が振動するとき、 u, v, w の 3 成分をもち、(3) の示すごとくそれぞれ振幅 U, V, W で振動する。自由振動をしているときの振幅比 $U:V:W$ を求めてみよう。すでに ω が行列方程式 (5) を満足するとすれば振幅 U, V, W の比は (4) によって与えられる。これより、 Z は不定の定数とすれば

$$\frac{U}{Z} = (1 + \varepsilon) \lambda \omega^2 B_1 - \left| \frac{B_1}{B_3} \frac{C_1}{C_3} \right|$$

$$\frac{W}{Z} = \lambda \omega^2 B_3 - \left| \frac{A_1}{A_3} \frac{B_1}{B_3} \right|$$

$$\frac{V}{Z} = (1 + \varepsilon) \lambda^2 \omega^4 - [(1 + \varepsilon) A_1 + C_3] \lambda \omega^2 + \left| \frac{A_1}{A_3} \frac{C_1}{C_3} \right|$$

となる。次節の数値例に述べるごとく割合に薄くかつ細長い円筒殻に対しては $\lambda \omega^2$ のついている項は、最後の $\lambda \omega^2$ のついていない項に比し値が小である。次に $B_1, \dots\dots$ その値を代入し、 ξ, η のついている項は比較的影響が少いからこれを省略する。かようにして概数として

$$U:V:W = \alpha : \left[n + 2(1 + \sigma) \frac{\alpha^2}{n} \right] : \left[n^2 + \frac{2 + \sigma + \sigma^2}{(1 - \sigma)} \alpha^2 \right]$$

なる比が得られる。第 10 図および第 11 図にこの比を図示してある。これによれば W が最も大きく、 V はその 20~40% 程度である。 U は最も小さくて W の数パーセント程度となっている。

第 10 図 比 U/W の値

第 11 図 比 V/W の値

8. 数 値 的 検 討

今ここで $\sigma = 0.30$, $2h = 1.5$ cm, $r = 1$ m に対し、長さ l が $l_1 = 2$ m, $l_2 = 4$ m, $l_3 = 8$ m の 3 種の場合について検討してみよう。この場合には $\xi = 0.0025$ となっ

ている。そして公式 (10) に現われるところの $f(n, \alpha)$ なる量を計算すれば第 12 図のごとくなる。また比重を 8 とし $E=2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ とすれば

$$\lambda = 2h\gamma / (gC) = (1 - \sigma^2) \frac{\gamma}{gE}$$

$$= 0.91 \times \frac{8 \times 10^{-3}}{980 \times 2 \times 10^6} = 3.714 \times 10^{-12}$$

$$\alpha = \alpha_1, \quad n=2 \quad \frac{[0.3482 - (7.8432 + 6.4508\mu)\eta]}{[3.4207 - (4.5265 + 4.229\mu)\eta + (2.614 - 3.995\mu\eta)\epsilon]} \times 10^{-4}$$

$$\alpha = \alpha_1, \quad n=3 \quad \frac{[0.0688 - (12.988 + 4.006\mu)\eta]}{[1.8457 - (2.6816 + 1.1400\mu)\eta + (1.62354 - 1.5072\mu\eta)\epsilon]} \times 10^{-4}$$

$$\alpha = \alpha_1, \quad n=4 \quad \frac{[0.0295 - (19.983 + 3.287\mu)\eta]}{[1.4312 - (1.9684 + 0.4956\mu)\eta + (1.3322 - 0.7950\mu\eta)\epsilon]} \times 10^{-4}$$

この計算を

$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, かつ $n=2, 3, 4, 6$ の合計 12 個の場合について行ってみると、分母 [(10), (11) 式における U_1] の η および $\mu\eta$ のついている項は実用上 (少くとも今考えている程度の寸法割合の円筒殻に対しては) 無視してよいことがわかる。

