ここで R : 導管の全抵抗 ($=8\mu l/\pi a^4$)

P_0 : 変動圧力の中心値

V_P, V : 導管および付加容積の容積

である。

終りに、本研究を行うに際して種々有益な御教示を賜った京都大学榎木教授に対して深甚なる謝意を表す。また実験に協力された京都大学学生岡田忠也・豊田周三両君に感謝の意を表す。

文 献

(1) Mead Bradner, *ISA Print*, 1949.

- (2) William J. Berk & George E. Howard, *Taylor Technology*, Vol. 6, No. 1, No. 2, (1953).
 (3) W. H. Howe, *Automatic and Manual Control* (Tustin), 1952, p. 217.
 (4) 熊谷, 計測, 4 巻 8 号, 393 ページ (昭 29).
 (5) G. H. Farrington "Fundamentals of Automatic Control" chap. VI, (1951).
 (6) Oldenbourg u. Sartorius "Dynamik Selbsttätiger Regelungen" p. 74~79, (1951).
 (7) 藤本武助, "応用流体力学" 第 II 編, (昭 18).
 (8) 早坂寿雄, "音響振動学" 第 13 章, (昭 23).
 (9) 武用晋一郎, "導管中の圧力伝達現象" 学振資料, (昭 29).
 (10) 西原・沢村・渡辺, "自動制御用空気圧導管の伝達特性について" 機械学会第 32 期定時総会学術講演会前刷, (昭 30-4).

寄 書

539.384

大きな曲げ変形の逐次近似解法*

津 枝 正 介** 川 井 良 次***

The Method of Successive Approximation for the Bending beyond Elastic Limit

by Masasuke TUNEDA and Ryōzi KAWAI

一般に、弾性域より塑性域までの広い範囲にまたがるような変形を数式的に取り扱うことはきわめて困難であり、少くとも加工硬化が現われる塑性域の応力-ひずみ曲線は、数式的の取扱いに便利のように修正して取り扱わねばならない。したがって、その後の解析がいかに厳密に行われても、結局は近似解の域を出ないものである。

しかし、変形が比較的単純な場合には逐次近似法を採用することにより、引張試験より求められた応力-ひずみ線図をそのまま用いて変形を求めうる場合がある。かつ、この場合の逐次近似の収束性は十分良好であって、二三回の繰返しによって所期の目的を達することができる。

ここには板ばねの曲げ試験 (commercial test) 等に関連の多い大きな曲げ変形を例にとって、この逐次近似法の一例を述べる。

この場合、基礎になる仮定は、

1. 応力および ひずみ は はりの長手方向のみを考える。
2. はじめに はり の軸に垂直であった平面は変形後も軸に垂直な平面を保つ。
3. 応力と ひずみ との関係は はり の曲げにお

ける Saint-Venant の仮定を満足する。

の三者であって、断面の形が原形から著しく変るようになれば、それだけ誤差が大きくなることは言うまでもない。

第 1 図

第 2 図

図式解 与えられた材料の引張圧縮試験より、第 1 図のように応力-ひずみ線図が定められると、前記基礎仮定に従って、はりの断面の形および寸法から第 2 図のような曲げモーメント-曲率線図を描くことができる⁽¹⁾。

今仮に第 3 図のように、長さ $2L_0$ の一様な棒の両端に軸力 P が作用して、上下対称な変形をする場合を例にとる。

* 昭和 29 年 3 月 26 日 関西支部第 29 期定時総会講演会において講演，原稿受付 昭和 30 年 10 月 17 日。

** 正員，大阪大学工学部。

*** 正員，神戸大学工学部。

第4図のように全長 $2L_0$ を $\Delta l_n, \Delta l_{n-1}, \dots, \Delta l_1, \Delta l_0, \Delta l_{-1}, \dots, \Delta l_{-(n-1)}, \Delta l_{-n}$ の部分に分ち、各区切りの中央にそれぞれ点 $n, n-1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -(n-1), -n$ をとる。0 点は棒の中央に一致するものとする。また上下の端をそれぞれ点 $n+1, -(n+1)$ とする。以下に点 0 の曲げモーメント M_0 がある特定の値をとる場合のたわみ曲線を逐次近似法によって求める。仮定により変形は上下対称であるから、上半分についての解を求めることにする。