次に式中の ϵ (水の仮性質量の項) の値はすでに⁽⁴⁾報告したとおりである。

第 12 図 $f(n, \alpha)$ の値るが、今の報告と符号を合わせ、かつ使いやすい形に直せば第 1 表のごとくなる。

この係数 ϵ は水が内部にある場合と外部にある場合とで少しく値が異なるのであるが、ここでは略近値として (壁材料の比重を 8 とし)

$$\epsilon = \left(\frac{\text{水の比重}}{\text{壁材料の比重}} \right) \times \frac{2r}{2h} \times \frac{1}{n} = \frac{100}{6n}$$

第 1 表

$$\epsilon = \left(\frac{\text{水の比重}}{\text{壁材料の比重}} \right) \times \frac{2r}{2h} \times \left(\frac{\beta \text{ or } \beta'}{n} \right)$$

		$\alpha=0$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1.2$
内部に水のある場合 β	$n=2$	1.0000	0.9967	0.9870	0.9132
	$n=3$	1.0000	0.9983	0.9933	0.9852
	$n=4$	1.0000	0.9992	0.9960	0.9912
外部に水のある場合 β'	$n=2$	1.0000	0.9904	0.9730	0.9290
	$n=3$	1.0000	0.9966	0.9858	0.9726
	$n=4$	1.0000	0.9984	0.9932	0.9856

とおく、かようにして下記のごとき略近値が得られる。

である。上記の 3 種の l の値 $l_1=2\text{m}$, $l_2=4\text{m}$, $l_3=8\text{m}$ の三つの場合に対する α の値は

$$\alpha_1 = 1.5708, \quad \alpha_2 = 0.7854, \\ \alpha_3 = 0.3927$$

そしてこの三つの場合に対する $\lambda\omega^2$ の値を (10), (11) によって計算すれば下記のごとくなる。

$$\alpha = \alpha_1, \quad n=2;$$

$$\lambda\omega^2 = [138.1 - p(0.09439 + 0.07761\mu)] \times 10^{-8}$$

$$n=3;$$

$$\lambda\omega^2 = [63.3 - p(0.3626 + 0.1118\mu)] \times 10^{-8}$$

$$n=4;$$

$$\lambda\omega^2 = [42.3 - p(0.8680 + 0.1428\mu)] \times 10^{-8}$$

$$n=6;$$

$$\lambda\omega^2 = [79.3 - p(2.785 + 0.1964\mu)] \times 10^{-8}$$

さて、これらの結果により $\lambda\omega^2$ が外圧力 p と圧縮力と外圧力との比 μ によってどんな変り方をするかを図示すべきであるが非常に複雑となるから、その内の一つたとえば $\alpha = \alpha_2$, $\alpha = \alpha_3$, $n=4$ の場合だけを見本として示せば第 13 図のごとくなる。図において $\mu=0$ の場合は単に外圧力 p だけが加えられる場合

第 13 図 $\lambda\omega^2$ の曲線 ($n=4$ の場合)

であり $\mu=+5$ または -5 の場合はそれぞれ $P'/(p_{err})$ の値が 5 であるとき圧縮 (または引張り) 力を軸方向に加えた場合である。この μ の影響は $\alpha = \alpha_3$ のごとく、割合に細長い場合には大して現われないが、 $\alpha = \alpha_2$ の場合のごとく比較的短いものにはかなり顕著に現われる。各直線が横軸と交わる場所、すなわち $\lambda\omega^2=0$ に対する p の値は弾性的安定に対する限界圧力になる。縦軸における $\lambda\omega^2$ の値は $p=0$ すなわち

外圧力の作用を受けない (水で満たされ、もしくは水中で振動するところの) 円筒殻の固有振動数を表わすものである。上記の数値によるとこの固有振動数は n の大いさの順序になっていないが、それは第 12 図に示すごとく $f(n, \alpha)$ 曲線の谷の付近のところをとっているからであって、たとえば α がもっと 0 に近い値をもっているか、あるいは n がもっと大きな値をとっており、 $f(n, \alpha)$ の曲線が単調増加になっておれば、 $\lambda\omega^2$ の値は n とともに単調に増加する。

9. 結 言

円筒殻の内部または外部に水が満たされ、かつ内圧 (または外圧) を受けつつあれば、それらが円筒殻の自然振動数に顕著な影響を与えることは、著者が先に報告した。これに更に軸方向に引張 (または圧縮) 力が加えられると、それもまた振動数に影響してくる。本報告の結果によると、この後者の影響は (少くとも直径よりも長さの方の大きな薄肉円筒殻に関する限り) 前二者に比べると影響が少い。薄肉円筒殻に対し

て実際に数値計算を行ってみると、第 13 図のごとく $\lambda\omega^2$ と圧力 p との関係がほとんど直線になる。(ただし μ を一定に保つ場合)、それゆえ p の低いところから順次 p を上げつつ自由振動数を測り、それらの値を p 対 $\lambda\omega^2$ の平面にプロットしたとする。これらの点を結ぶ平均的直線を図上で描き、 p 軸と交わる点を求めれば、その点に対する p の値 p_{cr} は円筒殻の圧壊に対する限界圧力を与えるであろう。かくして薄肉円筒殻 (たとえば潜水艦の耐压船殻) の圧壊に対する非破壊試験の可能性も認められる。

文 献

- (1) 徳川・鬼頭, 弾性的安定理論.
- (2) 鬼頭, 機械学会論文集, 18 巻 69 号, 96 ページ (昭 27).
- (3) 鬼頭, 機械学会論文集, 19 巻 79 号, 30 ページ (昭 28).
- (4) F. Kito, 航空学会誌, 2 号 5 号, *Proc. Fac. Eng. Keio Univ.*, Vol. 4, No. 15, 1951.
- (5) F. Kito, *Proc. Eng. Keio Univ.*, Vol. 5, No. 17, 1952.
- (6) 鬼頭, 機械学会論文集, 18 巻 66 号, 174 ページ (昭 26).
- (7) 鬼頭, 機械学会誌, 55 巻 403 号, 513 ページ (昭 27-8).
- (8) S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, 1940.
- (9) S. Timoshenko, *Theory of Plastic Stability*, 1936.

621-52

対数根軌跡による自動制御系の計算法

(第 3 報 分布定数系の対数根軌跡)*

野 本 明**

Calculation of Feedback Control Systems by Log-Root-Locus (3rd Report, Log-Root-Locus of Systems with Distributed Constants)

by Akira Nomoto

Log-root-locus method is applicable to the distributed system whose transfer function is transcendental equation. The dead time and the distributed lag which are frequently encountered in the process control can be treated as the distributed line of Fig. 25 or Fig. 28 and Fig. 29 which lead to the known transfer functions e^{-Ts} and $e^{-\sqrt{s}}$. Their phase loci and gain loci are depicted in Figs. 30 and 31 which are used to trace log-root-loci of systems comprising those terms. Figs. 32 and 33 are depicted as to the representative process with the dead time. Generally speaking, the dead time is apt to make higher order terms unstable. Figs. 35 and 36 are log-root-loci of systems comprising the distributed lag. Comparing them with Figs. 32 and 33, it is seen that the distributed lag effects rather conservatively to the system dynamics compared with aggravating effects of the dead time. The equivalent dead time system for the distributed lag $e^{-\sqrt{s}}$ was chosen to have the same fundamental root at the same gain constant. Fig. 37 contrasts each indicial responses of both systems which confirms conventional way of choosing the equivalent system.

11. むだ時間と分布遅れ

根軌跡法は元来伝達関数が有理関数になる集中定数

系について Evans が開発した計算法であるが、伝達関数が超越関数を含む場合の取扱いに対しても有効に利用しうることが見出された⁽¹⁾⁽²⁾。閉ループ自動制御系がむだ時間要素を持つときの根軌跡については従来詳細な検討が行われている。たとえば高橋はむだ時間を含むプロセス制御について調節計最適調整の種々

* 昭和 30 年 9 月 18 日 札幌臨時大会講演会において講演, 原稿受付 昭和 30 年 9 月 1 日.

** 正員, 中央大学工学部.