第3図

まず与えられた M_0 の値より棒に沿っての曲げモーメントの分布を仮定する。たとえば最初第1近似として第5図のような直線分布を仮定すれば、 i 点の曲げモーメントの第1近似 M_i を定めることができる(第1表 II)。 i 点の曲げモーメントが定められれば第2図より i 点の曲率の第1近似 $1/\rho_i$ を定めることができ(第1表 III), したがって、また Δl_i 区間の両端面間の曲げ角 $\gamma_i = \Delta l_i / \rho_i$ が定められる(第1表 IV)。そこで第6図のように、垂直線上に、0 より $\Delta l_0/2$ をとり、その先端より垂直線と γ_1 の角をなす直線

第5図

第1表

I	II	III	IV
0	M_0	$1/\rho_0$	γ_0
1	M_1	$1/\rho_1$	γ_1
2	M_2	$1/\rho_2$	γ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	M_i	$1/\rho_i$	γ_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	M_n	$1/\rho_n$	γ_n

上に Δl_1 をとり更に Δl_1 の先端より Δl_1 と γ_2 の傾きをなす直線上に Δl_2 をとる。これを順次 Δl_n まで繰返せば一連の折線をうる。これが所要のたわみ曲線の第1近似を与えるものであって、先端の点 $n+1$ の

たわみ A も図上に求められる。また、はじめに選定した M_0 の値と今求めた A より

$$P = M_0/A \dots \dots \dots (1)$$

により先端に働く軸力 P の第1近似が定められる。

第6図

次に第6図において点 $(n+1)$ を通る垂直線と i 点の距離 γ_i を求め、これに P を乗ずることによって i 点の曲げモーメント M_i の第2近似値が定められる。よって第1表および第6図について先に述べたものと全く同様の操作を繰返せば曲げ曲線の第2近似をうる。更に同様に第3近似、第4近似等を求めることができる。上の操作において、最初0点より垂直線上に $\Delta l_0/2$ をとり、その先端より垂直線と γ_1 の角度をなす直線上に Δl_1 をとった。このようにして求めた折線は所要の曲げ曲線の外接折線の近似を与えるものである。もし M_0 に対応する $1/\rho_0$ より $\gamma_0/2 = \Delta l_0/2\rho_0$ を求め、0点より垂直線と $\gamma_0/2$ の角度をなす直線上に $\Delta l_0/2$ をとり、順次 Δl_1 以下の作図

をすれば所要の曲げ曲線の内接折線の近似が得られる。われわれはいま外接折線の近似を求めていることになる。

半図式解 理論的には上述の図式解でよいはずであるが、実際に作図を行う場合には、角 γ を描くのが困難で、解の精度を良くするために区切りの数を多くして Δl を小さくすれば、 γ も小さな角となり、角度を描く誤差が大きくなって図式解の精度は良くならない。そこで原理的には上の図式解と全く同様であるが、これを数値計算によって置換し、若干の改良を加えて十分な精度が得られるようにする。

第2表においてまず M_0 の値を選定し、曲げモー

第2表

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
0	M_0	$1/\rho_0$	γ_0	$\Delta l_0 \sin \gamma_0$	$\Delta l_0 \sin \gamma_0$	$\Delta l_0 \cos \gamma_0$	$\Delta l_0 \cos \gamma_0$
1	M_1	$1/\rho_1$	γ_1	$\Delta l_1 \sin \gamma_1$	$\sum_{i=0}^1 \Delta l_i \sin \gamma_i$	$\Delta l_1 \cos \gamma_1$	$\sum_{i=0}^1 \Delta l_i \cos \gamma_i$
2	M_2	$1/\rho_2$	γ_2	$\Delta l_2 \sin \gamma_2$	$\sum_{i=0}^2 \Delta l_i \sin \gamma_i$	$\Delta l_2 \cos \gamma_2$	$\sum_{i=0}^2 \Delta l_i \cos \gamma_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	M_i	$1/\rho_i$	γ_i	$\Delta l_i \sin \gamma_i$	$\sum_{i=0}^i \Delta l_i \sin \gamma_i$	$\Delta l_i \cos \gamma_i$	$\sum_{i=0}^i \Delta l_i \cos \gamma_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	M_n	$1/\rho_n$	γ_n	$\Delta l_n \sin \gamma_n$	$\sum_{i=0}^n \Delta l_i \sin \gamma_i$	$\Delta l_n \cos \gamma_n$	$\sum_{i=0}^n \Delta l_i \cos \gamma_i$

メントの分布をたとえば第5図のように仮定して、 i 点の曲げモーメントの第1近似を求め、これより第2図を用いて $1/\rho_i$ を決定することは前節と同様である。次に $\gamma_i/2 = \Delta l_i/2\rho_i$ を計算する。 i 点におけるたわみ

曲線の接線が垂直線となす角を ψ_i とすれば, ψ_i は

$$\psi_i = \psi_{i-1} + \frac{\gamma_{i-1}}{2} + \frac{\gamma_i}{2} \dots\dots\dots (2)$$

ただし, 一様な棒の, 軸力による上下対称な変形を考えているのであるから

$$\psi_0 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

となる (第 2 表 IV). これより $\Delta l_i \sin \psi_i$, $\sum_{i=0}^i \Delta l_i \sin \psi_i$ を順次計算すれば (第 2 表 V, VI), 後者は第 i 番目の区間の先端のたわみを与え, 更に第 2 表 VII, VIII のように, $\Delta l_i \cos \psi_i$, $\sum_{i=0}^i \Delta l_i \cos \psi_i$ を計算すれば VIII は第 i 番目の区間の先端と, 0 点を通る水平線との距離を与える. このようにしてたわみ曲線の第 1 近似が決定される. 先端 $n+1$ のたわみ A は,

$$A = \sum_{i=0}^n \Delta l_i \sin \psi_i \dots\dots\dots (4)$$

となる.

第 2 近似を求めるには, (4) の A と最初に仮定した M_0 の値とより, (1) によって軸力 P の第 1 近似を定め,

$$M_i = P \left(A - \sum_{i=0}^i \Delta l_i \sin \psi_i + \frac{\Delta l_i}{2} \sin \psi_i \right) \dots\dots (5)$$

により i 点の曲げモーメントの第 2 近似を決定し, 以下第 1 近似を求めた場合と同様の操作を繰返せばたわみ曲線の第 2 近似が得られる. 逐次全く同様に第 3 近似, 第 4 近似等を求めることができる.

以上のような数値計算を併用すれば, 前節の純図式法に比して, 区切りの数を十分多く, かつ各区間の長さを十分小さくとることができ, 作図による誤差が入らない. おもな誤差ははじめに設けた三つの仮定, 引張試験, 曲げモーメント-曲率線図の作図, および曲げモーメントに対応する曲率を読みとる場合に入るものであって, その後の計算は必要に応じていかほどでも精度を良くすることができる.

例題 第 3 図のように, 一様な棒の両端に軸力を加え, 上下対称な曲げ変形を生ずる場合の解を求め. 変形は上下対称であるから, 第 6 図のように上半分について解くことにする.

棒は長方形の断面をもち, $L_0 = 50 \text{ mm}$, 厚さ (紙面内) $= 1 \text{ mm}$ であり, 幅 (紙面に垂直方向) は単位幅

第 7 図

について計算する. 最初に選定する 0 点の曲げモーメントを, 板の単位幅につき $M_0 = 5.5 \text{ kg}$ とする. 材料の応力-ひずみ曲線は第 7 図に示されるものである. 縦弾性係数は $20\,000 \text{ kg/mm}^2$, 降伏応力は 20 kg/mm^2 で, 引張側と圧縮側は簡単のため対称とする.

第 7 図と断面の寸法より曲げモーメント-曲率線図を描けば第 8 図となる. 実際の計算には数値の読み取りを容易にするために部分拡大図を描くのがよい.

第 8 図

Δl の寸法は,

$$\Delta l_0 \sim \Delta l_9 = 1 \text{ mm} \quad \Delta l_9 = 1.5 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{10} \sim \Delta l_{15} = 2 \text{ mm} \quad \Delta l_{16} = 3 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{17} \sim \Delta l_{21} = 5 \text{ mm}$$

である.

計算結果のたわみ曲線は第 9 図のようになる. 第 4 近似曲線は, 曲線の太さの範囲内において第 3 近似曲線と一致する.

第 9 図

曲げモーメントの分布は第 10 図のようになる. 第 1 近似として直線分布から始め, 第 2 近似は第 9 図第 1 近似曲線より求めたモーメント分布, 第 3 近似は同じく第 2 近似曲線より求めたものである. 第 4 近似は曲線の太さの範囲内において第 3 近似と一致する.

この例題の結果より, 曲げモーメントの分布を最初に直線分布のようなきわめて大まかな近似を用いても第 3 近似ではほぼ所期の曲線に到達することが見当づけられる.

第 10 図

ニ ュ ー ス

トリオン電気式空気除じん機
(Trion Electric Air Filter)

工場や事務所において安全、衛生ということが強くさげばれているが、このような面に関しては従来よりわが国では比較的等閑視され勝ちの傾向があった。近時米国トリオン社でトリオン電気式空気除じん機がつくられ、わが国では小糸商事会社はその販売および据付け施工を行っている。空気調節の問題は工場や事務所では、その従業員の保健上不可欠のもので本機などはその機能の点からいって極く最新式の適切なものである。

第 1 図

本機の原理的構造はイオン化部（アイオナイザ）と集じん部（コレクティングセル）との装置の電源であるパワーバックとから構成され、空気がアイオナイザを通過するときこの空気中のあらゆるじんあい粒子がアイオナイザの放射する陽イオンによって陽電気を

結語 曲げの問題を単軸問題として取り扱う場合には、材料の応力-ひずみ曲線より直接に曲げ曲線の近似解が得られる。例題の数値計算の結果からみれば、解の収束性はかなり良好で、例題の場合のように最初曲げモーメントの分布を大まかに仮定しても、第3近似で実用上ほぼ満足な結果に到達する。

文 献

- (1) たとえば、Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, p. 45~51.

帯電し、続いてコレクティングセルを通過するとき、帯電したじんあい粒子は集じん板の間に生じている電場の影響で、負電圧の集じん板に吸着される。したがって、本装置通過後の空気は完全に除じんされ清浄なものとなる。

トリオンの構造はアイオナイザとコレクティングセルとを一体として組合わせられたもので、アイオナイジングコレクティングセルと称している。

電源部（パワーバック）——交流 100 ボルトを高圧直流に変える整流器で、アイオナイジングコレクティングセルのアイオナイザ（+12 000 VDC）コレクティングセル（+6 000 VDC）に電圧を供給する——の外に洗浄装置が取り付けられていて、アイオナイジングコレクティングセルに集じんされたじんあいを自動的に洗い落とすようになっている。またトリオン後部の空気出口側には、防水性の鋼状フィルタがはめ込んである。

アイオナイジングコレクティングセルはセルの部分がアルミニウム製でさびに強い性質を有し軽量であるので取扱いが簡単である。セルは 22 in 型、33 in 型の 2 種類があり、前者は 22 in 幅×24 in 高さ×18 in 深さで、効率 90% で除じん能力 (1 330 ft³/mn CFM)、後者は 33 in 幅×24 in 高さ×18 in 深さ、効率 90% で除じん能力 2 000 CFM である。この 2 種類のセルの組合わせで適当な能力のものを供給可能である。

洗浄装置は配水管と高能率ノズルで構成され洗浄は通常 125°F、水圧 30 lbs-in² の温水を使用して約 3 分間行う。

トリオンの特徴は

1. ザイルズまで除去可能、
2. 可動部分なし、
3. 電気消費量わずか、
4. 自動的に洗浄可能、
5. 取付け簡単

などであり、だいたい 0.001 μ 以下の微粒子まで除去可能であるので病院などにも利用可能である。

[中井重行]